中國古代数学的成就

嚴敦傑

中華全國科学技術普及协会出版

中國古代數学的成就

嚴 敦 傑

中華全國科学技術普及协会出版
1956年·北京

出版編号：269

中國古代数学的成就

著　　者：嚴　敦　傑

責任編輯：王　奎　克

出 版 者：中華全國科学技術普及协会

（北京市文津街3号）

北京市書刊出版業營業許可証出字第053号

發 行 者：新　華　書　店

印 刷 者：北京市印刷一厂

（北京市西便門南大道乙1号）

开本：31×43 1/32　印張：1 5/16　字数：19,600

1956年7月第1版　印数：8,800

1956年7月第1次印刷　定价：(7)1角4分

本 書 提 要

数学是研究数和量的科学，它与人民的日常生活和生產有密切的关系。因此，从数学發展的情况往往可以看出一个國家的文化和科学發展的情况。

中國古代数学的研究，和其他各方面一样，是起源很早而且有偉大的成就的：早在三千五百年前的殷代，我國已經有了数学；約在公元前一世紀的时候，中國人已經知道开方的方法和平面几何学的許多定理，包括勾股定理在內；南北朝时（公元 454 年以后），中國数学家已經計算出圓周率的正确数値，發明了計算球形体積的方法；到宋代（公元 1000 年左右），中國数学家已經發明了天元術和四元術等，即代数学上的方程論。这些成就在古籍上斑斑可考，足以証明中外資產階級学者們所說的中國古代無数学，完全是侮蔑性的胡說。

本書把我國古代数学方面的各种成就分門別类地加以簡明的叙述，足以帮助讀者了解我國古代文化的光榮傳統。

目 次

前　　言

在現实的物質世界里面，一切物体都具有一定的形式和数量；研究空間形式（註1）和数量关系的科学，就是数学。

自然科学每一部門的研究对象，都不外是我們所居住的物質世界的客观性質。但是，除了数学以外，各門科学所研究的都只限於物質世界中某些特殊的現象，例如，化学所研究的是物質的根本变化（从这一物質变成那一物質的現象），物理学所研究的主要是物体的运动；只有数学与其他科学不同，它所研究的是一切自然現象的共同性質——空間形式和数量。我們不論研究宇宙中哪一种現象，也不論是从量的方面或質的方面來研究，都終归是要牽涉到数学計算的。同时，在生產方面，特别是現代工業生產方面，也不能沒有数学，例如，假如沒有高等数学的帮助，就不能設計出新式的飛机、輪船等。此外，我們可以說，不論是什么人，也不論所从事的是什么工作，在他的生活中总是經常要用到数学知識的。从这些地方，我們可以体会到数学的重要性。

关於数学的起源，我國古代有黄帝时隸首作算数和黄帝作九章算法的傳說，也有人把八卦和古代傳說中的「河圖」「洛書」（註2）当作数学的起源。但是，所有这些把数学的產生归功於少数特殊人物，甚至归功於「神」的說法，都是錯誤的唯心主义的謬說。自然科学的每一学科都是由於生產斗爭的实际需要，在人們的生產实踐过程中產生出來的，数学也是如此。最早的数学，是从田地面積和器物容積的測量，从时間和簡單机械的計算开始的。数学研究的資料是一些非常現实的东西——田野中的農業生產不能沒有几何学，工厂里面的工業生產也不能沒有算術。数学和其他科学之間又有着密切的关系，天文学、物理学、化学等都需要数学的帮助；因此，其他科学的發展也必然会促進数学的發展。

我們偉大的祖國可以說是数学的祖國，远在兩千年以前，我們中國人民已經掌握了不少完整的数学知識。在我們的國土上，曾經產生像刘徽、祖冲之、祖暅之、刘焯、一行、秦九韶、郭守敬、朱世傑等那样傑出的数学家；他們的發明創造，例如算術上的剩余定理，代数学上的解高次数字方程、二項式系数和內插法，几何学上的求圓周率和求球体積等，在世界数学史上都是不朽的貢献。从上古一直到公元十四、五世紀，我國数学是独立發展的，在这一段相当長的期間中，我們的祖先不僅把我國数学研究从無到有地建立起來，而且以他們創造性的劳动使我們的数学園地开遍了燦爛的花朵。

在这里，我們將以簡短的篇幅把祖國古代在数学上的重要成就概括地介紹一下，使讀者对我們古老而优美的文化傳統有更進一步的了解。

中國对於数和形的最早的認識

从地下發掘的結果來看，至迟在三千五百年以前的殷代，我國已經有了相当完整的数字。从河南殷墟發掘出來的甲骨文「卜辞」(註3)，其中不少都帶有数字，所記載的有战爭中殺死或俘獲的人数、田獵时獵得禽獸的数目、祭祀时所用牺牲的数目等。在这些数字中，有从一到九的單位数和最大到三万的复位数，一般都是十進記数的。但殷代不是文字剛剛創造出來的时代，所以数字在中國的出現，实际上应該远在殷代以前。「卜辞」中有一則記載着：「八日辛亥，允戈伐二千六百五十六人。」意思是在八日辛亥那一天，战爭中殺死了2,656人。这是从地下發掘出來的載有四位数字的实物資料。此外，有些古書里面提到億、兆等数字，例如「左傳」說殷紂王曾經征服了「億兆夷人」(当时的「億」和「兆」大約是十万和百万)，这些話既然是殷代的傳說，那末在殷代可能已經有了「億」、「兆」等数字。这是从古書中找到的間接的資料。这些实物的和文字的資料，都可以証明殷代已經有了簡單的运算，因为那些数字的得來一定是通过运算的。殷代人民为了計算農事上的日期，还發明了一种序数表——六十甲子表，在这表中，以十干和十二支(註4)配合成六十个序数，用它們周而复始地來紀日。由於这六十甲子表的發明，我國歷史上的日序，可以說从古到今一直沒有錯乱过。

从我國古代文字中我們可以看到我國古代数字的寫法：从一到四的單位数起初是累積的，寫作一、二、三、亖，四以上的寫法便不同，后來四也不用累積而改变了寫法。复位数起初

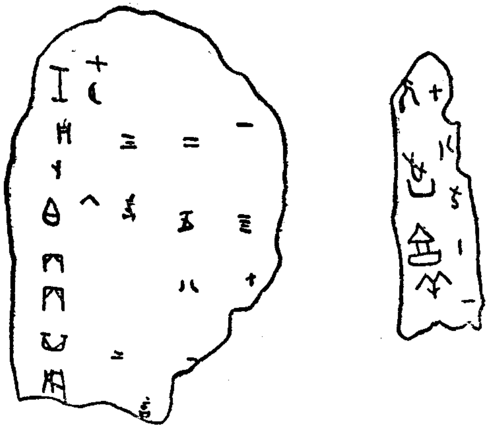

圖 1　甲骨文中的数字。这是兩塊甲骨的摹印。原圖为郭沫若「卜辞类纂」的第十一、十二片。大的一片右边几行是：

六	三上吉	二五八	一四七
	二	一	

七下面当是十字，又「上吉，六」下面原物不清楚，当有一九字。小的一片右行是「七、八、九、十、一」五字。

是合書的，就是把几百、几十、几千的兩个字合在一起，这是十進記位的很好証明。再后用筹算(註5)，單位数从一到五是累積的，古代数学書上所說的「五不單張，六不積聚」，就是这个意思；复位数只是以横直互換，比合書進步了。

在数的运算上，一般都是先懂得加減，然后發展到懂得乘除。至迟在公元前三、四百年的时候，我國已有了乘法表，春秋时的書「管子」上就記載了从一七到七七的乘法口訣，到漢朝，「淮南子」里面又記錄了从一九到九九的乘法口訣。在甘肅敦煌和居延所發現的漢簡中，有保存下來的最古的乘法表。

对於形的認識起源也很早。从地下發掘出來的殷以前的陶器上面已經有許多种几何圖案。殷代甲骨文的田字寫作許多小方塊。这說明在農業出現以后，中國人民在劳动中已經認識了簡單的几何圖形。甲骨文中已經有了規和矩兩个字，相傳古代

圖 2 这是敦煌漢簡的乘法表一部分，按原簡的照片臨摹。

还有伏羲手执規女媧手执矩的圖画，从这象形字和圖画上可以約略見到古代的規和矩的形狀，这說明繪制几何圖形的工具在中國出現是很早的。殷代和周代所遺留下來的青銅器，一般都有复雜美观的花紋，而且大都精密嚴整，合乎規矩，說明早在殷、周的时代，我國劳动人民已經掌握了不少关於几何圖形的知識。

在「墨子」（註6）一書中，对圓和方的認識更進了一步。墨子說明了圓和方都是从应用規和矩得來的，又从理論上对圓和方下了定义，說圓（圓球）是一个从中心到球面的所有半徑都相等的，方（立方）是四周都是直角的立体。他还提出了球積和球徑之比为常数的說法。他在力学和光学上的發現，顯然也是和数学有关的。墨子所提出的圓的定义，比希臘欧几里得「几何原本」

圖 3 山东沂南漢墓內石柱上的造象，是伏羲手执規和女媧手执矩的想像圖。

(註7）还要早一百多年。

工藝是生產斗爭知識的具体表現，生產斗爭离不开自然科学知識，当然也离不开数学。春秋时代齐國有一本書叫「考工記」，是專門記錄工藝的書，这本書里面对各种不同的角度都有了專門名詞，例如90°叫「矩」，45°叫「宣」，135°叫「磬折」，这說明除直角以外，对鈍角和銳角也有了認識。「考工記」里面关於建筑、水利和農業工具的敘述已經能用角度來說明。这本書里面还說到同心圓和圓內各种正多角形，也說到簡單的測量。

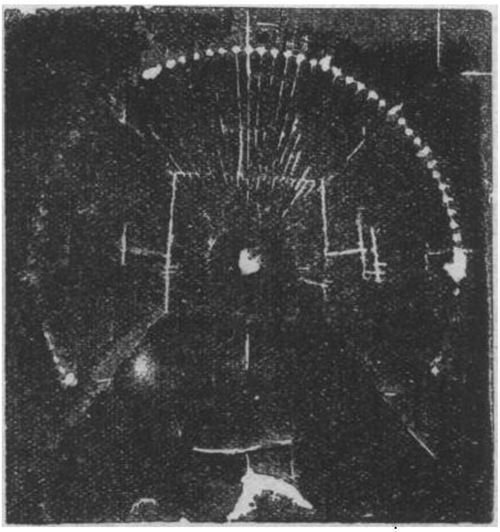

圖4 貴州出土的古代日晷，从所刻的数字看，大概是漢以前的。这日晷把圓周分为100等分，69等分用綫表示出來，分度綫很細，且每度都相等。

我國古代利用日晷來測时。从被保存下來的一个古代日晷來看，可知我國古代对圓的分度已有了初步的概念，古人对於日出日入的时間正是使用这种知識來計算的。

中國古代的算術和它的發展

我國古代的算術可以从「九章算術」一書中見到。約在公

來說，是不能想像的；欧洲在十七世紀还沿用着类似盈不足法的方法來求三角函数的近似値。

到了元代，作「授时厤」的郭守敬（公元 1231－1316 年）更推進一步，發明了三次招差術。郭守敬是当时中國有名的天文学家和水利專家，他所作的「授时厤」和他所監制的天文仪器都很精密。厤法（天文）和水利（力学）上的每一項成就都与数学有关，实际上郭守敬也是一位傑出的数学家。和他同时的朱世傑又把厤法計算中的招差術运用到高等級数計算上，从而發揚了級数論。

圖 9　郭守敬（1231—1316）。

在刘焯一千年以后，在郭守敬四百年以后，英國科学家牛

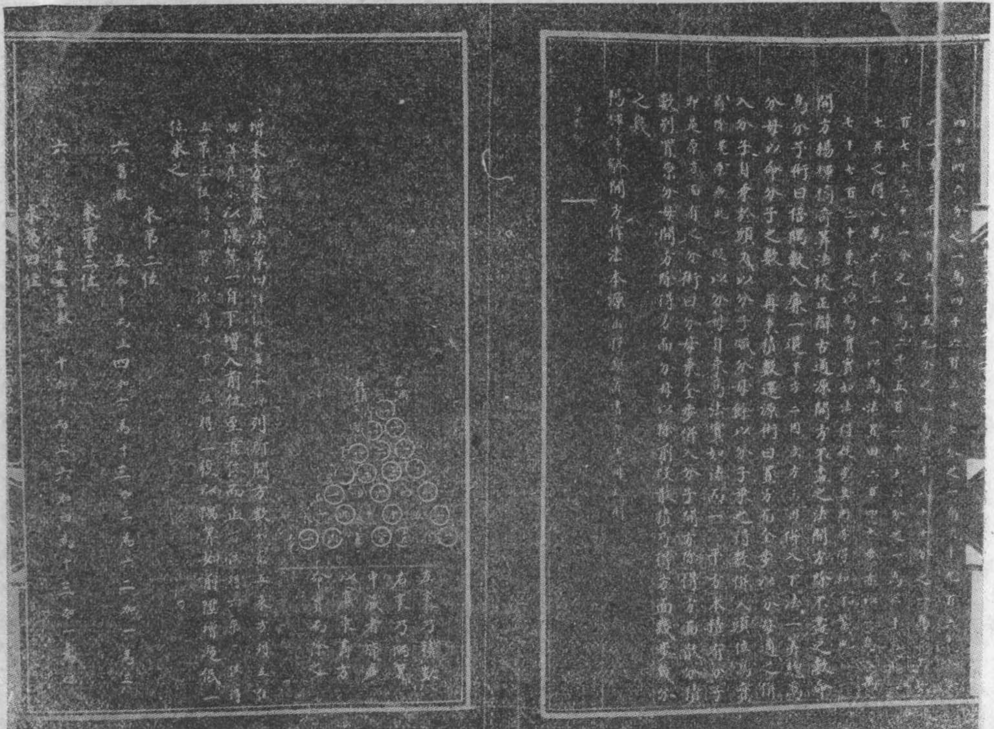

圖 11　賈憲的「开方作法本源圖」，这是「永乐大典」寫本的影羅本。

「四元玉鑑」內有一題叫「立方招兵」，就是利用招差術求立方数的和（$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots$）。欧洲一直到十七世紀才有人用招差数求立方数。

我國古代在代数学上的成就，無論在質上或量上都是值得称道的。

中國古代的几何学

「九章算術」里面所用的平面圖形和立体圖形的名称大都和農業、建筑和測量有关系，如三角形称「圭田」，平行四边形称「斜田」，梯形称「箕田」，立体圖形有「塿堢」、「陽馬」、「圓亭」、「方亭」、「委粟」、「圓囷」等。書中所載計算面積和体積的公式，大都和現在相同。

勾股定理的發現是我國在几何学上的一項重要成就（在發

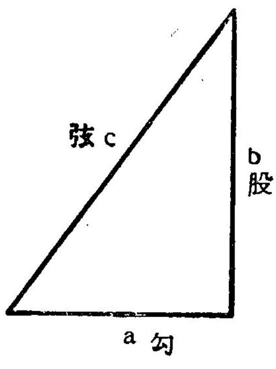

圖 13

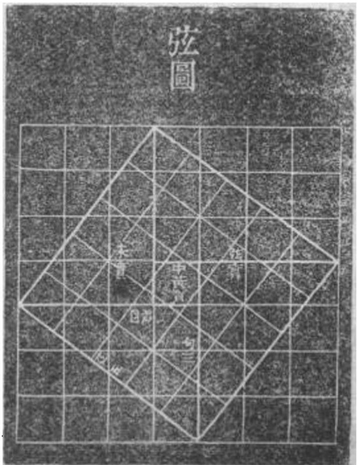

圖 14 趙爽的弦圖。

現这定理以前，可能是用方五斜七計算的，方五斜七也就是$\sqrt{2}$的近似計算）。「周髀算經」和「九章算術」都提出了这定理，这兩部書大約都是公元前一世紀的著作，这定理的發現应該在这兩部書成書之前。「九章算術」上說：「勾股各自乘，並而开方除之，即弦。」設a为勾，b为股，c为弦，即

$\sqrt{a^2+b^2}=c$，也就是$a^2+b^2=c^2$；註「九章算術」的刘徽和註「周髀算經」的趙爽，都在公元三世紀同时進一步証明了这定理。趙爽的弦圖是很有名的，他用$4\times\frac{1}{2}(ab)+(b-a)^2=c^2$（即4[朱实]+[中黃实]=[弦实]）証明了勾股定理（上式化簡后即得$a^2+b^2=c^2$）。他的証法用青朱黃圖形出入移补，类似現在所称的壘合法，后來宋元的「勾積演段」（以一个圖形分几个段）就是从这方法發展來的。

刘徽的割圓術，主要是利用勾股定理計算而得，他从圓內接正六边形起算，割到圓內

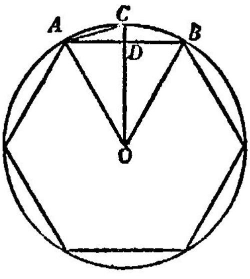

圖 15　刘徽用圓內容六边形起算求圓周率。

圖 16　祖冲之(429—500)。

（三）以加或减代乘或除，如

$$342 \times 56 = 342 \times \frac{112}{2}$$

112 用先隔加二次加一，当时称为「身外加二位」，又如

$$\frac{9731}{37} = \frac{9731}{\frac{111}{3}} = \frac{3 \times 9731}{111} = 263$$

用身外减十一法（用 3×9731 得数后退位减再退位减法）。

圖 17　程大位算法統宗师生問难圖。

关於速算的另一發明是除法口訣。一位除法的口訣，如以七除「見一下加三，見二下加六」等；二位除法口訣，如以八十三除「見一下十七，見二下三十四」等（現在叫「飛归」）。这些除法口訣在筹算中的应用，使筹固定了下來，便產生了珠算。

珠算大約發明在宋元之际，因为这計算器具簡便实用，便被廣泛採用而流傳下來了。現在的珠算还保留了一些古代筹算的遺制，例如 8056，筹制为「𝍰　⫰⊥」，算碼作「𝍰〇⫰⊥」，而珠

按原來应該是　$505 \times \frac{7}{19}$个閏年，

現在　$505 \times \frac{7}{19} - \frac{1}{19} = 186$，

把上式整理后，得

$$505 \times 7 - 186 \times 19 = 1.$$

因此这算法叫作「求一術」。北涼的元始曆（公元412年）以600年內有221个閏年，南北朝宋祖冲之的「大明曆」（公元463年）以391年內有144个閏年，其中

$$600 \times 7 - 221 \times 19 = 1$$

$$391 \times 7 - 144 \times 19 = 1$$

所以知道这兩种曆法的閏年計算方法也都是从「求一術」得來的。古代曆法中还有一种「調日法」，規定一月的天数不少於$29\frac{9}{17}$天和不多於$29\frac{26}{49}$天，这分母17和49称为日法，分子9和26称为朔余，測定的日法和朔余应該在$\frac{9}{17}$和$\frac{26}{29}$兩个数値之間，其中

$$17 \times 26 - 9 \times 49 = 1$$

也和「求一術」有关。

古代有一种「隔墻算」：手里面拿着的錢不知多少，三个一数得一个余数，五个一数得一个余数，七个一数又得一个余数，从所得的三个余数可以求出手里面的錢数。据宋代「志雅堂雜鈔」一書的記載，这算法的歌訣是：

三歲孩兒七十稀，五留廿一事尤奇，

七度上元重相会，寒食清明便可知。

上元即正月15日，从寒食到清明共105天，所以歌訣里面的「上元」和「寒食清明」暗指15和105兩个数字。歌訣的意思是用原数被3除所得的余数去乘70，用被5除所得的余数去乘21，用被7除所得的余数去乘15，再求出这三个乘積的和，如果所得的数比105小，那就是所求的原数，如果比105大，減去105的倍数以后，也可以得到所求的原数。这算法的來源是晉代的「孙子算經」，后世也叫作「韓信点兵」。


今有物不知其數三三數之賸二五五數之賸
三七七數之賸二問物幾何
荅曰二十三
術曰三三數之賸二置一百四十五五數
之賸三置六十三七七數之賸二置三十
并之得二百三十三以二百一十減之即
得凡三三數之賸一則置七十五五數之
賸一則置二十一七七數之賸一則置十
五一百六以上以一百五減之即得

圖7 「孙子算經」物不知数題原文。

如果原数用3、5、7去除所得余数都是1，按歌訣就有

$$\frac{70}{3}=23\text{余}1,\qquad 2\times(5\times7)-3\times23=1$$

$$\frac{21}{5}=4\text{余}1,\qquad 3\times7-5\times4=1$$