线性系统理论

姚立强　徐松源　史　震　编

哈尔滨船舶工程学院出版社

线性系统理论

姚立强　徐松源　史　震　编

哈尔滨船舶工程学院出版社

(黑)新登字第 9 号

线性系统理论

姚立强　徐松源　史震　编

•

哈尔滨船舶工程学院出版社出版

新华书店首都发行所发行

绥棱县印刷厂印刷

•

开本 787×1092 1/16　印张 19.625　字数 453 千字

1992年 10 月　第 1 版　1992年 10 月　第 1 次印刷

印数：1—3000册

ISBN　7-81007-217-X/TP·12

定价：5.05元

前 言

线性系统理论一直是自动控制领域中最主要研究的对象之一。它也是学习其它控制理论如最佳控制理论、随机控制理论和多变量控制理论的基础。自动控制原理主要是研究单变量系统的。而本书是以多变量系统为主。随着生产和科学技术的发展，自动化的规模越来越大，对多变量系统理论的需求也必然会逐步增长。

本书是从状态空间描述开始，介绍了多变量线性系统的标准型、结构分解、最小实现、状态反馈和观测器。另外还介绍了传递函数矩阵描述、矩阵分式描述和输入输出反馈等的基本原理。这不仅从时间域，而且也从频率域角度说明分析和设计线性系统的基本概念、原理和方法，从而为进一步学习多变量系统理论打下必要的基础。

在编写时，力图适合自动控制专业高年级学生的基础，且尽可能写得通俗易懂，没有引进过多的数学术语。在附录中，还补充阅读本书所必需的数学知识和适合于上机运算的源程序。

参加本书编写的有徐松源副教授（第一章～第四章），姚立强副教授（第五章、第七章、附录二和附录三），史震讲师（第六章、附录一、附录四～八及习题）。全书由姚立强和徐松源统稿。本书由国防大学李乃奎教授主审。他在审稿过程中提出很多宝贵意见。在此表示衷心感谢。

由于我们水平和经验不足，可能存在不少错误和不妥之处，竭诚欢迎读者批评指正。

编 者

1992年1月

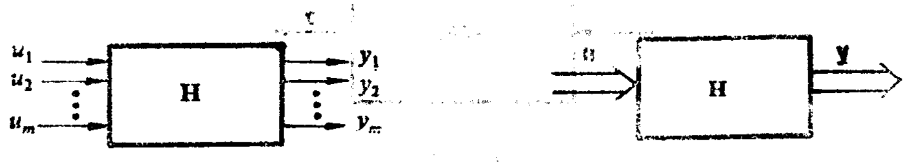
目　　录

第一章 系统的数学描述

§1-1 引 言

工程中的系统，是由一些具有特定功能的组件，为了完成预定的目标，相互联结在一起而成的整体。

一个系统在受到外界信号$\boldsymbol{u}$作用后，系统中的某些量，如$\boldsymbol{y}$，便会按照一定的规律运动。这时$\boldsymbol{y}$和$\boldsymbol{u}$的关系，可以用图1-1表示。



(a) (b)

图 1-1

它们在数学形式上，可写成

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{H}\boldsymbol{u} \tag{1-1-1}$$

式中

$$\boldsymbol{u}=[u_1\ \ u_2\cdots u_m]^T;$$

$$\boldsymbol{y}=[y_1\ \ y_2\cdots y_q]^T。$$

式中，上标T表示转置；$\boldsymbol{H}$是算子或函数关系，由系统的具体组成决定。

如果系统在没有外界信号作用之前处于静止状态，而在受到输入信号 u_1 和 u_2 或$\alpha_1 u_1$和$\alpha_2 u_2$作用时，其中α_1、α_2为任意实数，则有

$$\boldsymbol{H}(\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2)=\alpha_1\boldsymbol{H}u_1+\alpha_2\boldsymbol{H}u_2 \tag{1-1-2}$$

那么，该系统就是线性系统，否则便为非线性系统。它的物理意义是：当系统受到几个信号同时作用的结果，为各个信号单独作用的结果之和，凡是具有这样性质的系统，称作线性系统。严格而言，实际系统都是非线性系统。幸而大多数系统在具体应用时，于工作点附近往往可以近似地看作线性系统，所以，对线性系统的深入研究仍然是很有意义的。

经典控制理论的对象是单变量系统，即单输入单输出系统。现代控制理论的对象主要是多变量系统，即多输入多输出系统。经典控制理论主要是以传递函数为基础进行研究。将它扩展到多变量系统，就是传递矩阵。数学上要用到多项式矩阵理论。研究多变量系统的另一种方法，是用状态空间法。本书由于篇幅所限，主要介绍用状态空间法研

究线性系统时的概念、方法和结果。重点在多变量系统。

控制系统的研究，首先要从对系统进行数学描述开始，所以，本章先介绍线性系统的数学描述。

§ 1-2 线性系统的输入和输出关系

一般线性系统如图1-1所示。我们要求了解系统在输入量u作用下，输出量y是怎样随时间变化的，这就要求建立输入和输出的关系。

根据叠加原理，即关系式（1-1-2），可知多个输入量作用的结果，为各个输入量作用的结果之和。我们先分析单个输入和输出之间的关系，然后再推得多个输入和输出之间的关系。

设有一个输入信号$u(t)$作用在线性系统H上，如图1-2。

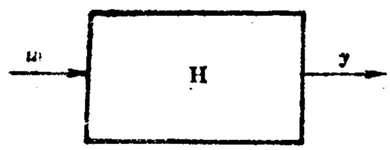


图 1-2

$u(t)$ 为一个任意随时间变化的函数，其波形见图1-3(a)。试求输出量y随时间变化的规律。

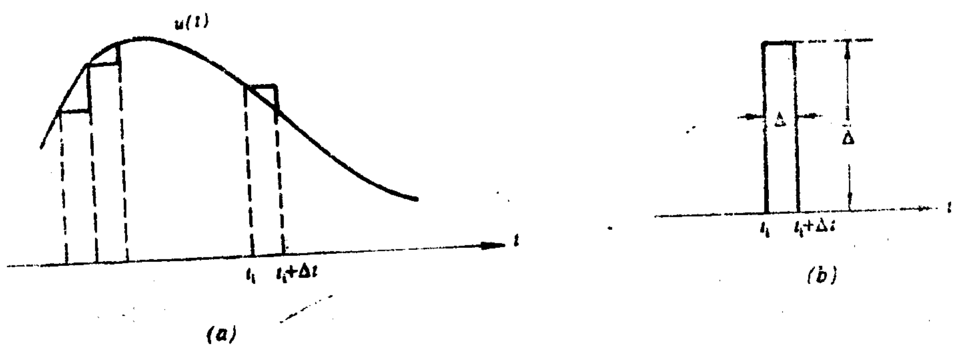


图 1-3

一个任意时间函数$u(t)$，可以被近似地看成由很多个脉冲函数之和组成。这里所定义的脉冲函数见图1-3（b），它的数学表达式是

$$\delta_\Delta(t-t_i)=\begin{cases}0 & t<t_i\\ \dfrac{1}{\Delta} & t_i\leqslant t<t_i+\Delta\\ 0 & t\geqslant t_i+\Delta\end{cases} \tag{1-2-1}$$

注意到，对任何Δ值，$\delta_\Delta(t-t_i)$的面积为1，于是当Δ趋向零时，函数 $\delta_\Delta(t-t_i)$ 的极限是

$$\lim_{\Delta\to 0}\delta_\Delta(t-t_i)\triangleq\delta(t-t_i) \tag{1-2-2}$$

这种函数称作脉冲函数，也称狄拉克函数，或简称δ－函数。

δ－函数有两个重要的性质。一是对任意正数ε，有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_i)dt=\int_{t_i-\varepsilon}^{t_i+\varepsilon}\delta(t-t_i)dt=1 \tag{1-2-3}$$

这说明δ－函数的面积为1。另一是，若函数$f(t)$在t_i处连续，那么

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t-t_i)dt=f(t_i) \tag{1-2-4}$$

这样一来，任意输入函数 $u(t)$，就可以用一系列脉冲函数之和来近似，见图 1-3 (a)，而每一个脉冲函数，就能表示成

$$u(t_i)\delta_\Delta(t-t_i)\Delta \tag{1-2-5}$$

于是整个输入函数$u(t)$，便为

$$u(t)=\sum_{i=-n}^{n}u(t_i)\delta_\Delta(t-t_i)\Delta \tag{1-2-6}$$

式中n据实际输入函数所经历的时间而定。一般可使$n\to\infty$。

系统所对应的输出量，应该是

$$y(t)=Hu(t)=H\sum_{i=-n}^{n}u(t_i)\delta_\Delta(t-t_i)\Delta \tag{1-2-7}$$

因为H是线性算子，满足叠加原理，于是（1-2-7）式也能写成

$$y(t)=\sum_{i=-n}^{n}[H\delta_\Delta(t-t_i)]u(t_i)\Delta \tag{1-2-8}$$

当Δ趋于零时，和式可以用积分代替，而得

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}H\delta(t-\tau)u(\tau)d\tau \tag{1-2-9}$$

式中，τ是系统受到信号的时间，t是输出量观察的时间。例如系统的初始条件为零，在时间τ受到强度为1的δ函数作用时，由（1-2-9）式得到输出量随时间变化的规律是

$$y(t)=H\delta(t-\tau) \tag{1-2-10}$$

将此称作线性系统H的脉冲响应。一般用$g(t,\ \tau)$表示，即

$$g(t,\ \tau)\triangleq H\delta(t-\tau) \tag{1-2-11}$$

于是（1-2-9）式就可以写成

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}g(t,\ \tau)u(\tau)d\tau \tag{1-2-12}$$

由此可见：只要系统的初始条件为零，便可以根据（1-2-12）式计算系统H对任意输入信号$u(t)$的响应$y(t)$。

若系统受到m个输入量

$$u(t)=[u_1(t)\ \ u_2(t)\cdots u_m(t)]^T \tag{1-2-13}$$

需要考察q个输出量

$$y(t)=[y_1(t)\ \ y_2(t)\cdots y_q(t)]^T \tag{1-2-14}$$

同样可以求得

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}G(t,\ \tau)u(\tau)d\tau \tag{1-2-15}$$

上式和（1-2-12）式的差别，除了$u(\tau)$是由（1-2-13）式表示的矢量外，$G(t,\ \tau)$为由下式表示的矩阵

$$G(t,\ \tau)=\begin{pmatrix} g_{11}(t,\ \tau) & g_{12}(t,\ \tau) & \cdots & g_{1m}(t,\ \tau) \\ g_{21}(t,\ \tau) & g_{22}(t,\ \tau) & \cdots & g_{2m}(t,\ \tau) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{q1}(t,\ \tau) & g_{q2}(t,\ \tau) & \cdots & g_{qm}(t,\ \tau) \end{pmatrix} \tag{1-2-16}$$

式中，$g_{ij}(t,\ \tau)$ 表示 在线性系统H的第j个输入端，于时间τ加脉冲函数，在第i个输出端于时刻t观察到的响应，所以，将$q\times m$维矩阵 $G(t,\ \tau)$ 称作系统的脉冲响应矩阵。

在实际物理系统中，系统在时间 t 的响应，仅和时刻 t 及 t 之前的输入有关，而和t之后的输入是无关的。这种规律称作因果律，这样（1-2-15）式便为

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}G(t,\ \tau)u(\tau)d\tau \tag{1-2-17}$$

信号 $u(t)$ 总在某一个确定时间 t_0 加到系统上去的，如果系统的初始条件为零， 那么（1-2-17）式又能写成

$$y(t)=\int_{\tau_0}^{t}G(t,\ \tau)u(\tau)d\tau \tag{1-2-18}$$

另外，工程上很大一部分系统，在时刻t_0受到信号后的响应，和时刻$t_0+\tau$受到信号后的响应几乎是相同的，仅在时间轴上位移一段时间τ而已，见图1-4。

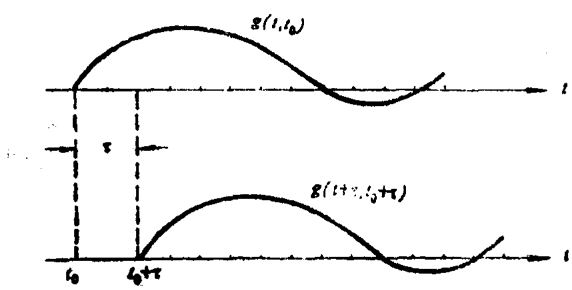


图 1-4

在数学上，这是将脉冲响应函数$g(t,\ t_0)$ 中两个变量都减去t_0后，其值不变，即

$$g(t,\ t_0)=g(t-t_0,\ t_0-t_0)=g(t-t_0) \tag{1-2-19}$$

具有这种性质的系统称作时不变系统。反之，系统响应和外界信号作用时间有关的系统，称作时变系统。对时不变系统而言，（1-2-18）式应写成

$$y(t)=\int_{t_0}^{t}G(t-\tau)u(\tau)d\tau \tag{1-2-20}$$

在具体应用时，为了方便，可以将加信号的时间t_0，看作时间轴的零点，即$t_0=0$，那么

$$y(t)=\int_0^t G(t-\tau)u(\tau)d\tau \tag{1-2-21}$$

从上面推导就得到一般线性系统的输入和输出间的关系。说明在系统组成后，可以按照它的各部分功能，依据相应物理定理，就能得到系统的脉冲响应矩阵$G(t,\ \tau)$，于是，在外界信号$u(t)$已知时，便可由（1-2-18）式，获得系统的运动规律。

在时不变情况下，还可以利用拉氏变换，得到更为简单的运算关系。如对(1-2-21)式两边应用拉氏变换，有

$$Y(s)=\int_0^\infty y(t)e^{-st}dt=\int_0^\infty\int_0^t G(t-\tau)u(\tau)d\tau\cdot e^{-st}dt$$

考虑到，$\tau>t$时，$G(t-\tau)=0$，所以

$$\begin{aligned}Y(s)&=\int_0^\infty\int_0^\infty G(t-\tau)e^{-s(t-\tau)}dt\cdot u(\tau)e^{-s\tau}d\tau\\&=G(s)\cdot u(s)\end{aligned} \tag{1-2-22}$$

式中，$G(s)$为$q\times m$维的有理分式矩阵。（1-2-22）式是线性时不变多变量系统，在频率域中表示的输入输出关系。

§ 1-3 线性系统的状态空间描述

在线性系统中，除了用传递矩阵描述系统的动态性能之外，还经常应用状态空间法描述系统的性能。它不仅形式简洁，且揭示了系统中由传递矩阵概念至今尚不能正确解释的一些现象，使人们对系统性能的认识进一步深化，从而提出了一些新的提高系统性能的方法。

什么是系统的状态？它是系统在初始工作时间t_0时的一种信息量。它和t_0时加入的输入量u一起，唯一地决定了系统在$t\geqslant t_0$后的行为。

对于线性系统，在数学上，它的行为是由线性微分方程描述的。若想了解系统的行为，便要解相应微分方程，这就要给出初始条件。n阶微分方程有n个初始条件，它和外界信号$u(t)$一起，才能求得微分方程的解，从而获得系统在$t\geqslant t_0$后的行为。

粗浅地说，系统状态变量的数目是和描述系统微分方程的阶数是一致的，即n阶系统有n个状态变量。

例 1-3-1 如图1-5所示的质量-弹簧-阻尼系统。当质量块m受到外力u的作用后，它的位移x随时间的变化规律由下面微分方程描述

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+f\frac{dx}{dt}+kx=u \tag{1-3-1}$$

式中，m是重块的质量；f是阻尼器的阻尼系数；k是弹簧的弹性系数。

若已知标称化后的系数值为$m=1$，$f=5$，$k=6$，那么有

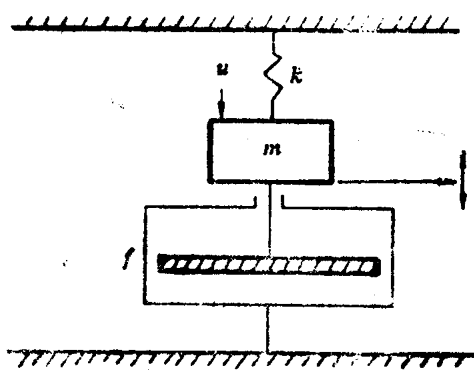


图 1-5

$$\frac{d^2x}{dt^2}+5\frac{dx}{dt}+6x=u \tag{1-3-2}$$

于是得系统的传递函数为

$$\frac{x(s)}{u(s)}=G(s)=\frac{1}{(s+2)(s+3)}=\frac{1}{s+2}-\frac{1}{s+3} \tag{1-3-3}$$

相应脉冲响应是

$$g(t)=e^{-2t}-e^{-3t} \tag{1-3-4}$$

如果系统的初始条件不为零，根据（1-2-17）式，有

$$\begin{aligned} x(t)&=\int_{-\infty}^{t}[e^{-2(t-\tau)}-e^{-3(t-\tau)}]u(\tau)d\tau \\ &=\int_{-\infty}^{t_0}[e^{-2(t-\tau)}-e^{-3(t-\tau)}]u(\tau)d\tau+\int_{t_0}^{t}[e^{-2(t-\tau)}-e^{-3(t-\tau)}]u(\tau)d\tau \end{aligned} \tag{1-3-5}$$

式中，t_0是外界作用力$u(t)$开始加到系统的时间，所以，（1-3-5）式右边第一项。表示在$u(t)$作用前，系统在$t=t_0$时所处的运动情况，这就形成系统的初始条件，并记作$x(t_0)$，即

$$\begin{aligned} x(t_0)&=e^{-2t}\int_{-\infty}^{t_0}e^{2\tau}u(\tau)\,d\tau-e^{-3t}\int_{-\infty}^{t_0}e^{3\tau}u(\tau)d\tau \\ &=e^{-2t}C_1-e^{-3t}C_2 \end{aligned} \tag{1-3-6}$$

（1-3-2）式描述的系统是二阶系统，所以应该有两个状态变量，也就是说，表示初始状态的信息有两个。显然，（1-3-6）式是表示系统初始位置的信息。关于初始速度的信息，可以由（1-3-5）式对t求导，然后用$t=t_0$代入求得，即

$$\dot{x}(t)=-2e^{-2t}C_1+3e^{-3t}C_2+g(t-\tau)u(\tau)\Big|_{\tau=t}+\int_{t_0}^{t}\frac{\partial}{\partial t}g(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

于是，速度的初始值是

$$\dot{x}(t_0)=-2e^{-2t_0}C_1+3e^{-3t_0}C_2 \tag{1-3-7}$$

据（1-3-6）和（1-3-7）两式，解得

$$C_1=e^{2t_0}[3x(t_0)+\dot{x}(t_0)] \tag{1-3-8}$$

$$C_2=e^{3t_0}[2x(t_0)+\dot{x}(t_0)] \tag{1-3-9}$$

在（1-3-6）式中，考虑了（1-3-8）和（1-3-9）式后，再代入（1-3-5）式，便得到系统的位移表达式

$$\begin{aligned} x(t)=&e^{-2(t-t_0)}[3x(t_0)+\dot{x}(t_0)]-e^{-3(t-t_0)}[2x(t_0)+\dot{x}(t_0)] \\ &+\int_{t_0}^{t}g(t-\tau)u(\tau)d\tau \end{aligned} \tag{1-3-10}$$

由上式可见，只要给定系统的初始值$x(t_0)$和$\dot{x}(t_0)$以及t_0之后的外作用 $u(t)$，便可以完全决定系统在t_0之后的行为。由（1-3-8）和（1-3-9）式看到，初始条件 $x(t_0)$，

$\dot{x}(t_0)$和积分常数C_1、C_2所含的信息是等价的。

为了建立系统的状态方程，只要将描述系统的n阶微分方程，改为由n个一阶微分方程组来表达就可以了。如例1-3-1系统的动态方程（1-3-1）式，可以由两个一阶方程组描述。该系统有两个状态变量，一个是位移x，另一是速度$\dot{x}$。若令$x=x_1$；$\dot{x}=x_2$，那么，（1-3-1）式便可以写成

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2\\ \dot{x}_2 = -\dfrac{k}{m}x_1 - \dfrac{f}{m}x_2 + u\\ y = x_1\end{cases} \tag{1-3-11}$$

式中，y表示系统的输出量。上式用矩阵形式，为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{f}{m}\end{pmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}u\\ y = [1\quad 0]\boldsymbol{x}\end{cases} \tag{1-3-12}$$

式中，状态变量$\boldsymbol{x}=[x_1\quad x_2]^T$。上式也可写成

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u\\ y = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}\end{cases} \tag{1-3-13}$$

在一般情况下，当系统的阶数是n，输入量有m个，输出量为q个，那时，系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{U}\\ \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}(t)\boldsymbol{U}\end{cases} \tag{1-3-14}$$

式中，$\boldsymbol{A}(t)$：$n\times n$；$\boldsymbol{B}(t)$：$n\times m$；$\boldsymbol{C}(t)$：$q\times n$；$\boldsymbol{D}(t)$：$q\times m$。由于$\boldsymbol{A}(t)$、$\boldsymbol{B}(t)$、$\boldsymbol{C}(t)$和$\boldsymbol{D}(t)$等都是时间t的函数，所以，系统（1-3-14）是线性时变系统的n维状态空间表达式。

实际上大多数系统为时不变系统时，矩阵$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$和$\boldsymbol{D}$都可以表示成不随时间变化的常值阵，即

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{U}\\ \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{U}\end{cases} \tag{1-3-15}$$

上式便为n维线性时不变系统的状态空间表达式。

当系统的传递矩阵为严格正则时，$\boldsymbol{D}=0$。即

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{U}\\ \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}\end{cases} \tag{1-3-16}$$

§ 1-4　传递函数矩阵的获得

上面两节介绍了表示系统动态性能的两种数学描述的形式，即用传递函数矩阵描述或用状态空间描述。接下来应该介绍他们之间的转换关系。已知传递函数矩阵求状态方

程，又称实现问题，由于它牵涉到可控、可观的概念，所以留到第四章再单独介绍。本节主要讨论已知系统的状态空间表达式或系统结构图，求系统的传递函数矩阵。

一、由系统的状态空间表达式求传递矩阵

已知线性时不变系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases}\dot{x} = Ax + BU \\ Y = Cx + DU\end{cases} \tag{1-4-1}$$

式中，A：$n\times n$；B：$n\times m$；C：$q\times n$；D：$q\times m$。

当系统的初始条件$x(0)=0$时，而输出量$Y(s)$和输入量$U(s)$的关系是

$$Y(s)=\Phi(s)U(s)$$

求传递矩阵$\Phi(s)$。

对（1-4-1）式两边分别进行拉氏变换，有

$$sX(s)-X(0)=AX(s)+BU(s) \tag{1-4-2}$$

$$Y(s)=CX(s)+DU(s) \tag{1-4-3}$$

因为$X(0)=0$，所以得

$$(sI-A)X(s)=BU(s)$$

或

$$X(s)=(sI-A)^{-1}BU(s) \tag{1-4-4}$$

将（1-4-4）式代入（1-4-3）式后，得

$$Y(s)=\{C(sI-A)^{-1}B+D\}U(s)=\Phi(s)U(s)$$

可得系统的传递矩阵为

$$\Phi(s)=C(sI-A)^{-1}B+D \tag{1-4-5}$$

例 1-4-1 已知系统的状态空间表达式是

$$\begin{cases}\dot{x}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}u \\ y=[1\quad 0\quad 0]x\end{cases}$$

且$x(0)=0$，求系统的传递矩阵$\Phi(s)$？

解

$$(sI-A)^{-1}=\frac{\operatorname{adj}(sI-A)}{\det(sI-A)}=\begin{pmatrix}s & -1 & 0\\ 0 & s+1 & 1\\ 0 & 0 & s+3\end{pmatrix}^{-1}$$

式中 $\det(sI-A)=s(s+1)(s+3)$

$$\operatorname{adj}(sI-A)=\begin{pmatrix}(s+1)(s+3) & s+3 & -1\\ 0 & s(s+3) & -s\\ 0 & 0 & s(s+1)\end{pmatrix}$$

所以

$$\Phi(s)=\frac{[1\ 0\ 0]\begin{pmatrix}(s+1)(s+3) & s+3 & -1\\ 0 & s(s+3) & -s\\ 0 & 0 & s(s+1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}}{s(s+1)(s+3)}$$

$$= \frac{s+2}{s(s+1)(s+3)}$$

例 1-4-2 已知系统的状态空间表达式是

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{U} \\ \boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \end{cases}$$

且$\boldsymbol{x}(0)=0$，求$\boldsymbol{\Phi}(s)=?$

解

$$(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1} = \begin{pmatrix} s & -1 \\ 0 & s+2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix}}{s(s+2)}$$

所以

$$\boldsymbol{\Phi}(s) = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}{s(s+2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+2)} \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{pmatrix}$$

二、由系统结构图求传递矩阵

工程上往往先给出系统的结构图，这时，就可以直接从结构图求系统的传递矩阵。若系统的结构图如图1-6所示。

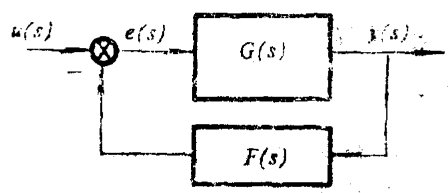


图 1-6

已知 $\boldsymbol{U}(s)$：$m\times1$；$\boldsymbol{Y}(s)$：$m\times1$；$\boldsymbol{G}(s)$：$m\times m$；$\boldsymbol{F}(s)$：$m\times m$。求 $\boldsymbol{Y}(s)$和$\boldsymbol{U}(s)$的关系。

由图1-6，可知

$$\boldsymbol{Y}(s)=\boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{E}(s)$$

而 $$\boldsymbol{E}(s)=\boldsymbol{U}(s)-\boldsymbol{F}(s)\boldsymbol{Y}(s)$$

有 $$[\boldsymbol{I}+\boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{F}(s)]\boldsymbol{Y}(s)=\boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{U}(s)$$

当$m\times m$矩阵$[\boldsymbol{I}+\boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{F}(s)]$的逆存在时，可推得闭环系统的传递矩阵

$$\boldsymbol{Y}(s)=[\boldsymbol{I}+\boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{F}(s)]^{-1}\boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{U}(s) = \boldsymbol{\Phi}(s)\boldsymbol{U}(s)$$

即 $$\boldsymbol{\Phi}(s)=[\boldsymbol{I}+\boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{F}(s)]^{-1}\boldsymbol{G}(s) \tag{1-4-6}$$

式中，$m\times m$矩阵$[\boldsymbol{I}+\boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{F}(s)]$一般称作回归差矩阵。

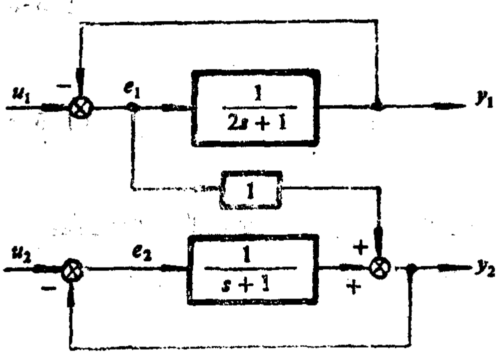


图 1-7

例 1-4-3 系统的结构图如图1-7所示。求系统的闭环传递矩阵。

解 由图可知开环系统的传递矩阵是

$$G(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{2s+1} & 0\\ 1 & \dfrac{1}{s+1}\end{bmatrix}$$

据（1-4-6）式，有

$$\Phi(s)=\left\{I+\begin{bmatrix}\dfrac{1}{2s+1} & 0\\ 1 & \dfrac{1}{s+1}\end{bmatrix}\right\}^{-1}\begin{bmatrix}\dfrac{1}{2s+1} & 0\\ 1 & \dfrac{1}{s+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{2(s+1)} & 0\\ \dfrac{s+0.5}{s+2} & \dfrac{1}{s+2}\end{bmatrix}$$

§ 1-5 状态方程的解

写出系统的数学方程之后，便要研究系统的性质。其中，很重要的问题之一，就是讨论系统在外界信号作用下，将会有什么样的响应。在数学上，就是求状态方程的解。

若系统的状态空间表达式为

$$\dot{x}=A(t)x+B(t)U \tag{1-5-1}$$

$$Y=C(t)x \tag{1-5-2}$$

当控制作用$u(t)$已知，且状态变量的初始值为$x(t_0)=x_0$时，研究系统的状态变量$x(t)$和输出量$Y(t)$随时间的变化规律。

在数学上，这是要解线性微分方程的问题。按照微分方程理论，应先求它的齐次解。

一、齐次方程解

（一）线性时变系统

系统的状态方程

$$\dot{x}=A(t)x \tag{1-5-3}$$

已知初始条件为

$$x(t_0)=x_0 \tag{1-5-4}$$

求解状态变量$x(t)$随时间变化的规律。

从物理意义来说，这就是系统在初始状态激励下，求各状态变量的运动过程。

不失一般性，可以认为n个初始状态是由n个单位矢量组成，即

$$\begin{cases}x_1(t_0)=e_1=[1\ \ 0\cdots0]^T\quad x_2(t_0)=e_2=[0\ \ 1\ \ 0\cdots0]^T\cdots\\ x_n(t_0)=e_n=[0\cdots0\ \ 1]^T\end{cases} \tag{1-5-5}$$