

高中数学开放性问题

—— 开放 · 分类 · 探究 · 迁移

GAOZHONG
SHUXUE
KAIFANGXING
WENTI

主编 / 吴长江

编著 / 李 英 魏新魁 任升录

高中数学拓展性研究性学习丛书
GAOZHONG SHUXUE
TUOZHANXING YANJIUXING
XUEXI CONGSHU

◆ 高考新题型及其解法

◆ 一个高分突破的方案

上海大学出版社

高中数学拓展性研究性学习丛书
上海市“研究型课程中的数学开放性问题及其教学”课题成果

高中数学开放性问题

——开放·分类·探究·迁移

主编 吴长江

编著 李 英 魏新魁 任升录

上海大学出版社

·上海·

图书在版编目(CIP)数据

高中数学开放性问题/李英,魏新魁,任升录编著. —上海:上海大学出版社,2002.4 (2002.9重印)

(高中数学拓展性研究性学习丛书·开放·分类·探究·迁移/吴长江主编)

ISBN 7-81058-450-2

I. 高... II. ①李...②魏...③任... III. 数学课-高中-教学参考资料 IV. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 012118 号

高中数学开放性问题——开放·分类·探究·迁移

- 主 编 吴长江
编 著 李 英 魏新魁 任升录
策 划 王悦生
责任编辑 王悦生 曾 卓
封面设计 王春杰
出版发行 上海大学出版社
上海市延长路 149 号 200072(邮编)
86-21-56331806(发行部) 86-21-56332131(编辑部)
经 销 新华书店上海发行所
印 刷 复旦大学印刷厂
开 本 890×1240 1/32
印 张 12.25
字 数 338 千
版 次 2002 年 4 月第 1 版 2002 年 9 月第 2 次印刷
定 价 18.00 元
-

本版图书如有印装错误,可向出版社随时调换。

内 容 提 要

本书是“高中数学拓展性研究性学习丛书”之一,构筑了一个提升学生解决数学开放性问题能力的方案.第1章全面介绍了数学开放性问题的有关概念、教育价值、教学实践以及数学开放性问题的编制方法.自第2章起,内容基本上与现行教材相匹配.以“问题”为基点,按不同类型全书汇编了200多个数学开放性问题;以“问题探究”为载体,介绍了不同类型数学开放性问题的解决策略及其解决过程;以“反思升华”为载体,进一步提升读者解决此类问题的能力.每章末,为读者提供了训练材料——“探究实践”以及相应的参考答案.

本书不仅适合于高一至高三各年级学生作参考书,尤其是高三学生,而且也适合于教师参考.

前 言

为提高整个中华民族的文化素质,中学教育必须进行重大改革已为世人共识.教育部在《基础教育课程改革纲要(试行)》中明确提出:“改变课程内容‘难、繁、偏、旧’和过于注重书本知识的现状,加强课程内容与学生生活以及现代社会和科技发展的联系,关注学生的学习兴趣和经验,精选终身学习必备的基础知识和技能.改变课程实施过于强调接受学习、死记硬背、机械训练的现状,倡导学生主动参与、乐于探究、勤于动手,培养学生处理信息的能力、获取新知识的能力、分析和解决问题的能力以及交流与合作的能力.”同时,教育部还倡导推行研究性学习,并在《普通高中‘研究性学习’实施指南(试行)》中将目标定位于:(学生)获得亲自参与研究探索的积极体验;提高发现问题和解决问题的能力;学会分享与合作;培养科学态度和科学道德;培养对社会的责任心和使命感;激活各科学学习中的知识储存,尝试相关知识的综合运用.上海市则在推行研究性学习的同时,积极倡导拓展性学习.我们认为,拓展性学习是研究性学习的先导,研究性学习是拓展性学习的更高形式.因而,如何开展拓展性研究性学习,成为中学教育界共同关注的问题.作为一个尝试,我们编写了“高中数学拓展性研究性学习丛书”.

《高中数学开放性问题》便是“高中数学拓展性研究性学习丛书”之一.数学开放性问题广义地说是相对于数学封闭性问题而言的.以往的中学数学教学是以封闭性问题为主导、以收敛性思维训练为特征的,单纯的封闭性问题的教学不利于学生创新能力的培养和实践能力的养成.而数学开放性问题的教学以发散性思维训练为其主要特征(详细参见第1章1.2节),并以其独特的开放化和个性化,以及有利于学生创新能力的培养和实践能力的养成而成为教学改革的一个亮点,其内容也逐渐渗透进教材和高考,相关的理论正逐渐形成.然而一个严峻的

现实是,理论研究与教学实践仍是脱节的.如何将理论成果转化为广大教师的实践,仍有巨大的反差.基于此,我们编写了本书.本书具有以下鲜明特点:

1. 本书构筑了一个提升学生解决数学开放性问题的能力方案,其内容具有明显的开放性、分类性、探究性和迁移性.开放性——问题本身是开放的,解决的过程是开放的,策略的使用也是开放的;分类性——问题结合中学数学的特点,将师生使用的实用性放到重要地位,分门别类地将中学数学开放性问题的类型、演变的趋势清晰地再现.探究性——强调问题解决的探索层次、发展层次、思维方式与数学方法的螺旋式递进;迁移性——问题解决的复制是低层次的,但作为中学数学追求的重要目标之一的类比、构造、猜想、转化、多角度的迁移却正是本书所力求达到的.因而,开放·分类·探究·迁移成为本书的基本特征之一.

2. 本书第1章从理论到实践多角度、多层次地展现了作者的探索性工作及其成果.自第2章起,章节编排与现行教材同步,内容立足学生多层次的发展要求之上,既适合于初学者的理解,又适合于学生综合应用和亲身体验,更强调思维方式的养成.在不同的问题类型中,以“问题”为基点、“问题探究”为载体,用合情推理、模式化等手段,对问题进行开放式、全方位的探索,并以“反思升华”提升开放性问题解决能力,而“探究实践”则为学生提供了训练材料.因此,本书不仅适合于高一至高三各年级学生作拓展性学习用书,特别是高三学生,而且也适合于教师参考.

作为探索,书中尚有许多不足之处,我们真诚地希望得到广大读者以及教师同仁的意见或建议.

作 者

2002年元月20日

目 录

第 1 章 高中数学开放性问题概论	1
1.1 数学开放性问题研究综述	1
1.1.1 数学开放性问题的沿革	1
1.1.2 数学开放性问题的概念与分类	3
1.1.3 数学开放性问题的教育价值	4
1.1.4 数学开放性问题教学设计的原则	5
1.2 个性化的认识及教学尝试	6
1.2.1 对数学开放性问题的认识	6
1.2.2 在教学中使用数学开放性问题的尝试	8
1.3 数学开放性问题的编制	12
第 2 章 集合与命题	19
2.1 存在判断型	19
2.1.1 作为元素的集合	19
2.1.2 数字变奏曲	19
2.1.3 集合 A 的元素恰好不在集合 B 中	20
2.1.4 元素和相等的子集	21
2.1.5 构造真命题	22
2.1.6 与其子集元素个数一样多的集合	23
2.2 结论发散型	24
2.2.1 概念系	24
2.2.2 集合方程	25
2.2.3 约数集的个数	25

2.2.4 集合间的条件关系	26
2.2.5 集合的描述	27
2.3 归纳发现型	29
2.3.1 两圆的对称轴方程	29
2.3.2 斜边的范围	30
2.3.3 验算后的猜想	31
2.4 方法探究型	33
2.4.1 零值代入法	33
2.4.2 平面点集	35
2.4.3 相等的集合	36
2.5 信息迁移型	38
2.5.1 集合的差运算	38
2.5.2 集合的运算“ $\circ$ ”	39
本章探究实践	40
本章探究实践参考答案	42

第3章 不等式 46

3.1 反溯条件型	46
3.1.1 给定解集的不等式	46
3.1.2 符合条件的不等式	47
3.1.3 乘积的最值	48
3.1.4 不等式间的条件关系	49
3.2 归纳发现型	50
3.2.1 数字的奥秘	50
3.2.2 推广不等式	51
3.2.3 $\sin(\cos \alpha)$ 与 $\cos(\sin \alpha)$ 哪个大	52
3.3 模式应用型	55
3.3.1 函数模型	55
3.3.2 几何模型与分形	57
3.3.3 三角模型	59

3.3.4 数列模型	61
3.3.5 不等式模型	61
3.4 反思实践型	63
3.4.1 基本不等式求最值	63
3.4.2 函数值的范围	64
3.4.3 函数的值域	65
本章探究实践	67
本章探究实践参考答案	69
第4章 复数与向量	73
4.1 存在判断型	73
4.1.1 复数中的实数 a	73
4.1.2 虚数 z 是否存在	74
4.1.3 带有对数式的复数	75
4.1.4 复系数的一元二次方程	76
4.1.5 实系数的一元二次方程	77
4.2 反溯条件型	79
4.2.1 成为共轭复数的条件	79
4.2.2 向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 平行的条件	80
4.2.3 平面中的正三角形	80
4.2.4 实系数方程的根	81
4.2.5 三点共线的条件	82
4.3 结论发散型	84
4.3.1 复数方程表示的点集	84
4.3.2 探索 $z^n + \frac{1}{z^n}$ 的可能值	85
4.3.3 关于 ω 的代数式	86
4.3.4 复数 z 与单位圆	87
4.3.5 能否求出 z_1/z_2 的值	88
4.3.6 机器人问题	89

4.4 构造设计型	92
4.4.1 编写方程	92
4.4.2 编写方程组	92
4.4.3 构造复数不等式表示封闭区域	93
4.5 策略发散型	95
4.5.1 复数模的最大值	95
4.5.2 解复方程	97
4.5.3 $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2$ 的符号	98
4.5.4 如何求复数 $z_1 + z_2$ 的模	100
4.6 错解分析型	103
4.6.1 求函数最值错在哪里	103
4.6.2 哪个是最大值	104
4.7 信息迁移型	106
4.7.1 推断 $z + \frac{a}{z}$ 为实数的条件	106
4.7.2 模相等的复数	107
本章探究实践	109
本章探究实践参考答案	110

第5章 函数 114

5.1 反溯条件型	114
5.1.1 成为同一函数	114
5.1.2 函数的反函数	115
5.1.3 是什么函数	116
5.1.4 缺什么补什么	117
5.1.5 不完整的命题	118
5.2 探索结论型	120
5.2.1 一道看不明白的题目	120
5.2.2 写函数解析式	121
5.2.3 符合增减性的 p 值	122

5.2.4 弦长的射影	124
5.2.5 推断解析式	125
5.3 知识巩固型	126
5.3.1 奇偶函数的性质	126
5.3.2 相关函数图象之间的关系	126
5.3.3 正弦与余弦	127
5.4 存在判断型	129
5.4.1 函数不等式能成立吗	129
5.4.2 图象的公共点	130
5.4.3 根为三角形内角的正弦值	131
5.4.4 多余条件	131
5.4.5 夹在两个函数之间的函数	132
5.5 建模分析型	134
5.5.1 汽车能行驶多远	134
5.5.2 限定区域的驾驶问题	135
5.5.3 如何进货	136
5.6 信息迁移型	139
5.6.1 斜率属于集合 K 的函数	139
5.6.2 均值为 C 的函数	140
5.6.3 k 阶格点函数	140
5.6.4 迭代函数值为双元素集合的函数	141
5.6.5 优惠率的确定	141
5.7 解答评价型	143
5.7.1 常量与变量混淆	143
5.7.2 错在哪里	144
5.7.3 对解题过程的反思	146
本章探究实践	149
本章探究实践参考答案	151

第6章 空间图形..... 154

6.1 信息迁移型 154

6.1.1 向量的混合积 154

6.1.2 两平面所成角的新定义 155

6.1.3 点到面的距离 158

6.1.4 多面体的“直度” 162

6.1.5 异面直线距离 164

6.2 方案设计与筛选型 166

6.2.1 农户粮仓设计 166

6.2.2 规则方式打包 167

6.2.3 罐内液体的估计 168

6.2.4 景观工程 169

6.2.5 山腰居民取水 171

6.3 结论发散型 173

6.3.1 长方体对角线定理 173

6.3.2 四面体体积 175

6.3.3 正四棱锥中的角 177

6.3.4 侧棱两两垂直的三棱锥 180

6.3.5 面面垂直的演变 181

6.4 策略开放型 183

6.4.1 必胜选择 183

6.4.2 确定求体积的策略 184

6.4.3 平行六面体中的方法 186

6.4.4 三角目标的最小值 191

6.5 类比推广型 193

6.5.1 四面体的重心 193

6.5.2 正四面体中的距离 194

6.5.3 空间勾股定理 195

6.5.4 到两定点距离之差最大 196

6.5.5 类似的结论	197
6.6 判断探究型	199
6.6.1 四面体的截面	199
6.6.2 点运动的位置	200
6.6.3 四个角都是直角	202
6.6.4 θ 角的确定	203
6.6.5 能否成为正方形	204
6.7 反溯条件型	207
6.7.1 一组填空题	207
6.7.2 求救的信号	209
6.7.3 高考问题的改变	211
6.7.4 正三棱柱中的垂直	213
6.7.5 棱锥体积最大	215
6.8 存在判断型	217
6.8.1 动点的位置是否存在	217
6.8.2 分体积相等	218
6.8.3 动点的轨迹	219
6.8.4 120° 的二面角	221
6.8.5 构造长方体	222
本章探究实践	223
本章探究实践参考答案	226

第7章 曲线与方程

7.1 反溯条件型	231
7.1.1 过定点的定直线	231
7.1.2 平移的曲线	232
7.1.3 已知切线的圆	233
7.1.4 顶点的条件	234
7.2 存在判断型	237
7.2.1 过定点的直线与线段相交	237

7.2.2	直线与双曲线的交点	238
7.2.3	三角形面积的最值	241
7.2.4	有公共焦点的曲线	242
7.3	结论发散型	245
7.3.1	只有一个交点的圆和抛物线	245
7.3.2	直角三角形的顶点	246
7.3.3	不同坐标系下的方程	247
7.3.4	方程的不同曲线	250
7.4	信息迁移型	253
7.4.1	点集的运算	253
7.4.2	函数的最值	254
	本章探究实践	256
	本章探究实践参考答案	257

第8章 数列

8.1	信息迁移型	261
8.1.1	递推数列	261
8.1.2	发散数列的收敛子数列	262
8.1.3	有界数列的收敛子数列	263
8.2	举例说明型	265
8.2.1	$S_n = a \cdot n^2 + b \cdot n + c$ 型的非等差数列	265
8.2.2	极限相等的数列	265
8.2.3	极限大于0的数列	266
8.3	构造设计型	268
8.3.1	递推数列的实际背景	268
8.3.2	再找一个已知模型的应用	268
8.3.3	等差数列前 n 项和的模型设计	269
8.4	发现规律型	271
8.4.1	式子的规律	271
8.4.2	寻找堆放规律	272

8.4.3 写数列的通项公式	272
8.4.4 数列中是否出现了 5 的倍数	273
8.5 归纳总结型	275
8.5.1 通项与前 n 项和	275
8.5.2 评价不同的证明方法	276
8.5.3 等差数列的和与项	277
8.5.4 等比数列和的极限	278
8.5.5 增长无限、高度有限	280
8.6 问题探究型	283
8.6.1 公差由你确定	283
8.6.2 等差数列前两项形成的等比数列	284
8.6.3 是否为数列中的项	285
本章探究实践	286
本章探究实践参考答案	287

第 9 章 排列、组合、概率统计初步与决策

9.1 信息迁移型	289
9.1.1 再生数	289
9.1.2 排列数	290
9.1.3 秘书打信	291
9.1.4 环状排列	292
9.1.5 不尽相异元素的全排列	292
9.2 结论发散型	294
9.2.1 车站问题	294
9.2.2 确定正整数	294
9.2.3 能做几个图形	295
9.2.4 扑克牌游戏	296
9.2.5 戴错帽子	297
9.2.6 组合恒等式	297
9.3 存在判断型	299

9.3.1 相邻三项构成等比数列	299
9.3.2 展开式是否同时含有常数项	299
9.3.3 总统与发言人	300
9.4 方案设计	302
9.4.1 花圃栽种植物	302
9.4.2 投资方案决策	303
9.4.3 世界杯足球赛	304
本章探究实践	305
本章探究实践参考答案	306

第 10 章 综合实践 309

10.1 信息迁移型	309
10.1.1 极限的“双夹”定理	309
10.1.2 数列发生器	311
10.1.3 运算封闭性	313
10.1.4 替代函数	313
10.1.5 潮汐问题	314
10.1.6 函数的不动点	316
10.2 方案设计型	319
10.2.1 开发区的道路网	319
10.2.2 防洪抢险	320
10.2.3 不合实际的方案	321
10.2.4 飞播种草	322
10.2.5 蔬菜上残留的农药	324
10.3 观察归纳推广型	326
10.3.1 不等命题的推广	326
10.3.2 二阶等差数列	327
10.3.3 焦点弦的条数	328
10.3.4 等比数列的 S_{n+m}	329
10.3.5 糖水水中的不等式	330

10.4 反溯条件型	332
10.4.1 写错的 $\sin(\alpha + \beta)$	332
10.4.2 计算装置	333
10.4.3 单调的二次函数	334
10.4.4 三棱锥中的二面角	335
10.4.5 n^2 个实数的方阵	336
10.5 判断探究型	338
10.5.1 集合中的命题	338
10.5.2 最小自然数	339
10.5.3 十字路口立交桥	341
10.5.4 恒小于后面的项	342
10.5.5 动点轨迹恰为圆	344
10.6 存在判断型	347
10.6.1 交集上的点	347
10.6.2 多项式中的系数	348
10.6.3 坐标平面上的变换	350
10.6.4 最小的整数	352
10.6.5 a 存在吗	353
10.7 综合型	356
10.7.1 新不等式的特征	356
10.7.2 组合数的性质	357
10.7.3 恰为固定的值域	359
10.7.4 摸彩的方案	360
10.7.5 滑棒在抛物面内停留在何处	361
本章探究实践	364
本章探究实践参考答案	368