函数表与积分表

函数表与积分表

И. М. 雷日克
И. С. 格拉德什坦 編著
高等教育出版社編輯部譯

高等教育出版社

·72

本书系根据苏联国立技术理論书籍出版社(Государственное издательство технико-теоретической литературы) 1951年出版的“Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведении”一书第三版修訂本翻譯的。原书的全譯名是“积分、和数、級数与乘积表”。我們参照原书第三版修訂者的意見，按照书的內容把书名改为比較簡短的“函数表与积分表”(見书中第三版原序)。

本书大部分材料是供数学研究工作者以及做理論研究的工程师用的，但也可供高等学校的师生在教学积分学时作为参考之用，因为书中也包括了普通的积分公式(第二章及第三章)。

本书是根据国內影印本翻譯的，影印本中有些公式、符号比較模糊，承丁志华同志热情帮助，进行核对，特于此致謝。

函数表与积分表

И. М. 雷日克，И. С. 格拉德什坦編著
高等教育出版社編輯部譯
高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺7号
(北京市书刊出版业营业許可証出字第054号)
京华印书局印装　新华书店发行

統一书号 13010-618 开本 $787 \times 1092 \frac{1}{16}$ 印张 $30\frac{5}{8}$
字数 690,000 印数 0001—7000 定价(6)¥2.90
1959年12月第1版　1959年12月北京第1次印刷

目　次

第一版原序摘要……1
第三版原序……2
关于公式編号次序的說明……1

0. 导引

0.1. 有穷项的和……1
0.11. 序列(級数)(1). 0.12. 自然数乘方之和(1). 0.13. 自然数倒数之和(2). 0.14. 自然数倒数乘积之和(3). 0.15. 二项式系数之和(3).

0.2. 常数項級数与无穷乘积……5
0.21. 常数項級数的收斂(5). 0.22. 收斂判别法(5). 0.23—0.24. 常数項級数的例(7). 0.25. 无穷乘积(11). 0.26. 无穷乘积的例(12).

0.3. 函数項級数……12
0.30. 有关定义及定理(12). 0.31. 冪級数(14). 0.32. 三角級数(16). 0.33. 漸近級数(18).

0.4. 微分学中的一些公式……19
0.41. 定积分对参量的微分法(19). 0.42. 乘积的 n 阶导数(萊布尼茲法則)(19). 0.43. 复合函数的 n 阶导数(19).

1. 初等函数

1.1. 二項式乘冪……21
1.11. 冪級数(21). 1.12. 有理分式級数(22).

1.2. 指数函数……22
1.21. 級数形式的表示式(22). 1.22. 函数关系式(23). 1.23. 指数函数的級数(23).

1.3.—1.4. 三角函数及双曲函数……23
1.30. 引言(23). 1.31. 基本函数关系式(24). 1.32. 三角函数及双曲函数的乘冪用倍角函数表达的式子(26). 1.33. 倍角三角函数及倍角双曲函数用这些函数的乘冪表达的式子(27). 1.34. 三角函数及双曲函数的几个和式(30). 1.35. 倍角函数乘冪的和式(31). 1.36. 倍角三角函数乘积的和式(32). 1.37. 倍角正切的和式(33). 1.38. 可化为双曲正切及双曲余切的和式(33). 1.39. 倍角余弦及正弦的有穷乘积表达式(34). 1.41. 三角函数及双曲函数的冪級数展式(35). 1.42. 最簡分式展式(37). 1.43. 无穷乘积表达式(38). 1.44—1.45. 三角級数(39). 1.46. 指数函数及三角函数乘积的級数(43). 1.47. 双曲函数項級数(43). 1.48. 罗巴切夫斯基"平行角"$\Pi(x)$(43). 1.49. 双曲幅角(古德曼量)$\mathrm{gd}x$(44).

1.5. 对数函数……45
1.51. 級数表示式(45). 1.52. 对数函数项級数(47).

1.6 反三角函数及双曲函数……47
1.61. 定义域(47). 1.62—1.63. 函数关系式(48). 1.64. 級数表示式(52).

2. 不定积分

2.0. 导引……54
2.00. 总的說明(54). 2.01. 基本积分(55). 2.02. 一般公式(56).

2.1. 有理函数……57
2.10. 一般积分法則(57). 2.11—2.13. 含二項式 $a+bx^k$ 的形式(59). 2.14. 含二項式 $1\pm x^n$ 的形式(64). 2.15. 含 $a+bx$ 与 $\alpha+\beta x$ 对二项式的形式(68). 2.16. 含三項式$a+bx^k+cx^{2k}$ 的形式(68). 2.17. 含二次三項式

$a+bx+cx^2$ 及 x 的乘幂的形式(69). 2.18. 含二次三項式 $a+bx+cx^2$ 及二項式 $\alpha+\beta x$ 的形式(71)。

2.2. 代数函数…………………………………………………………………………

2.20. 引言(72). 2.21. 含二项式 $a+bx^k$ 与 $\sqrt{x}$ 的形式(73). 2.22—2.23. 含 $\sqrt[n]{(a+bx)^k}$ 的形式(74). 2.24. 含 $\sqrt{a+bx}$ 及二項式 $\alpha+\beta x$ 的形式(78). 2.25. 含 $\sqrt{a+bx+cx^2}$ 的形式(82). 2.26. 含 $\sqrt{a+bx+cx^2}$ 及 x 的整数幂的形式 (83). 2.27. 含 $\sqrt{a+cx^2}$ 及 x 的整数次幂(88). 2.28. 含 $\sqrt{a+bx+cx^2}$ 及一次与二次多项式的形式(92). 2.29. 可化为椭圆积分及伪椭圆积分的积分(93).

2.3. 指数函数·双曲函数……………………………………………………………94

2.31. 含 e^{ax} 的形式(94). 2.32. x 的指数函数及有理函数(95). 2.33. 含 sh$x$ 及 ch$x$ 的形式(96). 2.34. 含 th$x$ 及 cth$x$ 的形式(97). 2.35. x 的双曲函数及幂函数(98).

2.4—2.5. 三角函数……………………………………………………………………98

2.40. 引言(98). 2.41—2.42. 正弦及余弦的幂(99). 2.43. 正切及余切的幂(105). 2.44. 倍角正弦及余弦(106). 2.45. 正弦及余弦的有理函数(111). 2.46. 正切的代数函数(115). 2.47—2.48. 可化为椭圆积分及伪椭圆积分的积分(115). 2.49. 对数函数的正弦及余弦(123). 2.51. 含 $x^m\sin^n x$ 及 $x^m\cos^n x[m>0, n>0]$ 的形式(123). 2.52. 含 $x^m\sin^n x$ 及 $x^m\cos^n x\ [m<0,\ n<0]$ 的形式(124). 2.53. 含 $x^m\sin^n x$ 及 $x^m\cos^n x[m>0, n<0]$ 的形式(127). 2.54. sin$x$, cos$x$ 及 x 的有理函数(128). 2.55. 三角函数及指数函数(128).

2.6. 对数函数·反双曲函数…………………………………………………………130

2.61. 对数函数(130). 2.62—2.63. 对数函数及幂函数(130). 2.64. 反双曲函数(133).

2.7. 反三角函数………………………………………………………………………134

2.71. 反正弦及反余弦(134). 2.72. 反正割及反余割, 反正切及反余切(134). 2.73. 反正弦、反余弦与代数函数(135). 2.74. 反正割、反余割与 x 的幂(136). 2.75. 反正切、反余切与幂函数(136).

2.8. 特殊函数…………………………………………………………………………137

2.81. 雅科比椭圓函数(137). 2.82. 完全椭圆积分(140). 2.83. 維尔斯特拉司椭圓函数(140). 2.84. 积分正弦与积分余弦(141). 2.85. 柱函数(141).

3. 初等函数的定积分

3.0. 导引………………………………………………………………………………143

3.01. 一般性的定理(143). 3.02. 定积分中的变量置换(144). 3.03. 一般性的公式(145). 3.04. 旁义积分(147). 3.05. 旁义积分的主值(148).

3.1. 幂函数及代数函数…………………………………………………………………149

3.11. 有理函数(149). 3.12. 一次及二次多項式的平方根(149). 3.13. 三次多项式的平方根(149). 3.14. 四次多项式的平方根(152). 3.15—3.18. x 及二項式 $\alpha+\beta x$ 的幂(157). 3.19. 多项式及幂函数的幂(160).

3.2. 指数函数…………………………………………………………………………162

3.21. 指数函数(162). 3.22. e^{px} 的多项式与幂函数(164). 3.23—3.24. e^{px} 的有理函数与幂函数(166). 3.25. e^{px} 的代数函数与幂函数(168). 3.26. $\alpha e^{px}+\beta e^{qx}$ 型二项式的幂与幂函数(169). 3.27—3.29. 复合变元的指数函数与幂函数(169).

3.3. 双曲函数…………………………………………………………………………171

3.31. 双曲函数(171). 3.32. 双曲函数与幂函数(171). 3.33. 双曲函数与指数函数(174). 3.34. 双曲函数、指数函数与幂函数(174).

3.4—3.5. 三角函数……………………………………………………………………175

3.41. sin$x$, cos$x$ 及 tg$x$ 的代数函数(175). 3.42—3.43. sin$x$, cos$x$ 及 tg$x$ 的幂(176). 3.44. 二倍角三角函数(181). 3.45. 倍角三角函数(182). 3.46. x 的幂的三角函数(184). 3.47. 双曲函数的三角函数(185). 3.48. 三角函数的三角函数(185). 3.49. 反三角函数的三角函数(186). 3.51—3.55. 三角函数与幂函数(186). 3.56. 三角函数与指数函数(201). 3.57. 三角函数、指数函数与幂函数(205). 3.58. 三角函数与双曲函数(207). 3.59. 三角函数、双曲函数与代数函数(209).

3.6—3.7. 对数函数……………………………………………………………………209

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

3.61. 对数函数(209). 3.62—3.65. $\ln x$ 与幂函数(212). 3.66—3.67. 多项式的对数与幂函数(219). 3.68—3.69. 变元較复杂的对数与幂函数(225). 3.71. 对数函数与指数函数(226). 3.72. 对数函数、指数函数与幂函数(227). 3.73. 对数函数与双曲函数(227). 3.74. 对数函数、双曲函数与幂函数(228). 3.75—3.77. 对数函数与三角函数(228). 3.78. 对数函数、三角函数与有理函数(235). 3.79. 对数函数、三角函数与双曲函数(236).

3.8. **反三角函数**······237

3.81. 反三角函数(237). 3.82. 反正弦、反余弦与幂函数(237). 3.83. 反正切、反余切与幂函数(239). 3.84. 反正切、反余切与指数函数(243). 3.85. 反正切与双曲函数(243). 3.86. 反三角函数与三角函数(243). 3.87. 反三角函数与三角函数及幂函数(244). 3.88. 反三角函数与对数函数(244).

3.9. **重积分**······245

3.90. 重积分的变量置换(245). 3.91. 积分次序的改变(246). 3.92. 常数积分限的二重及三重积分(248). 3.93—3.94. 多重积分(250).

4. 特殊函数的定积分

4.1. **椭圓积分**······256

4.11. 含 $F(x,k)$ 的形式(256). 4.12. 含 $E(x,k)$ 的形式(256). 4.13. 完全椭圓积分(256).

4.2. **积分指数函数及有关函数**······257

4.21. 积分对数(257). 4.22. 积分指数函数(257). 4.23. 积分正弦及积分余弦(258). 4.24. 概率积分(260). 4.25. 夫累涅积分(261).

4.3. **欧拉积分及有关函数**······262

4.31. 嘎馬函数(262). 4.32. 嘎馬函数的对数(262). 4.33. 函数 $\psi(x)$(263).

4.4. **柱函数**······263

4.40. 柱函数(263). 4.41. 柱函数与幂函数(265). 4.42. 柱函数与指数函数(269). 4.43. 柱函数、指数函数与幂函数(271). 4.44. 柱函数与双曲函数(274). 4.45. 柱函数与三角函数(274). 4.46. 柱函数、三角函数与幂函数(276). 4.47 柱函数、对数与反正切(278). 4.48. 柱函数、积分正弦等等(278). 4.49. 柱函数对指数的积分法(279).

4.5. **球函数**······279

4.51. 球函数(279). 4.52. 勒讓特多项式(280).

4.6. **多项式 $C_n^p(t)$**······282

4.7. **正交多项式**······283

4.71. 契比雪夫多项式(283). 4.72. 埃尔密特多项式(283). 4.73. 雅科比多项式(284). 4.74. 拉盖尔多项式(284).

4.8. **退化超几何函数**······284

4.81. 惠塔客函数(284). 4.82. 抛物柱函数(284).

4.9. **多项式 $T_a(t,x)$ 的余弦的积分法**······285

5. 积分变换及其反演式

5.0. **导引**······286

5.1. **福里哀变换**······286

5.2. **拉普拉斯变换**······292

5.3. **汉开尔变换**······308

6—7. 特殊函数

6.1. **椭圓积分与椭圓函数**······310

6.11. 椭圓积分(310). 6.12. 椭圓积分間的函数关系式(313). 6.13. 椭圓函数(315). 6.14. 雅科比椭圓函数(316). 6.15. 雅科比椭圓函数的性质及其間的函数关系式(320). 6.16. 維尔斯特拉司函数 $\wp(u)$(323). 6.17. 函数 $\zeta(u)$ 与 $\sigma(u)$(326). 6.18—6.19. 西塔函数(327).

6.2. 积分指数函数及有关函数 ……331

6.21. 积分对数及积分指数函数: $\mathrm{li}(x)$及$\mathrm{Ei}(x)$(331). 6.22. 积分正弦及积分余弦: $\mathrm{si}(x)$及 $\mathrm{ci}(x)$(334). 6.23. 概率积分及夫累涅积分: $\Phi(x)$, $S(x)$及 $C(x)$(335). 6.24. 罗巴切夫斯基函数 $L(x)$(338).

6.3. 第一类及第二类欧拉积分及有关函数 ……339

6.31. 嘎馬函数(第二类欧拉积分): $\Gamma(x)$(339). 6.32. 嘎馬函数的級数表示式及乘积表示式(341). 6.33. 嘎馬函数間的关系式(342). 6.34. 嘎馬函数的对数$\ln\Gamma(x)$(344). 6.35. 潑西函数: $\psi(x)=\frac{d}{dx}\ln\Gamma(x)$(346). 6.36. 欧拉常数 C(349). 6.37. 倍塔函数(第一类欧拉积分): $\mathrm{B}(x, y)$(350). 6.38. 倍塔函数間的关系式(352). 6.39. 函数 $\beta(x)$(353).

6.4—6.5. 柱函数 ……354

6.40. 定义(354). 6.41. 函数$J_p(z)$的积分表示式(355). 6.42. 函数 $N_p(z)$ 的积分表示式(358). 6.43. 函数$H_p{}^{(1)}(z)$及$H_p{}^{(2)}(z)$的积分表示式(358). 6.44. 函数$I_p(z)$及$K_p(z)$的积分表示式(361). 6.45. 級数形式的表达式(363). 6.46. 柱函数的漸近展式(364). 6.47. 指数等于整数加二分之一的柱函数(368). 6.48—6.49. 函数关系式(370). 6.51. 导至柱函数的微分方程(374). 6.52—6.53. 貝塞尔函数項的級数(376). 6.54. 依柱函数乘积的展式 (382). 6.55. 柱函数的根(384). 6.56. 湯姆生函数及其推广: $\mathrm{ber}_p(z)$, $\mathrm{bei}_p(z)$, $\mathrm{her}_p(z)$, $\mathrm{hei}_p(z)$, $\mathrm{ker}(z)$, $\mathrm{kei}(z)$(385).

6.6. 馬丢函数 ……387

6.60. 定义(387). 6.61. 三角級数形式的解(387). 6.62. 馬丢周期函数(388). 6.63. 純虚数变元的馬丢函数(389).

6.7—6.8. 球函数 ……391

6.70. 引言(391). 6.71. 积分表示式(393). 6.72. $|p|$为大值时的漸近級数(395). 6.73—6.74. 函数关系式(397). 6.75. 特殊情形和特殊值(400). 6.76. 对指数的导数(402). 6.77. 級数形式的表示式(402). 6.78. 球函数的零点(405). 6.79. 球函数項級数(406). 6.81. 勒訨特多項式(407). 6.82. 勒訨特多項式項的級数(410). 6.83. 整指数的球函数(副勒訨特函数)(412). 6.84.—6.85. 勒訨特函数(414). 6.86. 錐函数(418). 6.87. 环函数(420).

6.9. 多項式 $C_n^p(t)$ ……421

6.90. 定义(421). 6.91. 积分表示式(421). 6.92. 函数关系式(422). 6.93. 导数(422). 6.94. 与其他函数的联系(423). 6.95. 特殊情形及特殊值(423). 6.96. 对多項式 $C_n^p(t)$求导数的微分方程(423).

7.1. 正交多項式 ……423

7.10. 引言(423). 7.11. 契比雪夫多項式 $T_n(x)$及 $U_n(x)$(425). 7.12. 埃尔密特多項式 $H_n(x)$(426). 7.13. 雅科比多項式 $G_n(p, q; x)$(428). 7.14. 拉盖尔多項式(429).

7.2. 超几何函数 ……431

7.20. 定义(431). 7.21. 积分表示式(432). 7.22. 用超几何函数表示初等函数(432). 7.23. 超几何級数所定函数的变换公式及解析开拓(434). 7.24. 广义超几何級数(437). 7.25. 超几何微分方程(437). 7.26. 黎曼微分方程(440). 7.27. 用黎曼图式写一些二阶微分方程(443).

7.3. 退化超几何函数 ……444

7.30. 引言(444). 7.31. 函数 ${}_1F_1(\alpha;\gamma;z)$(445). 7.32—7.33. 惠塔客函数 $M_{\lambda,\mu}(z)$及 $W_{\lambda,\mu}(z)$(446). 7.34—7.35. 抛物柱函数 $D_p(z)$(450).

7.4. 黎曼才塔函数: $\zeta(z, q)$及 $\zeta(z)$ ……454

7.41. 定义及积分表示式(454). 7.42. 級数或无穷乘积形式的表示式(455). 7.43. 函数关系式(456). 7.44. 奇异点及零点(456).

7.5. 貝努利数及貝努利多項式 ……457

7.51. 貝努利数(457). 7.52. 貝努利多項式(458). 7.53. 欧拉数(459).

8. 数值表

8.1. 罗巴切夫斯基函数 $L(x)$ ……461

8.2. 貝努利数及欧拉数 ……462

8.21. 貝努利数(462). 8.22. 欧拉数(462).
8.3. 黎曼才塔(ζ)函数……462
8.4. 常見系数的数値……463
8.5. 欧拉常数及卡塔兰常数……464
特殊函数及其記号的索引表……466
本书中所用的記号表……471
参考文献索引……473

附　录

文献中对特殊数与特殊函数所用的不同記号……475

0. 导　　引

0.1 有穷项的和

0.11 序列(級数)

0.111 算术級数(等差級数)

$$\sum_{k=0}^{n-1}(a+kr)=\frac{n}{2}[2a+(n-1)r]=\frac{n}{2}(a+l)\qquad [l\text{ 是末项}].$$

0.112 几何級数(等比級数)

$$\sum_{k=1}^{n}aq^{k-1}=\frac{a(q^n-1)}{q-1}.$$

0.113 算术几何級数

$$\sum_{k=0}^{n-1}(a+kr)q^k=\frac{a-[a+(n-1)r]q^n}{1-q}+\frac{rq(1-q^{n-1})}{(1-q)^2}.$$ Жл(5)

0.12 自然数乘方之和

0.121

$$\sum_{k=1}^{n}k^q=\frac{n^{q+1}}{n+1}+\frac{n^q}{2}+\frac{1}{2}\binom{q}{1}B_2n^{q-1}+\frac{1}{4}\binom{q}{3}B_4n^{q-3}+\frac{1}{6}\binom{q}{5}B_6n^{q-5}+\cdots\cdots=$$

$$=\frac{n^{q+1}}{q+1}+\frac{n^q}{2}+\frac{qn^{q-1}}{12}-\frac{q(q-1)(q-2)}{720}n^{q-3}+\frac{q(q-1)(q-2)(q-3)(q-4)}{30240}n^{q-5}-\cdots\cdots$$

[末项含 n 或 n^2](再参看**7.523** 1.). Ч332

1. $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}.$ Ч333

2. $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$ Ч333

3. $\sum_{k=1}^{n}k^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$ Ч333

4. $\sum_{k=1}^{n}k^4=\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1).$ Ч333

5. $$\sum_{k=1}^{n} k^5 = \frac{n^6}{6} + \frac{n^5}{2} + \frac{5n^4}{12} - \frac{n^2}{12} = \frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1).$$ Ч333

6. $$\sum_{k=1}^{n} k^6 = \frac{1}{42}n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1).$$ Ч333

7. $$\sum_{k=1}^{n} k^7 = \frac{1}{24}n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2).$$ Ч333

0.122 $$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^q = \frac{2^q}{q+1}n^{q+1} - \frac{1}{2}\binom{q}{1}2^{q-1}B_2 n^{q-1} - $$
$$-\frac{1}{4}\binom{q}{3}2^{q-3}(2^3-1)B_4 n^{q-3} - \cdots\cdots$$
[末項含 n 或 n^2].

1. $$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2.$$

2. $$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \frac{1}{3}n(4n^2-1).$$ Жл(32а)

3. $$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^3 = n^2(2n^2-1).$$ Жл(32б)

0.123 $$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)^2 = \frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+5).$$

0.124 $$\sum_{k=1}^{q} k(n^2-k^2) = \frac{1}{4}q(q+1)(2n^2-q^2-q).$$

0.125 $$\sum_{k=1}^{n} k!\cdot k = (n+1)!-1.$$ A(188.1)

0.126 $$\sum_{k=1}^{n} \frac{(n+k)!}{k!(n-k)!} = \sqrt{\frac{e}{\pi}}K_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right).$$ B94

0.13 自然数倒数之和

0.131 $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = C + \ln n + \frac{1}{2n} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{A_k}{n(n+1)\cdots\cdots(n+k-1)},$$

其中

$$A_k = \frac{1}{k}\int_0^1 x(1-x)(2-x)(3-x)\cdots\cdots(k-1-x)\,dx.$$

$$A_2 = \frac{1}{12}, \qquad A_3 = \frac{1}{12},$$

$$A_4=\frac{19}{80},\qquad A_5=\frac{9}{20},$$ Жл(59)A(1876)

0.132 $$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}=\frac{1}{2}(C+\ln n)+\ln 2+\frac{B_2}{8n^2}+\frac{(2^3-1)B_4}{64n^4}+\cdots\cdots$$ Жл(71a)u

0.133 $$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2-1}=\frac{3}{4}-\frac{2n+1}{2n(n+1)}.$$ Жл(184f)

0.14 自然数倒数乘积之和

0.141

1. $$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{[p+(k-1)q](p+kq)}=\frac{n}{p(p+nq)}.$$ ГК Ⅲ(64)u

2. $$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{[p+(k-1)q](p+kq)[p+(k+1)q]}=\frac{n(2p+nq+q)}{2p(p+q)(p+nq)[p+(n+1)q]}.$$ ГК Ⅲ(65)u

3. $$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{[p+(k-1)q](p+kq)\cdots\cdots[p+(k+l)q]}=\frac{1}{(l+1)q}\left\{\frac{1}{p(p+q)\cdots\cdots(p+lq)}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{(p+nq)[p+(n+1)q]\cdots\cdots[p+(n+l)q]}\right\}.$$ A(1856)u

4. $$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{[1+(k-1)q][1+(k-1)q+p]}=$$
$$=\frac{1}{p}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+(k-1)q}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+(k-1)q+p}\right].$$ ГК Ⅲ(66)u

0.142 $$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+k-1}{(k+2)!}=\frac{1}{2}-\frac{n+1}{(n+2)!}.$$ Жл(157)

0.15 二项式系数之和(n 是自然数)

0.151

1. $$\sum_{k=0}^{m}\binom{n+k}{n}=\binom{n+m+1}{n+1}.$$ Кр 64(70.1)

2. $$1+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots\cdots=2^{n-1}.$$

3. $$\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\cdots\cdots=2^{n-1}.$$

4. $$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n}{k}=(-1)^m\binom{n-1}{m}.$$ Кр 64(70.2)

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

0.152

1. $\binom{n}{0}+\binom{n}{3}+\binom{n}{6}+\cdots\cdots=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{n\pi}{3}\right).$ Кр 62(59.1)

2. $\binom{n}{1}+\binom{n}{4}+\binom{n}{7}+\cdots\cdots=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{(n-2)\pi}{3}\right).$ Кр 62(59.2)

3. $\binom{n}{2}+\binom{n}{5}+\binom{n}{8}+\cdots\cdots=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{(n-4)\pi}{3}\right).$ Кр 62(59.3)

0.153

1. $\binom{n}{0}+\binom{n}{4}+\binom{n}{8}+\cdots\cdots=\frac{1}{2}\left(2^{n-1}+2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}\right).$ Кр 63(60.1)

2. $\binom{n}{1}+\binom{n}{5}+\binom{n}{9}+\cdots\cdots=\frac{1}{2}\left(2^{n-1}+2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}\right).$ Кр 63(60.2)

3. $\binom{n}{2}+\binom{n}{6}+\binom{n}{10}+\cdots\cdots=\frac{1}{2}\left(2^{n-1}+2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}\right).$ Кр 63(60.3)

4. $\binom{n}{3}+\binom{n}{7}+\binom{n}{11}+\cdots\cdots=\frac{1}{2}\left(2^{n-1}+2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}\right).$ Кр 63(60.4)

0.154

1. $\sum_{k=0}^{n}(k+1)\binom{n}{k}=2^{n-1}(n+2).$ Кр 63(66.1)

2. $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}k\binom{n}{k}=0.$ Кр 63(66.2)

0.155

1. $\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k+1}\binom{n}{k}=\frac{n}{n+1}.$ Кр 63(67)

2. $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$ Кр 63(68.1)

3. $\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^{k+1}}{k+1}\binom{n}{k}=\frac{(\alpha+1)^{n+1}-1}{n+1}$ Кр 63(68.2)

4. $\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k}=\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}.$ Кр 64(69)

0.156

1. $\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{m}{p-k}=\binom{n+m}{p}$ [m 是自然数]. Кр 64(71.1)

2. $\sum_{k=0}^{n-p}\binom{n}{k}\binom{n}{p+k}=\frac{(2n)!}{(n-p)!\,(n+p)!}.$ Кр 64(71.2)

0.157

1. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$. Кр 64(72.1)

2. $\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}^2=(-1)^n\binom{2n}{n}$. Кр 64(72.2)

3. $\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k\binom{2n+1}{k}^2=0$. Кр 64(72.3)

4. $\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}^2=\frac{(2n-1)!}{[(n-1)!]^2}$. Кр 64(72.4)

0.2 常数項級数与无穷乘积

0.21 常数項級数的收斂

級数

0.211
$$\sum_{k=1}^{\infty}u_k=u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots$$

称为絕对收斂，如果其各項絕对值(模)所成的級数

0.212
$$\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|=|u_1|+|u_2|+|u_3|+\cdots\cdots$$

收斂。若級数 **0.211** 收斂，而級数 **0.212** 发散，則級数 **0.211** 称为条件收斂的。所有絕对收斂的級数都是收斂的。

0.22 收斂判別法

0.221 設
$$\lim_{k\to\infty}|u_k|^{\frac{1}{k}}=q.$$

若 $q<1$，則級数 **0.211** 是絕对收斂的；若 $q>1$，則級数 **0.211** 是发散的(柯西)。

0.222 設
$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right|=q.$$

若 $q<1$，則級数 **0.211** 絕对收斂；若 $q>1$，則級数 **0.211** 发散。若 $\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right|$ 趋于1而保持大于1，則級数 **0.211** 发散(达朗倍尔)。

0.223 設
$$\lim_{k\to\infty}k\left\{\left|\frac{u_k}{u_{k+1}}\right|-1\right\}=q.$$

則 $q>1$ 时級数 **0.211** 絕对收斂；$q<1$ 时級数 **0.211** 发散(拉布)。

0.224 設 $f(x)$ 是正的减函数，且設对自然数 k

$$\lim_{k\to\infty}\frac{e^k f(e^k)}{f(k)}=q.$$

則 $q<1$ 时級数 $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ 絕对收斂；$q>1$ 时这級数发散（叶尔馬科夫）。

0.225 設
$$\left|\frac{u_k}{u_{k+1}}\right|=1+\frac{q}{k}+\frac{|v_k|}{k^p},$$

其中 $p>1$，而 $|v_k|$ 是有界的，即是說，$|v_k|$ 小于一个不依賴于 k 的数 M。若 $q>1$，則級数 0.211 絕对收斂；若 $q\leqslant 1$，則这級数发散（高斯）。

0.226 設函数 $f(x)$ 当 $x\geqslant q$ 有定义，是連續的、正的且单調减的。在这些条件下，級数

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$$

之为收斂或发散，要看积分

$$\int_q^{\infty} f(x)\,dx$$

之为收斂或发散而决定（柯西积分判別法）。

0.227 設序列 $u_1, u_2, \cdots\cdots, u_n, \cdots\cdots$ 的各項都是正的，这时，級数

1. $$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}u_k=u_1-u_2+u_3-\cdots\cdots$$

叫做交錯級数。

若交錯級数各項絕对值是单調减且趋于零的，卽若

2. $$u_{k+1}<u_k \text{ 且 } \lim_{k\to\infty}u_k=0,$$

則級数 0.227 1. 收斂。这时，級数的余部

3. $$\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k-n+1}u_k=\left|\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}u_k-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}u_k\right|<u_{n+1}.$$ （萊布尼茲）

0.228 若級数

1. $$\sum_{k=1}^{\infty} v_k=v_1+v_2+\cdots\cdots+v_k+\cdots\cdots$$

收斂，而数 u_k 形成单調有界序列，就是說，对某一数 M 及所有的 k 有 $|u_k|<M$，則級数

2. $$\sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k=u_1v_1+u_2v_2+\cdots\cdots+u_kv_k+\cdots\cdots$$

收斂（阿倍耳）。 ФⅡ354

0.229 若級数 0.228 1. 的部分和都有界，而数 u_k 为趋于零的单調序列，就是說

$$\left|\sum_{k=1}^{n} v_k\right| < M[n=1,2,3\cdots\cdots] \text{ 而 } \lim_{k\to\infty} u_k = 0,$$

则級数 0.228 2. 收斂(狄里希莱)。 ФⅡ355

0.23—0.24 常数項級数的例

0.231 級数

1. $$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = \frac{a}{1-q} \qquad [|q|<1].$$

2. $$\sum_{k=0}^{\infty} (a+kr)q^k = \frac{a}{1-q} + \frac{rq}{(1-q)^2} \qquad [|q|<1]$$ (比較 **0.113**).

0.232

1. $$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\frac{1}{k} = \ln 2$$ (比較 **1.511**).

2. $$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\frac{1}{2k-1} = 1 - 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(4k-1)(4k+1)} = \frac{\pi}{4}$$ (比較 **1.634**).

0.233

1. $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots\cdots = \zeta(p) \qquad [\operatorname{Re} p > 1]$$ (幷参閱 **7.422** 1.) УВⅡ44

2. $$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\frac{1}{k^p} = (1-2^{1-p})\zeta(p) \qquad [\operatorname{Re} p > 0]$$ (幷参閱 **7.422** 2.) УВⅡ46

3. $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} = \frac{2^{2n-1}\pi^{2n}}{(2n)!}|B_{2n}|.$$ ФⅡ721

4. $$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\frac{1}{k^{2n}} = \frac{(2^{2n-1}-1)\pi^{2n}}{(2n)!}|B_{2n}|.$$ Жл(165)

5. $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^{2n}} = \frac{(2^{2n}-1)\pi^{2n}}{2\cdot(2n)!}|B_{2n}|.$$ Жл(184b)

6 $$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\frac{1}{(2k-1)^{2n+1}} = \frac{\pi^{2n+1}}{2^{2n+2}(2n)!}|E_{2n}|.$$ Жл(184d)

0.234

1. $$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$ Э158*u*

2. $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$ Э163

3. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}=G.$ ФII482

4. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3}=\frac{\pi^3}{32}.$ Э163

5. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4}=\frac{\pi^4}{96}.$ Э163

6. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^5}=\frac{5\pi^3}{1536}.$ Э164

7. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{k}{(k+1)^2}=\frac{\pi^2}{12}-\ln 2.$

0.235 $S_n=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(4k^2-1)^n},$

$S_1=\frac{1}{2},\quad S_2=\frac{\pi^2-8}{16},\quad S_3=\frac{32-3\pi^2}{64},\quad S_4=\frac{\pi^4+30\pi^2-384}{768}.$ Жл(186)

0.236

1. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(4k^2-1)}=2\ln 2-1.$ Бр$_{26}$ 51u

2. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(9k^2-1)}=\frac{3}{2}(\ln 3-1).$ Бр$_{26}$ 51u

3. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(36k^2-1)}=-3+\frac{3}{2}\ln 3+2\ln 2.$ Б$_{26}$ 52, A(6913.3)

4. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{(4k^2-1)^2}=\frac{1}{8}.$ Бр$_{26}$ 52

5. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(4k^2-1)^2}=\frac{3}{2}-2\ln 2.$ Бр$_{26}$ 52

6. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{12k^2-1}{k(4k^2-1)^2}=2\ln 2.$ A(6917.3), Бр$_{26}$ 52

0.237

1. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2}.$ A(6917.2), Бр$_{26}$ 52

2. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(4k-1)(4k+1)}=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8},$

3. $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k-1)(k+1)}=\frac{3}{4}$ (比較 0.133).

4. $\sum_{k=1, k\neq m}^{\infty}{}' \frac{1}{(m+k)(m-k)} = -\frac{3}{4m^2}$ [m 是整数]. A(6916.1)

5. $\sum_{k=1, k\neq m}^{\infty}{}' \frac{(-1)^{k-1}}{(m-k)(m+k)} = \frac{3}{4m^2}$ [m 是偶数]. A(6916.2)

0.238

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)2k(2k+1)} = \ln 2 - \frac{1}{2}.$ ГКШ(93)

2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)2k(2k+1)} = \frac{1}{2}(1-\ln 2).$ ГКШ(94)u

3. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3k+1)(3k+2)(3k+3)(3k+4)} = \frac{1}{6} - \frac{1}{4}\ln 3 + \frac{\pi}{12\sqrt{3}}.$ ГКШ(95)

0.239

1. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{3k-2} = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} + \ln 2\right).$ ГКШ(85), Бр$_{08}$161(1)

2. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{3k-1} = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \ln 2\right).$ Бр$_{08}$161(1)

3. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{4k-3} = \frac{1}{4\sqrt{2}}[\pi + 2\ln(\sqrt{2}+1)].$ Бр$_{08}$161(1)

4. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{E\left(\frac{k+3}{2}\right)} \frac{1}{k} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2.$ ГКШ(87)

5. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{E\left(\frac{k+3}{2}\right)} \frac{1}{2k-1} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$

6. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{E\left(\frac{k+5}{3}\right)} \frac{1}{2k-1} = \frac{5\pi}{12}.$ ГКШ(88)

7. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(8k-1)(8k+1)} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{16}(\sqrt{2}+1).$

0.241

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k k} = \ln 2.$ Жл(172g)

2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k k^2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}(\ln 2)^2.$ Жл(174)

0.242 $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{n^{2k}} = \frac{n^2}{n^2+1}.$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com