数与多項式

И. В. 勃罗斯庫列亞柯夫著

高等教育出版社

6218

数与多項式

И. В. 勃罗斯庫列亞柯夫著
吳 品 三 譯

高 等 教 育 出 版 社

本書系根据苏联教育科学院出版社（Издательство Академии Педагогических наук РСФСР）出版的勃罗斯庫列亞柯夫（И. В. Проскуряков）著"数与多項式"（Числа и Многочлены）1949年版譯出，可作为我國师范学院数学系初等数学复習及研究"数的概念"一科的教学参考書，也可供中学数学教师参考用。

本書共分八章，前兩章介紹集合、环、体的基本概念，后六章依次論述自然数、整数、有理数、实数、复数、多項式及代数分式。

本書由北京师范大学吳品三翻譯，蕙仰淑、程廷熙校訂。

数与多項式

И. В. 勃罗斯庫列亞柯夫著

吳品三譯

高等教育出版社出版

北京琉璃廠一七〇号

（北京市書刊出版業營業許可証出字第〇五四号）

北京市印刷一厂印刷　新華書店总經售

書号13010·95　開本 850×1168 1/32　印張 10 4/16　字數270,000

一九五六年六月北京第一版

一九五六年六月北京第一次印刷

印數 1—14,000　　定價（7）￥1,10

目　次

序

數和多項式，初看來，彼此是不同的，但是有很多共同之點。它們都定义有同样性質的加、減、乘、除的运算，並且都是近世代數基本概念之一环的特殊情形。因此，有可能在一种共同理論的範圍內來研究數和多項式。这样就可以清晰地看出它們各种性質的相互联系和意义，而且在建立各种數域和多項式時免得多次地、重復同样的論証。

本書目的在於嚴密地定义數、多項式和代數分式，並且論証它們在中学已經知道的性質，而不是要介紹給讀者一些新的性質。因此，讀者在这裏找不到一些更新的事实（或許实數和複數的某些性質是例外的），但是，他們將可能知道如何証明那些已經熟悉的东西，从"二乘二等於四"開始，直到多項式和代數分式的运算法則为止。

另一方面，讀者將对代數上起着重要作用的許多基本概念具有進一步的認識。

本書是为中学高年級數学教師寫的，但沒有談到教学法的問題，然而也可以把它介紹給師範学院和師範專科学校的学生，以及在中学高年級中对於數与多項式的理論有兴趣的学生。

在本書的前兩章引入了理解全書所必需的一般概念。其餘各章依次論述自然數、整數、有理數、实數、複數、多項式和代數分式。这些章次，在閱讀時是可以任意变動的，因为在这裏所証明的數的性質都是在中学已經熟知的。

在闡明新概念的一些例子中常常利用到某些數的性質，而这些性質要到以後才能証明，好在这些性質是讀者已經知道的。

在寫这本書時，我得到了 C. A. 雅諾夫斯卡婭、A. H. 柯模哥洛夫、

П. С. 阿歷克山大洛夫、А. Я. 欣欽以及 И. Р 沙發列維奇的許多宝貴的指示。

我对他們表示衷心的感謝。

И. 勃罗斯庫列亞柯夫 (Проскуряков)

1948 年 10 月 25 日於莫斯科。

第一章 集 合

§1. 集合的概念

數学的任何部門都不是研究在孤立狀态下的各个物体，而是在它們之間的联系中去研究它們。具有某种共同性質的物体，可联合在一个集体內，一塊地被研究。这样，在算術內並不研究單独的數3和5，而研究所有素數的集体，即具有这样共同性質的數的集体，除了本身和單位以外，被任何別的(自然)數都除不尽的。

所有自然數的全体，包括在更廣的整數集体內。擴張已得到的數域，我們進而得到有理數，实數，最後得到複數。在代數中也討論这样的一些集体，如多項式，代數分式。在幾何中，研究三角形的性質，不管它們在平面上的位置或者甚至不管它們的大小，得到一些对於所有全等的或者相似的三角形全都正確的定理，以及討論具有某种共同性質的點的集体(軌跡)等等。

創造这种集体的一般理論，是康脫兒(Георг Кантор, 1845—1918)的不朽貢献，这种理論叫做集合論，現在是所有數学的基礎。

这裏，我們僅限於介紹集合論的初步知識，如果希望更詳細地知道它，讀者可参看黑斯道夫的"集合論"，俄譯本的譯者为維金尼索夫，1937年國家科学技術出版局出版。

集合，这是被看作一个整体的物体的集体。这句話不应該当作是集合这个概念的定义來理解，因为"集体"这个字，不見得比"集合"这个字更好理解。集合这个概念，被採取作为基本概念，即不再用另外的概念來說明它。組成一已知集合的物体，称之为集合的元素。元素a和包含它的集合A之間的基本關係表为：$a \in A$(用話來表示：a是集合A的

元素，a 屬於 A，A 含有 a)。如果 a 不是集合 A 的元素，那麽就寫成 $a\bar{\in}A$ (用話來表示：a 不屬於 A，A 不含有 a)。集合可以用指出它的所有元素的办法來給出，而且应用括号來表示。例如，$\{a,b,c\}$表示含有三个元素的集合。類似的寫法也可以用來表示無窮集合，这時，未被寫出的元素用一些點來代替。当然，點的意义应該補充說明。例如，自然數的集合表成$\{1,2,3\cdots\}$；偶數的集合表成$\{2,4,6\cdots\}$，这裏的點子所表示的与上面點子所表示的已不是同一意义。

兩个集合 A 和 B 叫做相等的，如果它們由同样的元素所組成，亦即，如果集合 A 的每一个元素都屬於 B，而且，反过來，集合 B 的每一个元素也屬於 A。这時寫为 $A=B$。因此，集合是由於它的元素所唯一確定的，而与其元素的順序無關。例如，三个元素 a, b, c 所成的集合可以寫成 6 种形式：

$$\{a,b,c\}=\{a,c,b\}=\{b,a,c\}=\{b,c,a\}=\{c,a,b\}=\{c,b,a\}.$$

为了形式上方便起見，把不含任何元素的唯一的集合，也歸於集合之列。这个集合称为空集，以符号 0 來表示它(不会与數 0 的符号相混淆，因为每一次符号的意义都是很明顯的)。

如果集合 A 的每一个元素都屬於集合 B，則称 A 为 B 的子集；这時，称 B 为 A 的擴集。寫成 $A\subseteq B$, $B\supseteq A$ (用話來表示：A 被包含在 B 內，或者說 B 包含着 A)。顯然，如果 $A\subseteq B$，且 $B\subseteq A$，則 $A=B$。按照定义，空集是任何集合的子集。

如果集合 A 的每一个元素均屬於集合 B，但集合 B 中至少有一个元素不屬於 A，即是：如果 $A\subseteq B$，且 $A\neq B$，則称 A 为 B 的眞子集，B 为 A 的眞擴集，这時寫成 $A\subset B$, $B\supset A$。例如，記号 $A\neq 0$ 和 $A\supset 0$ 表示同样的意义，即集合 A 非空集。

讓我們再指出，应該區分開元素 a 和含有唯一元素 a 的集合$\{a\}$之間的差別。除此以外，元素与集合的基本關係的意义也說明了这样的差別，在这裏，元素和集合是起着不同作用的(關係 $a\in A$ 非对称的，即

如果 $a\in A$, 則寫出 $A\in a$ 是沒有意义的)，混淆它們，足以導致矛盾。例如，設有一含有兩个元素的集合 $A=\{a,b\}$。讓我們考慮含有集合 A 作为其唯一的一个元素的集合 $\{A\}$。这時 A 含有兩个元素，而 $\{A\}$ 僅含有一个元素，因此，这兩个集合不可能相等。故以後我們將不寫 $a\subset A$，而保持記号 $a\in A$。

集合的例子 很明顯的，集合的例子，要多少可以有多少。例如，可以談到關於这本書的所有字的集合，这時在不同頁上或者在同一頁的不同行上的兩个同一字算作集合的兩个不同元素；關於地球上所有人的集合，这時应該假定在所討論的一瞬間沒有出生的人也沒有死去的人；關於某一个杯子內水的分子的集合，等等。所有这些都是有窮集合的例子。前面已經提到的自然數集，偶自然數集，有理數集，实數集等都是無窮集合的例子，除此以外，讓我們再引進幾个無窮集合的例子。

設 a,b 是兩个实數，而且 $a<b$。所有合乎条件 $a\leqslant x\leqslant b$ 的实數 x 的集合称之为以 a,b 为端點的閉區間，以符号 $[a,b]$ 表示。所有合乎条件 $a<x<b$ 的实數 x 的集合称之为以 a,b 为端點的開區間，以符号 (a,b) 表示。其次称这样的 x 的集合 $[a,b)$ 和 $(a,b]$ 为半開區間，对於前者，$a\leqslant x<b$，对於後者，$a<x\leqslant b$。

我們还引進兩个符号 $+\infty$(正無窮大)和 $-\infty$(負無窮大)。不能把它們認为是數，引進它們僅是为了寫法的方便。虽然如此，为了更容易处理它們，可以認为 $+\infty$ 大於任何实數，$-\infty$ 小於任何实數。这样一來，就可以与上面相類似，引進無窮半開區間和開區間的符号表示法。即：$[a,+\infty)$ 是 $a\leqslant x$ 的所有元素 x 的集合，$(-\infty,b]$ 是 $x\leqslant b$ 的所有元素 x 的集合，$(a,+\infty)$ 是 $a<x$ 的 x 的集合，$(-\infty,b)$ 是 $x<b$ 的 x 的集合，$(-\infty,+\infty)$ 是所有实數的集合。

§2. 集合的运算

設給出兩集合 A, B，由至少屬於 A, B 之一的（即或者屬於 A，或者屬於 B，或者同時屬於 A 及 B）所有元素所組成的集合叫做 A 及 B 兩集合的連，以符号 $A\vee B$ 表示，讀做 A 連 B。

由既屬於 A 又屬於 B 的所有元素所組成的集合叫做 A 及 B 兩集合的交，以符号 $A\wedge B$ 表示，讀做 A 交 B。

由屬於 A 而不屬於 B 的所有元素所組成的集合叫做 A 及 B 兩集合的差，以符号 $A\setminus B$ 表示，讀做 A 減 B①。

例 1. 設 A 为閉區間 $[1,3]$，B 为閉區間 $[2,4]$。这時 $A\vee B$ 为閉區間 $[1,4]$，$A\wedge B$ 为閉區間 $[2,3]$，$A\setminus B$ 为半開區間 $[1,2)$，$B\setminus A$ 为半開區間 $(3,4]$。

2. 設 A 是所有矩形的集合，B 是平面上所有菱形的集合。这時，$A\wedge B$ 是所有正方形的集合，$A\setminus B$ 是不等边矩形的集合，$B\setminus A$ 是不等角菱形的集合。

3. 設給出集合 A,B，並已知 $A\subseteq B$。則

$$A\vee B=B \qquad A\wedge B=A.$$

4. 設 A 是所有被 k 除得尽的整數的集合，B 是所有被 l 除得尽的整數的集合。則 $A\wedge B$ 是被 k 与 l 的最小公倍數除得尽的整數的集合。

顯然，当且僅当 A 与 B 無共同元素時，$A\wedge B=0$；当且僅当 $A\subseteq B$ 時，$A\setminus B=0$。

集合的連与交的运算具有數目的加法和乘法的許多性質，即

I. 連的交換性（交換律）：

$$A\vee B=B\vee A.$$

① 某些作者採用 $A+B$、AB、$A-B$ 的符号，但是在代數学中由於易与代數运算相混，覺得不便。

II. 連的結合性(結合律):

$$A\vee(B\vee C)=(A\vee B)\vee C.$$

III. 交的交換性: $A\wedge B=B\wedge A$.

IV. 交的結合性: $A\wedge(B\wedge C)=(A\wedge B)\wedge C$.

V. 交關於連的分配性: $A\wedge(B\vee C)=A\wedge B\vee A\wedge C$。

在利用括号時,我們採取与數目的情形同样的規則,即,在沒有括号時,認为交的运算在連的运算之先施行,有括号,則它指示出这种順序的改变,例如在性質V中就是这样,或者括号指示出不是按照寫出的順序运算,例如在性質II和IV中。

除此以外,集合的运算还具有數目的运算所沒有的另一性質,即:

VI. 連对於交的分配律:

$$A\vee B\wedge C=(A\vee B)\wedge(A\vee C)。$$

因此,集合的連与交是对称的,亦即在性質I—VI中扮演着同样脚色。換言之,在性質I—VI中,交換連和交的运算的位置,我們仍然得到一組这样的性質,僅是順序改变了。

我們僅証明性質VI作为这一類議論的例子,其餘的証明,当作練習留給讀者。按照集合相等的定义,应該証明,屬於等式左端的任意元素x都屬於右端,反之,屬於右端的任何元素x也都屬於左端。

a) 設$x\in A\vee B\wedge C$。按照連的定义,或者$x\in A$,或者$x\in B\wedge C$。如果$x\in A$,那麼由於$A\subseteq A\vee B$,$A\subseteq A\vee C$,故$x\in A\vee B$,且$x\in A\vee C$。由此得$x\in(A\vee B)\wedge(A\vee C)$。如果$x\in B\wedge C$,那麼按照交的定义$x\in B\subseteq A\vee B$,且$x\in C\subseteq A\vee C$,亦即,又有$x\in(A\vee B)\wedge(A\vee C)$。

b) 反过來,設$x\in(A\vee B)\wedge(A\vee C)$。於是,$x\in A\vee B$,且$x\in A\vee C$。因此,或者$x\in A\subseteq A\vee B\wedge C$,或者$x\overline{\in} A$;但由於$x\in A\vee B$且$x\in A\vee C$,故应有$x\in B$和$x\in C$,因之,$x\in B\wedge C\subseteq A\vee B\wedge C$。

集合的連和交的概念,都可以应用到多於兩个的甚至是任意个(有窮的或者無窮的)集合的集合上。

为了說話方便起見,我們以後將把元素是其他集合的集合叫做組。於是,所謂某个組內集合的連,我們指着这样的集合,其元素至少屬於这个組內的一个集合。某个組內集合的交,我們指着元素屬於組內每一个集合的集合。

对於有窮个集合所成的組,其內集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的連 S 和交 D,採取下面的符号來表示:

$$S=A_1\vee A_2\vee\cdots\vee A_n=\bigvee_{i=1}^{n}A_i,$$

$$D=A_1\wedge A_2\wedge\cdots\wedge A_n=\bigwedge_{i=1}^{n}A_i.$$

对於集合的無窮序列 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$,的情形,寫成

$$S=A_1\vee A_2\vee\cdots\vee A_n\vee\cdots=\bigvee_{i=1}^{\infty}A_i,$$

$$D=A_1\wedge A_2\wedge\cdots\wedge A_n\wedge\cdots=\bigwedge_{i=1}^{\infty}A_i.$$

最後,对於任意組 $\{A_m\}$ 的情形,其中集合 A_m 的下标組成某个集合 M,寫成

$$S=\bigvee_{m\in M}A_m,\quad D=\bigwedge_{m\in M}A_m.$$

在另外的情形,採取類似於上面所指出的符号(例如,参考習題 1)。

題習 1. 設 A_n 是在一平面上位於以 0 为圓心,2^n 为半徑的圓內的點的集合,而且 n 取从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的所有整數值。求連 $\bigvee\limits_{n=-\infty}^{+\infty}A_n$ 和交 $\bigwedge\limits_{n=-\infty}^{+\infty}A_n$。

習題 2. 設 A, B 是任意集合,$S=A\vee B$, $D=A\wedge B$。証明等式 $S\setminus A=B\setminus D$, $S\setminus B=A\setminus D$。

習題 3. 設 $\{A_m\}$ 是集合 R 的一些子集所成的組,M 是下标 m 的

集合。証明等式:

$$R\setminus\bigvee_{m\in M}A_m=\bigwedge_{m\in M}(R\setminus A_m),\quad R\setminus\bigwedge_{m\in M}A_m=\bigvee_{m\in M}(R\setminus A_m).$$

§3．函數，映像，濃度

在數学中，函數的概念，和集合的概念一样，也起着非常重要的作用。函數究竟是什麼呢？人們時常說，函數是依另一变量（自变數）而变的变量。把它应用到中学中所学的通常的函數，例如$y=\sin x$，这是完全合適的，而且可以適应教学。然而，我們的任务在於更加精確地闡明函數这个概念的本質，並且得出这个概念的近代定义。首先，如果取函數$y=\sin^2x+\cos^2x$來看，那麼它的值已經不是依x的值而变的了。其次，所謂量，通常理解为这样的东西，它們之間是可以相互比較的，亦即它們之間存在着大於和小於的關係。其实，在數学上所討論的函數，不一定就能建立起这样的關係，例如複數；或者更一般的，某个集合的元素。仔細地研究起來，就可發現在函數的概念裏，主要的並不是它隨着自变數的变化而变化，而是一个对应的規則，根据它，对於每一个自变數值，唯一地確定与之对应的函數值。例如，函數$y=\sin^2x+\cos^2x$，可以簡單地这样定义，对於每一个实數值x，函數值1与之对应。对应是一个規則，它可以对於某个集合X的每一元素x，唯一地指出某一个物体（与这个已知元素对应的）。这句話僅是說明对应的概念，但不应理解为是它的定义。对应的概念，和集合的概念一样，被採取作为不下定义的基本概念。於是，最一般的函數定义，可以这样給出：

定义 1. 給出在（或者定义在）某个集合X上的函數，是指这样的一个对应，根据它，对於集合X中的任一元素x，確定某个（对应於x的）对象$f(x)$。集合X称之为函數的定义域，而对应於集合X的所有元素的对象的集合Y，称之为函數值集。

例 1. $y=\sin x$。可以取所有实數的集合作为函數的定义域。於是，函數值集为閉區間$[-1,+1]$。

例 2. $y=\tan x$。可以取所有異於形式 $n\pi+\frac{\pi}{2}$ 的实數作为函數的定义域，此处 n 取得所有整數值（因为对於这样 x 的值，函數未被定义）。於是函數値集为所有实數的集合。

例 3. 狄雷希來函數：$f(x)=\begin{cases} 0 \text{ 当 } x \text{ 是有理數時}, \\ 1 \text{ 当 } x \text{ 是無理數時。} \end{cases}$

函數的定义域是所有实數的集合，函數値集是兩个元素所組成的集合 $\{0,1\}$。

与函數的概念非常接近的是映像的概念。

定义 2. 設給出兩个集合 X 和 Y。集合 X 到集合 Y 裏的一个映像是指这样的对应，由於它，对於每一个元素 $x\in X$，有（唯一的）元素 $y\in Y$ 与之对应；特殊情形，如果每一个元素 $y\in Y$ 至少对应於一个元素 $x\in X$，那麼这样的对应就叫做集合 X 到集合 Y 上的一个映像。如果 y 对应於 x，則称 y 为 x 的像，x 为 的原像，寫为 $x\to y$ 或者 $y=f(x)$。所有有同一像 $y\in Y$ 的元素 $x\in X$ 的集合 A，叫做元素 y 的完全的原像。

例 1. 設 D 是所有实數的集合。对应 $x\to|x|$ 是集合 D 到自身裏的一个映像，而且是集合 D 到所有不負的數集合上的一个映像。0 的原像是一个 0，$y>0$ 的數有兩个原像 $+y$ 与 $-y$。

例 2. 設使正方形的每一點与这个點在底上的正射影相对应。於是得到正方形到綫段（閉區間）上的一个映像。底上每一點的原像是这一點在底上所作的垂綫在正方形上的所有點的集合。

这兩个例子指出，对於集合 X 到 Y 裏的映像來說，一方面，Y 的某些元素可能完全沒有原像，而另一方面，又可能有一些元素各有某些个（甚至無窮多个）原像。如果这兩种情形都不發生，那麼映像就叫做一对一的。因此，我們導出下面的定义。

定义 3. 具有下面三个性質的对应（或者映像）叫做集合 X 与 Y 之間的一一对应（或者一对一的映像）：

1) 对於集合 X 的每一元素，集合 Y 有一个且僅有一个元素与之对应。

2) 对於 X 的兩个不同元素，Y 永远有兩个不同元素与之对应。

3) 集合 Y 的每一个元素至少是 X 的一个元素的像。

讓我們注意，前兩个性質給出集合 X 到集合 Y 的某个子集上的一对一的映像；在这种情形，我們說關於 X 到 Y 裏的一对一的映像（或者 X 到 Y 裏的一一对应）。

如果 $y=f(x)$ 是 X 到 Y 上的某个一对一的映像，那麼，对於每一个元素 $y\in Y$，可以对应到这个唯一的元素 $x\in X$，这个 x 就是在映像 f 之下它的像是 y 的。这个对应叫做对於映像 f 的逆映像，用符号 f^{-1} 表示。作为一个容易的練習，留給讀者証明：f^{-1} 也是 Y 到 X 上的一对一的映像，且 f^{-1} 的逆映像就是原來的映像 f。

定义 4. 可以建立起一一对应的兩个集合 X 和 Y，叫作等價的，用符号 $X\sim Y$ 表示。關於等價的集合，我們也說它們有相同的濃度，或者說它們濃度相等。空集僅僅与它自身等價。

附註：我們已經說到何時兩个集合有相同的濃度，亦即給出了濃度相等这个概念的定义，但並沒有給出濃度概念的定义。我們可以說濃度是所有互相等價的集合共有的一般性質，然而这太不確定了。把濃度相等的集合的類的本身叫做濃度以後，就可避免这种不確定性（虽然，这好像是將不確定性歸諸於非常不自然的抽象化）。但是濃度相等的概念到处都已够用。

等價的關係，具有下面三个基本性質：

1) 反射性：$X\sim X$；

2) 对称性：如果 $X\sim Y$，那麼 $Y\sim X$；

3) 推移性：如果 $X\sim Y$，並且 $Y\sim Z$，那麼 $X\sim Z$。

对於第一个性質的証明，只要命每一个 $x\in X$ 对应到它自身（恒等映像）就得出集合 X 到它自身上的一对一的映像。其餘性質的証明，留給讀者①。

① 關於这些性質的意义，詳見第四章 § 20。

集合的濃度描述出它的元素的所謂“數量”。然而，在这裏可以看到部分等於全体，亦即，一个集合可以与它的眞子集有相同的濃度。

例 1. 函數 $y=10x$（此处 x 是实數）給出閉區間 $[0,1]$ 和比它長 10 倍的閉區間 $[0,10]$ 的等價性。因此，就濃度來說，兩个閉區間的點的數量是相同的。

例 2. 其次，任意兩个閉區間 $[a,b]$ 和 $[c,d]$，以及任意兩个開區間 (a,b) 和 (c,d) 都是等價的。只要考慮函數 $y=c+\frac{d-c}{b-a}(x-a)$ 就足够了。第一，对於每一实數 x，有唯一的 y 与之对应，而且，很容易看出，$a\to c$，$b\to d$。其次，設 $x_1\to y_1$，$x_2\to y_2$ 且 $x_1<x_2$。按照閉區間和開區間的定义（§1 末），$a<b$ 且 $c<d$。因之，$\frac{d-c}{b-a}>0$。故 $y_1<y_2$。故如果 $a\leqslant x\leqslant b$（或者 $a<x<b$），則有 $c\leqslant y\leqslant d$（或者，$c<y<d$）。亦即閉區間 $[c,d]$ 的點对应於 $[a,b]$ 的點，而且不同的點对应於不同的點（对於開區間的情形也同样正確）。最後，逆映像 $x=a+\frac{b-a}{d-c}(y-c)$ 也具有相同的性質，由此得到，对於 $[c,d]$ 中的每一 y，求出 $[a,b]$ 中的一个（且僅有一个）原像 x（对於開區間的情形也如此）。由这些，証明了 $[a,b]\sim[c,d]$（相应的 $(a,b)\sim(c,d)$）。

例 3. 函數 $y=\tan x$ 給出所有实數的集合与開區間 $\left(-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right)$ 間的等價性。

例 4. 考慮下面在同一行裏互相对应的數：

$$
\begin{array}{lllll}
1 & 2 & 3 & \cdots & n\cdots \\
2 & 4 & 6 & \cdots & 2n\cdots \\
1 & 3 & 5 & \cdots & 2n-1\cdots \\
10 & 100 & 1000 & \cdots & 10^n\cdots \\
2 & 3 & 5 & \cdots & p_n\cdots
\end{array}
$$

（p_n 是第 n 个素數），我們得出結論，所有自然數的集合，偶數的集合，奇