

# 数学物理反问题

黄尧远 刘中军著

山东科学技术出版社

# 数学物理反问题

黄光远 刘小军 著

山东科学技术出版社

鲁新登字 05 号

数学物理反问题

黄光远 刘小军著

\*

山东科学技术出版社出版  
(济南市玉函路 邮政编码 250002)

山东省新华书店发行

山东新华印刷厂潍坊厂印刷

\*

850×1168 毫米 32 开本 12.75 印张 4 插页 270 千字  
1993 年 7 月第 1 版 1993 年 7 月第 1 次印刷  
印数:1—1,000

ISBN7—5331—1271—7/O·53

定价 13.60 元

山东省泰山科技专著出版基金会

名誉会长 赵志浩 宋木文 陆懋曾 伍杰

卢鸣谷 董凤基 宋法棠

会长 陈光林 石洪印

副会长 宋桂植 何宗贵 吕可英 车吉心

孙肇琨 王为珍 (常务副会长)

秘书长 王为珍 (兼)

副秘书长 尹兆长

理事 (以姓氏笔画为序)

王为珍 王凤起 尹兆长 刘韶明

李道生 李德泉 张传礼 陈刚

蒋玉凤

评审委员会 (以姓氏笔画为序)

卢良恕 吴阶平 杨乐 何祚庠

罗沛霖 高景德 唐敖庆 蔡景峰

戴念慈

## 我们的希望

进行现代化建设必须依靠科学技术。作为科学技术载体的专著，正肩负着这一伟大的历史使命。科技专著面向社会，广泛传播科学技术知识，培养专业人才，推动科学技术进步，对促进我国现代化建设具有重大意义。它所产生的巨大社会效益和潜在的经济效益是难以估量的。

基于这种使命感，自1988年起，山东科学技术出版社设“泰山科技专著出版基金”，成立科技专著评审委员会，在国内广泛征求科技专著，每年补贴出版一批经评选的科技著作。这一创举已在社会上引起很大反响。

1992年，在山东省委、省政府的支持下，在原“泰山科技专著出版基金”的基础上，由山东省出版总社、山东省科学技术委员会和山东科学技术出版社共同成立了“山东省泰山科技专著出版基金会”，并得到企业界的热情赞助，为资助学术专著的出版提供了更加可靠的保证。

但是，设基金补助科技专著出版毕竟是一件新生事物，也是出版事业的一项改革。它不仅需要在实践中不断总结经验，逐步予以完善；同时，也更需要社会上有关方面的大力扶植，以及学术界和广大读者的热情支持。

我们希望，通过这一工作，高水平的科技专著能够及早问世，充分显示它们的价值，发挥科学技术作为生产力的作用，不断推动社会主义现代化建设的发展。愿基金会支持出版的著作如泰山一样，耸立于当代学术之林。

泰山科技专著评审委员会

1992年12月

## 序 言

数学物理反问题是近 30 年来迅速发展的、与许多科技领域密切相关的一门新的交叉学科。它的基本问题是研究各种物理现象的逆过程。这首先要将物理现象归纳成某种数学模型，然后用它来对物理过程本身或它的载体进行定量分析、过程控制、参数提取或者对实体进行重新设计和改造。因此，各种反问题就是如何根据具体物理问题和实际可提供的结果来给出准确的数学模型，并研究在这些非典型条件下数学物理方程的定解问题。

数学物理反问题大都是非线性的。与正问题(描述物理现象的客观演变过程)，即给定初始和边界条件求数学物理方程的解相比，反问题一般不是物理可实现的；解常常是不适定的；甚难求解的表达式；用数值方法解反问题时，其解也常常不稳定，且计算量很大。因此，相对正问题来说，求解反问题要困难得多。但客观实际中，如地球物理、生物医学、材料科学和工程控制等许多学科中提出了大量的、极需解决的反问题。无论从理论上，还是从应用上来研究这类问题都是非常有价值的，因而引起各学科资深学者的重视是很自然的了。

在国内外涉及到数学物理反问题的多种学科中，近年来已发表数百篇与专业密切相关的论文和一批著作。但是还没有一本较全面的、可以概括各个学科领域的数理方程反问题的系统论著。从这个角度来看，本书的出版是适时的，对于各学科专家系统地、全面地了解这个科学问题是非常有益的，从而也会

推动各个学科的发展。作者用系统科学的观点，综合地、深入浅出地阐述了数理方程反问题的基本概念、理论、问题和求解方法。本书对反问题的研究既有相当的理论深度，又有应用方法和实例，比较好地体现了理论与实际的结合。

本书的主要作者黄光远教授以深厚的数理方程知识为基础，长期从事控制论，特别是分布参数系统理论的研究。在理论与实际的结合上作出有益的探索并取得相当的成功。以作者自身研究成果为基础写成的这本著作很有新意，特别在本书第三章和第五章中，将现代控制理论中的丰富成果用来解各类反问题，是本书的特点之一。最后一章提出的观点和问题也是令人深思的。我想这本书定会引起广大科技工作者，特别是研究数理反问题的科学家的重视。

当然，数理反问题还是一门不很成熟的学科，它的许多问题尚在探索中。书中所给出的求解方法在不完全相同的条件下也可能会不完全适用，这正是反问题的特点。读者在应用中应当针对自己问题的特点，借助本书所提供的方法和思路，进一步研究解决问题的具体方法。

我相信，不论是熟悉反问题还是不熟悉反问题的读者，不论是进行反问题理论研究的学者，还是以解决实际反问题为目的的专家，都会从本书得到有益的启发和增长知识。

马在田\*

1993. 3. 8

---

\* 马在田同志系中国科学院学部委员，著名地球物理学家、同济大学海洋地质系与地球物理系教授。

## 前 言

数学物理反问题是一门介于数学和工程物理之间的边缘学科。由于它有广泛的应用背景，近 20 多年来在国际上日益引起许多学科专家的兴趣。我国在此领域的研究起步稍晚，80 年代初，在老一辈科学家冯康教授的倡导和大量实际课题的推动下，加上国际交流信息的影响，使得一批理论和实际工作者投身于该领域的研究，先后在中国科学院、哈尔滨工业大学、同济大学、中山大学、山东大学以及石油部系统等许多单位取得了大量理论和应用成果。但由于种种原因，在我国至今尚未有这方面综合性的论述专著。

我原来从事控制理论方面的研究工作，1980 年赴美参加了美国仿真协会主席 W. T. Karplus 教授领导的“分布参数系统辨识”的课题组，回国后仍继续从事这方面的研究，将控制论、分布参数系统的理论成果应用到反问题领域，先后得到数次国家自然科学基金的资助以及石油部地球物理勘探研究院、钢铁研究总院、胜利油田、林业部、工程兵等许多部门的有力支持。在 1989 年应邀赴原苏联低温工程学院热物理教研室工作期间，有机会深入到导热现象反问题的一些实际课题。我所取得的一些成果，与上述单位的支持帮助是分不开的。

本书是在我前些年的一本研究生讲义的基础上写成的。除我们自己的工作外，还介绍了国内外在这一领域的基本的方法和成果。它可作为综合性大学、工科大学以及高等师范院校的研究生教材，也可供有关教师和科技人员在理论研究或实际工



作中参考.

在本书写作过程中得到过山东大学数学系郭大钧教授、欧阳亮教授、中国科学院计算中心张关泉研究员和哈尔滨工业大学刘家琦教授等的支持和帮助, 山东师范大学朱月秋副教授协助校对了全书, 山东师范大学王英同志为全书作了图, 对此均表示深切的感谢.

限于作者的水平, 书中难免有错误或不妥之处, 恳请读者批评指正.

黄光远

1993年2月18日

山东省泰山科技专著出版基金会  
赞助单位

山东省财政厅

山东省出版总社

山东省科学技术委员会

山东科学技术出版社

山东泰山酿酒饮料集团总公司

董事长兼总经理 张传礼

山东金泰集团股份有限公司

董事长兼总裁 刘黎明

# 目 录

绪论	1
<b>第一章 数学物理反问题的提法</b>	<b>6</b>
§ 1.1 振动系统中的反问题	6
1.1.1 地震勘探——本书重点讨论的应用实例	6
1.1.2 振动探伤	12
1.1.3 频域上的反问题	15
§ 1.2 扩散（传导）系统中的反问题	17
1.2.1 石油、地下水与天然气的开发问题	17
1.2.2 两相分界面的辨识问题	19
1.2.3 热传导反问题	24
§ 1.3 稳态分布中的反问题	27
1.3.1 扩散炉的炉丝设计问题	27
1.3.2 心脏死亡问题	30
1.3.3 隧道工程中由实测位移反演介质及初始应力场	31
1.3.4 CT 技术中的反问题	34
§ 1.4 数学物理反问题的一般提法	35
练习与思考（一）	38
<b>第二章 反演中的若干理论问题</b>	<b>41</b>
§ 2.1 泛函分析预备知识	41
2.1.1 抽象空间概念	41
2.1.2 本书所用到的函数空间定义与符号	44
2.1.3 泛函与算子	45
2.1.4 广义函数与广义导数	48

§ 2.2 解反问题的特点与难点	50
2.2.1 解反问题的特点	50
2.2.2 解反问题的难点	51
§ 2.3 反问题的解的定义	57
2.3.1 精确解	57
2.3.2 最优控制解	57
2.3.3 最小偏差解	59
2.3.4 选择解	59
2.3.5 正规解	60
2.3.6 正则解	61
§ 2.4 解的适定性问题	62
2.4.1 唯一性问题	62
2.4.2 稳定性反例	68
2.4.3 收敛性问题	70
§ 2.5 灵敏度	73
2.5.1 灵敏度的定义	73
2.5.2 灵敏度与解的适定性	74
2.5.3 灵敏度与非线性	75
2.5.4 灵敏度应用实例	76
练习与思考 (二)	81
<b>第三章 线性代数方程中的反演问题</b>	<b>83</b>
§ 3.1 最小方差解	84
3.1.1 最小方差解的定义	84
3.1.2 最小方差解的统计特性	86
3.1.3 最小方差解的一些特殊算法	89
§ 3.2 求系统的脉冲响应	99
• 2 •	

3.2.1	脉冲响应的最小方差估计	99
3.2.2	相关函数, 维纳—霍夫方程	101
3.2.3	最优输入讯号及其近似构成	104
3.2.4	方法综合	107
§ 3.3	已知部分解条件下的反演	108
3.3.1	反演非齐次项	109
3.3.2	反演系数	117
§ 3.4	欠定条件下的反演	120
3.4.1	求正规解	122
3.4.2	正规解的不稳定性	123
3.4.3	求正则解	126
附录	产生 PRBS 的计算机程序	129
	练习与思考 (三)	129
<b>第四章</b>	<b>一般线性系统的不适定问题</b>	<b>131</b>
§ 4.1	基本概念与不适定问题的例子	131
4.1.1	问题的提出	131
4.1.2	不适定问题的例子	133
§ 4.2	选择解与最小偏差解	139
4.2.1	选择解	139
4.2.2	最小偏差解	141
4.2.3	最小偏差解的近似求法	145
§ 4.3	正则化方法	147
4.3.1	正则逆算子	147
4.3.2	构造正则逆算子	150
4.3.3	正则化方法	153
4.3.4	解对算子的连续依赖性	155

4.3.5 正则参数的确定	157
§ 4.4 用正则法解应用问题	160
4.4.1 解第一类积分方程	160
4.4.2 确定各种辐射的谱	162
4.4.3 向长电缆的输出计算输入	164
练习与思考(四)	169
<b>第五章 最佳控制方法——变分方法</b>	171
§ 5.1 最佳控制问题的一般提法	171
5.1.1 系统的状态方程	171
5.1.2 容许控制集与可比控制集	173
5.1.3 泛函指标	174
5.1.4 最佳控制与古典变分问题的区别	174
§ 5.2 变分方法基础	175
5.2.1 微分公式与极值问题	175
5.2.2 变分学与 Euler 公式	178
5.2.3 最速下降法	184
§ 5.3 最佳控制的乘子方法及其应用	185
5.3.1 集中参数系统的乘子方法	185
5.3.2 分布参数系统的乘子方法	191
5.3.3 乘子法应用例题	196
§ 5.4 脉冲变分原理	202
5.4.1 基本定理	202
5.4.2 控制仅依赖部分变元的脉冲变分原理	212
§ 5.5 脉冲变分原理的应用	213
5.5.1 源函数的最优设计(或辨识问题)	213
5.5.2 地震勘探问题	219

§ 5.6	灵敏度计算	224
	练习与思考 (五)	228
<b>第六章</b>	<b>其它若干解反问题的方法</b>	<b>231</b>
§ 6.1	脉冲谱方法	231
6.1.1	脉冲谱方法的基本思路	231
6.1.2	脉冲谱方法应用举例	236
6.1.3	几点讨论	241
§ 6.2	扰动方法	242
6.2.1	扰动方法基础	243
6.2.2	解双线性系统的反问题	246
6.2.3	解非线性系统的反问题	249
6.2.4	几点讨论	251
§ 6.3	典型函数近似法	252
6.3.1	典型函数近似法的基本思想	253
6.3.2	几种近似方法举例	255
6.3.3	Duhamel 公式	259
6.3.4	随采样时间增加的递推算法	262
6.3.5	热传导反问题的灵敏度计算	264
§ 6.4	求未知边界问题	265
6.4.1	几何变换法	265
6.4.2	优化方法	268
	练习与思考 (六)	271
<b>第七章</b>	<b>波动现象反演的特殊方法</b>	<b>273</b>
§ 7.1	一维波动方程沿特征线积分反演	274
7.1.1	一维方程组模型	274
7.1.2	沿特征线积分	275

7.1.3 反演计算	278
§ 7.2 一维分层介质逐层递推反演	280
7.2.1 Cauchy 问题模型与正演公式	281
7.2.2 噪声积累的估计	284
7.2.3 反演递推公式	285
7.2.4 消除积累误差	288
§ 7.3 吸收边界条件	290
§ 7.4 Born 近似与频域上的反演	293
7.4.1 一维 Born 近似	293
7.4.2 频域反演公式	296
7.4.3 频域反演的特殊性	302
7.4.4 多层介质与误差的积累	305
§ 7.5 固有值反问题	307
7.5.1 基本概念与问题的提出	307
7.5.2 唯一性、比较定理与渐近估计	313
7.5.3 反演方法	316
练习与思考(七)	321
<b>第八章 分布参数系统控制中的几类应用问题</b>	<b>323</b>
§ 8.1 综述	324
8.1.1 历史简介	324
8.1.2 分析与发展	325
§ 8.2 大滞后分布对象的复合控制系统	329
8.2.1 问题与模型	329
8.2.2 稳态分布关系	331
8.2.3 稳态前馈补偿	333
8.2.4 复合控制系统	334



8.2.5 综合说明·····	337
§ 8.3 远距离多个热负载的节能控制系统·····	338
8.3.1 数学模型与控制问题·····	338
8.3.2 控制系统设计·····	342
8.3.3 控制系统评价·····	347
§ 8.4 大型分布对象的最佳控制·····	348
8.4.1 模型·····	348
8.4.2 稳态控制问题·····	351
8.4.3 动态控制问题·····	353
§ 8.5 观测点与控制点的选择·····	354
8.5.1 观测点的选择·····	354
8.5.2 控制点的选择·····	355
8.5.3 动态控制点的最佳选择·····	356
练习与思考 (八) ·····	359
<b>第九章 反演方法的评价与系统仿真·····</b>	<b>361</b>
§ 9.1 反演方法的检验·····	361
§ 9.2 反演效果的评价指标·····	366
§ 9.3 系统建模与仿真·····	368
9.3.1 系统仿真与模型·····	368
9.3.2 模型误差分析·····	370
9.3.3 在线辨识与建模·····	374
<b>参考文献·····</b>	<b>376</b>