初值问题的差分方法

R. D. 里奇特迈尔

科学出版社

初值問題的差分方法

R. D. 里奇特迈尔 著

何旭初　徐家福　包雪松 译

科学出版社

1966

R. D. RICHTMYER
DIFFERENCE METHODS FOR
INITIAL-VALUE PROBLEMS
INTERSCIENCE PUBLISHERS, INC.
1957

內 容 简 介

本书专论求解偏微分方程的初值问题的差分方法，其中不仅讨论了理论问题，而且也讨论了大量具有重要实际意义的具体问题，如热传导方程、波动方程、空气动力学方程、迁移方程，等等.

全书共十章前五章为理论部分后五章为应用部分. 全书理论联系实际较好.

初值问题的差分方法

R.D. 里奇特迈尔 著
何旭初 徐家福 包雪松 译

*

科 学 出 版 社 出 版
北京朝阳門内大街 137 号
北京市书刊出版业营业許可証出字第 061 号
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1966年 4月第 一 版 开本：850×1168 1/32
1966年 4月第一次印刷 印张：7
印数：0001—3,250 字数：176,000

统一书号：13031·2272
本社书号：3443·13—1
定价：［科六］1.10 元

中 譯 本 序

如所熟知，偏微分方程的初值问题的差分方法的研究具有较大的理论意义与实际意义。自从 1928 年 Courant, Friedrichs, Lewy 三人合著的“论数学物理中的偏微分方程”一文发表后，三十多年来，特别是，在电子数字计算机出现以后，各国学者在这方面业已进行了大量的工作。Richtmyer 所著“初值问题的差分方法”一书在一定意义下可以看成是 1957 年以前这方面工作的总结，不愧为一本杰出的专著。此外，本书还有下列特点。

1. 本书是以美国的 Los Alamos 从 1945 年到 1957 年间在电子数字计算机上所进行的大量实际工作为基础，根据 von Neumann, Lax, Richtmyer 等人的思想而写成的。全书共十章，前五章为理论部分，后五章为应用部分。书中的理论与实际是结合得比较好的。

2. 本书主题鲜明，选材精练，理论严谨，行文通畅，是一本研究偏微分方程差分方法的重要文献，同时又可作为大学计算数学专业的专课教材，译者曾以本书为主要內容在南京大学计算数学专业作了尝试，通过三年多的实践，已经取得了一定的效果。

南京大学彭清泉同志对本书译文提供了不少有益的意见，译者在此谨致谢意。本书译文主要根据英文原著，同时亦参考俄文译本，虽经一再修改，但由于译者学识浅薄，谬误之处难免，谨请读者指正。

何旭初、徐家福、包雪松

于南京大学数学系

1964 年 2 月

原　序

十分明显，现代计算机的出现理应导致数值方法领域内的某种类型的革命．目前，数值计算被应用于多种领域中，而十五年以前在这些领域中从未听到过数值计算．虽然电子计算机完成的运算，基本上和手算所能完成的运算相同，但是，电子计算机的速度和容量使许多过程容易实现了，而这些过程在手算中是完全不可能实现的．早在 1928 年由 Courant, Friedrichs 和 Lewy 三人合著的著名文章中已经讨论了求解偏微分方程的有限差分方法，但是，只是在约十五年以后，由于战时迅速发展起来的技术的激励，并借助于初期的自动计算机，才把上述方法应用于实际问题中．例如，在 Los Alamos，某些依赖于时间的(非恆定的)液流的计算在研究室的战时工作中曾经起过重要的作用，这些计算化费了大量的时间与精力，都是在那时所能有的分析机(穿孔卡片机)上进行的．紧在大战结束后，Los Alamos 本部的工作人员已在 Aberdeen 的 ENIAC 上对若干更为复杂的，其中包含若干联立偏微分方程的问题进行求数值解．随后，在美国各地的各种机器上又求解了一些与流体动力学、中子扩散、中子迁移、辐射流动以及热核反应等等有关的问题．

然而，数值方法中所预期的革命却来得相当缓慢．出现了一些新概念，但是很多基本方法和已沿用多年的旧方法在本质上并没有什么不同．高斯 (Gauss) 消去法(这一种形式或另一种形式)仍然是解联立线性方程组的最好的方法之一，龙格-库塔 (Runge-Kutta) 方法仍然是解常微分方程的最好的方法之一．看来，古典数值分析中的这样一些基本方法在一定时期内仍将继续是常用的方法，并且可能与未来的方法相结合，而不是被未来的方法所代替．然而，仅从组合的见地就很明显，快速和大容量的计算机本来

就能以无数的方法完成各种工作，这些方法甚至现在还未想到，而对于那些可以用现有方法处理以及不能用现有方法处理的各种问题，还可能有更多强有力的方法等待我们去发现. 目前采用的方法中的大部分方法都是由一些针对手算以及较小问题而设计的方法简单地拼凑而成的. 的确，我们在利用计算机所特有的能力这一点上还距离很远哩！

数值分析中到目前为止变化最多的一部分可能就是用差分方法来解偏微分方程(特别是，那些描述非恆定物理现象的方程)了，而差分方法正是本书的主要课题. 在实际问题中所遇到的方程往往都是非常复杂的. 它们一般都具有变系数，或者甚至是非线性的；常常会遇到包含不同类型的(比方说，双曲型方程和抛物型方程)复合方程组；常常有若干个空间变量；并且也常常会遇到积分-微分方程. 关于求解这些问题的新的算法正在迅速地发展中.

在自动计算机上用的数值方法的发展在一个重要方面是和以前供手算用的数值方法的发展不同. 由于问题的复杂性和新算法的迅速积累，以及由于电子计算机上的工作人员一般还不是古典数值分析基础方面的专家，因而和古典的发展比较起来，新的发展就更多地以经验及直观为其基础，而较少地以数学为其基础. 但是，我们却不应该由于这一点就否定新的发展，因为如果我们要去等待对新方法得出收敛性的证明以及误差估计，那末，目前在工业与技术中所用的多数计算机便都要被迫停机了. 随着问题的日益复杂化，要求得误差估计以及收敛性证明也就变得更为困难. 这种新发展的一个结果是：在数学研究者和实际利用数学方法的工作人员(例如，物理工作者)之间存在有一定的距离. 我确信，我们所期望的革命只有在数学研究者与实际工作者的共同合作下才能实现. 为了缩短这两者之间的距离，我们必须规劝数学研究者在接受经验直观途径方面更灵活一点，同时我们也必须规劝实际工作者更加重视对于他们所用的方法的眞正基础的了解.

1953 年秋，Leslie Peck 博士和本书作者在访问纽约大学数学科学研究所时，按照 Courant 教授的请求，组织了一个讨论班，

专门讨论数值分析中对数学研究者和计算机工作者共同感兴趣的那些部分. 研究所的很多成员以及客人们都参加了这一工作，其中包括 John Curtiss, Joel Franklin, Wallace Givens, Eugene Isaacson, Fritz John, Peter Lax 以及 Milton Rose. 随后，在纽约大学又组织了一些有关课题的讨论班与课程，增加了一些新的人员参加,包括研究所中大部分研究人员以及原子能委员会计算处(它是该研究所的一部分)的成员,并且还包括少数一些较长时期的访问者,特别是 John Todd, Olga Todd 以及 George Forsythe.

本书包括过去十二年在 Los Alamos 以及其它一些地方关于数值分析某些课题积累的部分成果，同时由于前述讨论班及课程中讨论的结果而作了若干修正和说明. 本书理论部分的思想主要属于 John von Neumann 及 Peter Lax,而在一定程度上也包含了作者本人的思想. 但是显然,如果有人按照另一途径进行研究,那末,他们的贡献一定也是很显著的.本书作者在结合理论与实践方面作了尝试，因此,虽然数值方法领域中的革命正如过去一样，为时尚早,但是可以确信: 我们正沿着“现代计算机要做些什么以及如何理解计算机上所得出的结果”的方向稳步前进.

本书所述数值例子摘自纽约大学计算所的研究成果，这些工作是原子能委员会为发展和改进机器计算的数值方法而进行的.

作者感谢他的许多同事们（他们之中大多数的名字都要在本书中的这一处或那一处出现）对本书大部分內容所提供的有益的讨论，特别是感谢 Sherman Lowell，他在百忙之中仔细校阅了本书的全部手稿;感谢 Miriam Weissblum, Florence Carter 以及 Constance Engle，他们把不清楚的手稿打印成明了易读的打印稿；感谢 Natascha Artin，他对本书全文进行了修辞和编辑上的审阅;以及感谢 Joan Lunoe 和 Carl Bass，他们为本书作了精美的插图. 作者对研究所的很多成员，特别是 Courant 教授和 Bers 教授所给予的鼓励与支持表示衷心的谢意.

R. D. Richtmyer

纽约大学

俄譯版序

求解数学物理中初值问题(原文为边值问题——中译者注)的差分方法在苏联以及在国外早已引起数学工作者们的注意．在研讨与应用这些方法方面，苏联学者们的一些著作，例如 А. Н. Крылов 的“近似计算讲义”，Л. В. Канторович 及 В. И. Крылов 的“高等分析中的近似方法”等书以及 Л. А. Люстерник，Ш. Е. Микеладзе，И. Г. Петровский，С. Л. Соболев，А. Н. Тихонов 等人的论文都曾经起了不小的作用．晚近以来，由于新技术领域的发展以及快速计算机的出现，这些方法发展得特别迅速．出版了大量的全部或部分讨论差分方法的专著及论文．在这一方面的著作可述如下：О. А. Ладыженская 的“双曲型方程的复合问题”，В. С. Рябенький 及 А. Ф. Финиппов 的“差分方程的稳定性”，И. С. Березин 及 Н. П. Жидков 的“计算方法”等书以及国外学者们的一系列著作．

在美国不久以前出版的 Richtmyer 的书在差分方法的浩翰的文献中却占有独特的地位，其译本亦同样引起了读者的注意．该书中除了在极简单的假定下陈述差分方法的稳定性与收敛性理论外，还考察了这些方法在更为一般情形中的应用．书中所考虑的初值问题都具有重大的实际意义，并且和数学物理中各种不同的领域有关．这些领域就是：弦振动和杆振动问题、声学问题、气体动力学问题、热传导和扩散问题以及迁移(中子及光子)问题．差分方法主要是就具有简单边界条件及常系数的线性问题的例子来分析的．利用了所得的结果，同时以直观上的构思以及大量的计算实际为基础，作者随后就得出了关于在变系数方程及拟线性方程的情形中应用某些差分格式，以及稳定性和收敛性判定法的可能性的定论．

在 Richtmyer 一书中未曾援引苏联数学工作者在差分方法方面的大量著作．为了弥补这一缺陷，建议读者参阅“苏联数学四十年”一书第一、二卷中的有关部分，以及 И. М. Гельфанд, О. А. Ладыженская 及 О. А. Олейник 等人近年来发表在“数学科学的成就”杂志上的一些综合性的论文．

末了，译者对编辑 Г. М. Ильичев 在编辑本书译文中所进行的大量工作表示深切的谢意．

Б. М. Будак, А. Д. Горбунов

目　　录

第一部分　通　论

第一章　引　言

1. 初值問題

本书中所讨论的问题是连续介质物理学的各个分支（例如热传导、扩散、流体力学、声学、电磁学、波动力学、辐射迁移、中子迁移、弹性振动等）中产生的初值问题. 我们不假定存在恆定状态，从而我们就要引向一个偏微分方程或积分-微分方程，其中一个称之为 t 的自变量，起着时间的作用. 这些方程都具有这样一种特性，即，如果所论物理系统在某一初始时刻 $t=t_0$ 的状态被任意指定，则当 $t \geqslant t_0$ 时，该问题的解存在，并且这个解是由所论方程及相应的边界条件或其它辅助条件唯一确定的.

本书的课题就是求这类问题的近似数値解的差分方法. 在第一部分中，利用线性算子理论对线性问题的差分方法进行一般的讨论，其目的是形成有关稳定性和收敛性的一些主要概念，对于具有常系数的纯初值问题还导出了某些有用的一般性结果. 第二部分包括在自动数字计算机上求解应用物理学的各个领域中的初值问题的一些通用的主要差分方法的描述. 我们尽可能以第一部分的理论资料及一些已发表的著述作为第二部分讨论的基础，但是，现有的数学理论通常总是不够的（由于问题的非线性以及变系数的关系），我们不得不求助于直观和实验验证相结合的方法.

2. 热传导問題

在本章中，一些主要的思想是通过考虑我们所熟知的一维线性热传导问题或扩散问题而引进的. 如果 x 表示在一根细长的被绝缘的杆中沿长度方向的坐标（在杆内热量是可以流动的），或者

x 表示和一块大板的面相垂直的方向的坐标，而这块板的每一个面都带有均匀温度，如果 $u = u(x, t)$ 表示在位置 x 与时间 t 的温度，则温度便应满足微分方程

$$a \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} K \frac{\partial u}{\partial x}, \tag{1.1}$$

其中 $a = a(x)$ 或 $a(x, t)$ 是所考虑的物质在单位容积內的热容量，而 $K = K(x)$ 或 $K(x, t)$ 是导热系数.

这个方程是线性的. 可是，如果由 a 及 K 所表示的物质特性除了和 x 有关以及可能也和 t 有关外，它们还和温度 u 有关，则上述方程便是非线性的了. 其次，在本章中，我们仅限于讨论均匀系统的情形，因而 a 和 K 都是常数，并且我们假定 $K/a = \sigma > 0$.

对上述微分方程我们应当补充它在 $x = 0$ 及 $x = L$（它们表示杆的端点或板的边界面）处的边界条件. 例如，如果杆的端点和某一个巨大的热源接触，则在 $x = 0$ 处，温度便固定为 $u = u_0$，如果端点是绝缘的话，则在 $x = 0$ 处，$\partial u/\partial x = 0$.

一般说来，所考虑的问题含有一个或几个偏微分方程或积分-微分方程以及相应的边界条件和初始条件，但也可以有內边界条件，例如，在上述问题中，如果 $K = K(x)$ 在某一界面上具有简单的间断性，则热传导定律便要求在穿过该界面时，u 和 $K\partial u/\partial x$ 都是连续的[1]. 同样地，在可压缩流体的流动中的冲击间断处，在冲击前沿，微分方程便要换成 Rankine-Hugoniot 间断条件（参见第十章）.

我们不仔细地讨论解的存在性和唯一性问题，这些问题是重要的，但是比较困难. 相反地，我们所考虑的问题大部分一开始就假定是这样提出的，使得根据物理上的合理假设（例如，系数与初始数据的逐段可微性等等）就可以保证解的存在性与唯一性.

在逐步求数值解的过程中，我们要遇到下面一些问题，即：差分方程组的构成，差分方程组的解法，它们的稳定性以及它们的精

1) 如果 $x = x_0$ 是 $K(x)$ 的一个间断面，则当 $x = x_0$ 时，热传导方程便换成结合条件 $u_{x_0-0} = u_{x_0+0}$，$[K\partial u/\partial x]_{x_0-0} = [K\partial u/\partial x]_{x_0+0}$——俄译者注.

确度．在本章以下几节中，我们将针对前面提到过的简单的热传导问题来讨论上述各问题，并且在其中还要作如下进一步的简化：假定我们这样选取长度单位，以使 $L=\pi$，并设边界条件为：在每一端点处都有 $u=0$，而初始函数 $\varphi(x)$ 具有合适的光滑性．初值问题是

$$\frac{\partial}{\partial t}u=\sigma\frac{\partial^2}{\partial x^2}u \quad \begin{cases}\sigma=\text{常数}>0,\\ 0\leqslant x\leqslant\pi,\\ t\geqslant 0,\end{cases} \tag{1.2}$$

其中 $u=u(x,t)$，

$$u(x,0)=\varphi(x)(\text{已给的})\ 0\leqslant x\leqslant\pi, \tag{1.3}$$

$$u(0,t)=0,\ u(\pi,t)=0,\ t\geqslant 0\ \text{时}. \tag{1.4}$$

作为例证，我们可以设想一块拉平的带电的平板夹在某些通常的平板之间，而假定底层平板的底面和顶层平板的顶面都永远保持室温，在适当选取温度刻度时，可取室温为 $u=0$．如果在放了一段相当长的时间（指足以建立热传导的稳定状态所需的时间）后，突然将上述带电平板拿开，则上述初值问题的初始温度便是

$$\varphi(x)=\begin{cases}Cx, & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2},\\ C(\pi-x), & \dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi.\end{cases} \tag{1.5}$$

x 现在是铅直坐标，而 C 为常数．这一函数以及在随后时间的典型温度分布函数 $u(x,t)$，其几何表示便是图 1 中的那些实线．

为了和差分方程计算的结果相比较，我们注意到，用熟知的傅氏方法可以得出这个初值问题的准确解．这个解可以写成一个正弦级数，或者，若规定：当 $-\pi\leqslant x\leqslant 0$ 时，$\varphi(x)$ 为 $-\varphi(-x)$，则该准确解便可以写成复指数级数

$$u(x,t)=\sum_{-\infty}^{\infty}{}_{(m)}A_m e^{imx-m^2\sigma t}, \tag{1.6}$$

其中

$$A_m=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)e^{-imx}dx. \tag{1.7}$$

即使级数(1.6)仅在 $t>0$ 时收敛,有时也把它看作是所述初值问题的广义解,但是在本章中,我们假定,关于 $\varphi(x)$ 的傅氏级数是收敛的,而事实上也是绝对收敛的.

关于由(1.5)所给出的初始数据,对所论的带电平板问题而言,我们有

$$A_m=\begin{cases}0, & \text{当 } m \text{ 为偶数时},\\ \dfrac{2iC}{\pi m^2}(-1)^{\frac{m+1}{2}}, & \text{当 } m \text{ 为奇数时}.\end{cases} \tag{1.8}$$

3. 差分方程

显然傅氏级数方法仅能用于受颇多限制的一类问题. 实际上我们所以能够成功地应用傅氏级数方法,至少在上述形式下有赖于微分方程是线性的,其系数均为常数,边界条件相当于反射条件以及周期性条件等这些特性,而这对于我们将要讨论的其它一些偏微分方程以及含有更多个因变量及自变量的问题也都是正确的. 另一方面,差分方法却决不受这种限制,虽然我们将要给出的关于稳定性及收敛性的分析只在这些限制下才严格有效.

令 Δx 及 Δt 分别是变量 x 及 t 的改变量,这里 $\Delta x=\pi/J$, J 是一个整数. 在 x,t 平面上由 $x=j\Delta x$, $t=n\Delta t$ ($j=0,1,2,\cdots,J;n=0,1,2,\cdots$)给出的点集称为一个**格网**,其步长分别为 Δx 及 Δt. 把 Δx 及 Δt 都看成小的改变量,实际上在以后我们所讨论的极限过程中它们都趋于零. 把 $u(j\Delta x,n\Delta t)$ 的近似值记作 u_j^n. 逼近微分方程(1.2)的一个最简单的差分方程是

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}=\sigma\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

$$(j=1,2,\cdots,J-1;\ n=0,1,\cdots). \tag{1.9}$$

边界条件应理解为

$$u_0^n=0,\ u_J^n=0,\ n=0,1,\cdots, \tag{1.10}$$

而初始条件为

$$u_j^0=\varphi(j\Delta x),\ j=0,1,\cdots,J. \tag{1.11}$$