数学奥林匹克

主编 单墫

初中版

初一分册

北京大学出版社

数学奥林匹克

（初中版）

初一分册

单 墫 主编

北京大学出版社

新登字（京）159号

数学奥林匹克(初中版)

初一分册

单 墫 主编

责任编辑：王明舟

*

北京大学出版社出版

(北京大学校内)

国防科工委印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

787×1092毫米 32开本 8.625印张 200千字

1991年 6月第一版 1992年 3月第三次印刷

印数：81,001—18,1000册

ISBN 7-301-01513-5/G·83

定价：4.50元

序

哪位少年没有凌云壮志？哪位家长不曾望子成龙？

要将理想化为现实，必须打好基础，循序渐进。

好的读物正是通往理想的桥梁。

北京大学出版社热心青少年的智力开发，出版了数学奥林匹克系列图书。这一套初中版，是为初中年级写的，它有以下特点：

1. **趣**。书中图文并茂，文字生动活泼，饶有趣味；图画更有助于增强数学的直觉，提高学习兴趣。

2. **浅**。内容少而精。每讲侧重一两个方法，不过深、过多、过难，坚持“宁肯少些，但要好些”的方针，并且配合教材，易教易学。

3. **多练习**。“学数学的最好方法就是做数学”，书中有大量练习，所学的知识可以得到消化、巩固。练习均有答案，对于学生自学或家长辅导均极方便。

初一分册由曹鸿德先生等人编写；

初二分册由魏有德先生等人编写；

初三分册由熊斌先生等人编写。

胡大同先生审阅了初稿并做了修改、润色工作。参加本套图书编写工作的同志都是富有经验的教育家，对数学奥林匹克，尤有精湛的研究。我们希望这一套精心设计的读物，将会成为广大少年儿童的良师益友，教师和家长的得力助手。

单　墫

1991年3月

目　录

第一讲　数值计算的技巧

数学竞赛中的计算题，通常都是一些计算与推理两兼的技巧题。外形上，有时数值很大，有时项数很多，有时次数很高，有时运算方式很复杂；结构上，却大多有某种规律。因此，数值计算不只依据运算律和恒等变形的公式，更重要的是要运用机智，而机智来自细心的观察和大胆的探索。

1．倒写相加

例1　求和$1+2+3+4+\cdots+100$。

分析　这个题的巧妙解答是被誉为“数学王子”——德国数学家高斯(1777—1855)幼年时代的杰作。你能找到一种巧妙的算法吗？

观察和式，做这一长串加法的困难在于各数互不相等，但不等中包含相等——首末两端之和与和首末两端等距离的两项之和相等。观察到这个规律，就有下面的算法。

解　记 $S=1+2+3+\cdots+100$，则

$$S=100+99+98+\cdots+1.$$

两式相加得：

$$2S=(1+100)+(2+99)+(3+98)+\cdots+(99+2)+(100+1),$$

即

$$2S=\underbrace{101+101+\cdots101}_{100个101}=101\times100.$$

所以 $$S=\frac{101\times 100}{2}=5050,$$

即 $$1+2+3+\cdots+100=5050.$$

例2 计算

$$1+4+7+10+13+16+19+22+25.$$

解 记 $S=1+4+7+10+13+16+19+22+25$，则

$$S=25+22+19+16+13+10+7+4+1.$$

相加得：

$$\begin{aligned}2S&=(1+25)+(4+22)+(7+19)+\cdots\\&\quad+(22+4)+(25+1)\\&=26\times 9,\end{aligned}$$

所以 $$S=\frac{26\times 9}{2}=117,$$

即

$$1+4+7+10+13+16+19+22+25=117.$$

两列形状不同的数的求和方法都是倒写相加，是不是具有相同的规律呢？

进一步观察发现：例1和例2中的每两个相邻数的差都相等，象这样的一列数，我们称之为**等差数列**。为得到等差数列的求和公式，让我们来熟悉有关名称和符号。

按一定次序排列的一列数叫**数列**，数列中的数称为**项**，第一个数叫**第一项**，又叫**首项**，第二个数叫**第二项**，…，最后一个数叫做这个数列的**末项**。

给出等差数列：$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{n-1},a_n$。我们知道从第二个数 a_2 开始，后项与前项的差都相等，用 d 表示这个差，

即

$$d=a_2-a_1=a_3-a_2=a_4-a_3=\cdots=a_n-a_{n-1},$$

其中字母 n 表示该数列的项数，d 表示该数列的**公差**。例 1 中，

$$n=100, d=1, a_1=1, a_{100}=100.$$

例 2 中，

$$n=9, d=4-1=3,\ a_1=1, a_9=25.$$

由于

$$a_2-a_1=d, a_3-a_2=d, \cdots, a_n-a_{n-1}=d,$$

所以，把这 $n-1$ 个式子相加得

$$a_n-a_1=(n-1)d,$$

故

$$a_n=a_1+(n-1)d. \tag{1}$$

仿照例题的求和方法，我们得到等差数列的求和公式：

$$a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n=\frac{(a_1+a_n)\times n}{2}. \tag{2}$$

今后看到一个具体的数相加，首先判断它是否是等差数列，如是可直接利用公式(2)求和。

公式(2)与我们学过的梯形面积公式 $\frac{1}{2}$(上底＋下底)×高在形式上十分相似，可作为我们记忆等差数列求和公式的方法。

例3 计算

① $5+9+13+\cdots+81$.

② $1+3+5+7+\cdots+1991$.

解 ① 这是一个等差数列求和问题。

$$a_1=5, a_n=81,\ d=9-5=4.$$

由公式(1) 得

$$81=5+(n-1)\cdot 4.$$

解之得 $$n=20.$$

再利用公式(2)得

$$5+9+13+\cdots+81=\frac{(5+81)\times 20}{2}=860.$$

② $a_1=1, a_n=1991$，$d=3-1=2$，所以

$$n=(a_n-a_1)\div d+1=(1991-1)\div 2+1=996.$$

由公式(2)得

$$1+3+5+\cdots+1991=\frac{(1+1991)\times 996}{2}=996^2=992016.$$

上面我们初步体会了等差数列的求和。随着学习的深入，将会看到更多的例子。

2. 错位相减法

例4 求 $S=1+2+2^2+2^4+\cdots+2^{1990}$。

分析 观察和式，不难发现：后面一个数是它前面一个数的 2 倍。为此，在和式两边都乘以一个常数 2 后再与原和式两边相减，这里相减是指错位相减，这样常常使差的值非常简单或者易于计算。

解 $$S=1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{1990}, \quad ①$$

$$2S=2+2^2+2^3+2^4+\cdots+2^{1991}. \quad ②$$

②－①得： $$S=2^{1991}-1.$$

即 $$1+2+2^2+\cdots+2^{1990}=2^{1991}-1.$$

例5 计算：

(1) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{2}}+\frac{1}{2^{3}}+\cdots+\frac{1}{2^{1990}}$。

(2) $1+\frac{3}{2}+\frac{5}{2^{2}}+\cdots+\frac{2\times1991+1}{2^{1991}}$。

解 (1) 设

$$S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{2}}+\frac{1}{2^{3}}+\cdots+\frac{1}{2^{1990}},$$

则
$$\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{2}}+\frac{1}{2^{3}}+\frac{1}{2^{4}}+\cdots+\frac{1}{2^{1991}}.$$

两式相减得：

$$\frac{1}{2}S=1-\frac{1}{2^{1991}},\qquad S=2-\frac{1}{2^{1990}}.$$

即
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{2}}+\cdots+\frac{1}{2^{1990}}=2-\frac{1}{2^{1990}}.$$

(2) 设

$$S=1+\frac{3}{2}+\frac{5}{2^{2}}+\cdots+\frac{2\times1991+1}{2^{1991}}, \tag{①}$$

则
$$2S=2+3+\frac{5}{2}+\frac{7}{2^{2}}+\cdots+\frac{2\times1991+1}{2^{1990}}. \tag{②}$$

②－①得：

$$S=2+2+\frac{2}{2}+\frac{2}{2^{2}}+\cdots+\frac{2}{2^{1990}}-\frac{2\times1991+1}{2^{1991}}$$

$$=2+2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{1990}}\right)-\frac{2\times 1991+1}{2^{1991}}$$

$$=2+2\left(2-\frac{1}{2^{1990}}\right)-\frac{3983}{2^{1991}}$$

$$=6-\frac{3987}{2^{1991}}.$$

3. 拆项相消

把数列的每一项拆成两项，在求和中，一般除首末两项或附近几项外，其余各项先后抵消，这种求和方法叫拆项法。

例6 计算

$$S=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{99\times 100}.$$

分析 直接通分，运算将非常复杂，注意到$\frac{1}{1\times 2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2\times 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$，$\frac{1}{3\times 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$，…，可对每一项拆成两项，有如下解法：

解 $$S=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{99\times 100}$$

$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$$

$$+\cdots+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)$$

$$=1-\frac{1}{100}=\frac{99}{100}.$$

例7 计算：

① $\frac{1}{1\times4}+\frac{1}{4\times7}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$.

② $\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{2\times4}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{4\times6}+\cdots+\frac{1}{n(n+2)}$.

解 ① 考虑一般项．$\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$拆成$\frac{1}{3n-2}$与$\frac{1}{3n+1}$的差，经验算相差系数$\frac{1}{3}$．从而有

$$\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right),$$

$$\frac{1}{1\times4}+\frac{1}{4\times7}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)$$

$$+\cdots+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{n}{3n+1}.$$

② 把$\frac{1}{n(n+2)}$先拆成$\frac{1}{n}$与$\frac{1}{n+2}$的差，再验算求出其系数

为$\frac{1}{2}$，从而

$$\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right).$$

$$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{2\times4}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{4\times6}+\cdots+\frac{1}{n(n+2)}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)$$

$$+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\cdots$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{3n^2+5n}{4n^2+12n+8}.$$

注　① 一般$\frac{1}{n(n+k)}$可拆成$\frac{1}{k}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}\right)$.

② $\frac{1}{(n-1)n(n+1)}$可拆项为$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(n-1)n}-\frac{1}{n(n+1)}\right]$.

例8　计算

$$S=1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+1990}.$$

解 考虑通项

$$\frac{1}{1+2+\cdots+n}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right),$$

故

$$S=\frac{2}{1\times2}+\frac{2}{2\times3}+\cdots+\frac{2}{1990\times1991}$$

$$=2\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{1990}-\frac{1}{1991}\right)\right]$$

$$=2\left(1-\frac{1}{1991}\right)$$

$$=\frac{3980}{1991}.$$

注 本题综合运用了等差数列求和公式和拆项的技巧。

例9 计算 $S=1\times2+2\times3+3\times4+\cdots n(n+1)$.

解 考察通项 $n(n+1)$ 如何拆项，才能使其相加大部分项抵消？仔细观察发现：

$$n(n+1)=\frac{1}{3}[n(n+1)(n+2)-(n-1)n(n+1)],$$

从而

$$S=\frac{1}{3}[(1\times2\times3)+(2\times3\times4-1\times2\times3)$$

$$+(3\times4\times5-2\times3\times4)+\cdots$$

$$+n(n+1)(n+2)-(n-1)n(n+1)]$$

$$=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$

例10 计算

$$\frac{1+2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{(1+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{5})}+\frac{\sqrt{5}+2\sqrt{7}+3}{(\sqrt{5}+\sqrt{7})(\sqrt{7}+3)}.$$

分析 直接通分或分母有理化，计算复杂有何巧妙解法？拆项？如何拆？

解 原式 $=\frac{(1+\sqrt{3})+(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{(1+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{5})}$

$$+\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{7})+(\sqrt{7}+3)}{(\sqrt{5}+\sqrt{7})(\sqrt{7}+3)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{7}+3}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}$$

$$=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{3-\sqrt{7}}{2}$$

$$+\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}$$

$$=1.$$

4. 公式的活用

我们应该熟记下列常用公式：

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2, \quad a^2 - b^2 = (a+b)(a-b),$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2),$$

$$a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3,$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca,$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab).$$

在具体计算中，特别要注意逆用、变用、连用公式。如

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2,$$

甚至要创造条件运用公式，如创造 $a+b+c=0$，从而有

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc.$$

例11 计算$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{9^2}\right)\left(1-\frac{1}{10^2}\right)$.

分析 对每个括号进行因式分解，连用公式，达到相约抵消。

解 原式$=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots$

$$\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1+\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{10}\right)\left(1+\frac{1}{10}\right)$$

$$=\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{10}\right)\right]$$

$$\times\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{10}\right)\right]$$

$$=\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{9}{10}\right]\left[\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{11}{10}\right]$$

$$=\frac{1}{10}\cdot\frac{11}{2}=\frac{11}{20}.$$

例12 计算$\sqrt{515^2-273^2-286^2}$.

分析 注意到平方及差的特点，利用平方差公式，然后分解质因数，提取公因式求值.

解 原式$=\sqrt{(515+273)(515-273)-286^2}$

$=\sqrt{2\times394\times2\times11^2-(2\times11\times13)^2}$

$=2\times11\sqrt{394-169}$

$=2\times11\times15=330$.

例13 计算

$(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)(2^{32}+1)$.

分析 式子有何特点？$2,2^2,2^4,2^8,2^{16},2^{32}$有什么规律？每一个数都是它前一个的平方。能否用完全平方公式？能否用平方差公式？如何运用？$2+1$前面如果有$2-1$，不是将发生连锁反应么?！$1=2-1$。原来如此！

解 原式$=(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)\cdots(2^{32}+1)$

$=(2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)\cdots(2^{32}+1)$

$=2^{64}-1$.

把上题改为 $3\cdot5\cdot17\cdot\cdots\cdot(2^{2^n}+1)$和

$(3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)(3^{32}+1)$,

你能仿照例13求解吗？

例14 计算 $\dfrac{9+\sqrt{10}+\sqrt{22}+\sqrt{55}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{11}}$.

解

$$\text{原式}=\frac{\frac{1}{2}(2+5+11+2\sqrt{2.5}+2\sqrt{2.11}+2\sqrt{5.11})}{\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{11}}$$