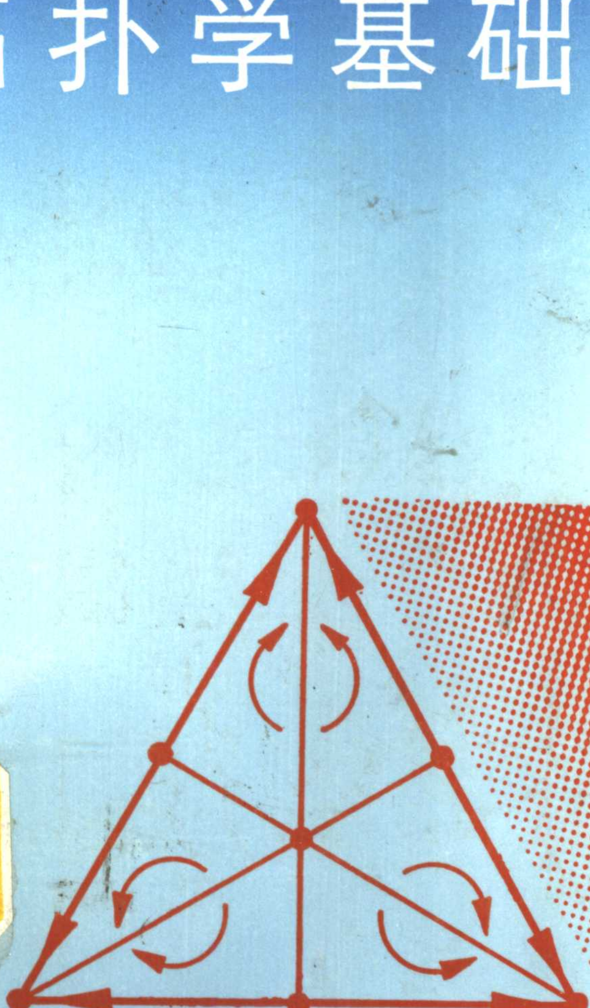
●刘正帅　黄　荧　任振中　编

●河南大学出版社

拓扑学基础 TUOPUXUE JICHU



拓扑学基础

刘正帅　黄荧　任振中　编

河南大学出版社

(豫)新登字第09号

拓扑学基础

刘正帅　黄　荧　任振中　编

责任编辑　程　庆

河南大学出版社出版

(开封市明伦街85号)

河南省新华书店发行

中国科学院开封印刷厂印刷

开本:850×1168毫米 1/32　印张:8.375　字数:210千字

1992年5月第1版　1992年5月第1次印刷

印数:1—2000　定价:2.80元

ISBN 7-81018-677-9/O·41

编者的话

国内目前出版的拓扑学教材中，有的全部是点集拓扑内容，有的是点集拓扑之后附加基本群的简单内容，有的则是以代数拓扑为主，把点集拓扑作为预备知识．根据我们的教学实践，考虑到师范大学基础数学专业的特点，本书在把重点放在点集拓扑方面的同时，也尽量充实代数拓扑的内容．我们的目的是使学生能接触到点集拓扑与代数拓扑的一些技巧与应用，但又不过分深入其中任何一个领域．

在点集拓扑方面，我们较详细地给出了拓扑空间的基本概念，研究了子空间、积空间和商空间．在研究连通性、紧性和分离性的同时，也讨论了网的收敛、仿紧和紧化问题．

在代数拓扑方面，较详细地讨论了基本群，给出了它的一些应用．在研究了单纯同调群、相对同调群和奇异同调群及三者之间的关系之后，较容易地由奇异同调群的拓扑不变性得到单纯同调群的拓扑不变性，而且又用重心重分和单纯逼近的技术较详细地证明了单纯同调群的伦型不变性，并相应给出单纯同调群的一些简单应用．

估计一个学期(按 72 学时计算)可以讲完本书全部内容，其中点集拓扑约 42 个学时，代数拓扑约 30 个学时．标有“*”的章节可以不讲或略讲．

本书的第一、二、三章由任振中执笔，第四、五、六章由黄荧执笔，第七、八、九章及附录由刘正帅执笔，最后由刘正帅统一修改定稿．

本书得到省教委、我校教务处及数学系领导的热情关怀和支

持，我们表示衷心地感谢。

由于水平所限，本书的错误和缺点难免，真诚欢迎使用本书的老师和同学们批评指正。

编　者

1991年2月于河南师范大学

符 号 说 明

$\mathbf{N}$	自然数集
$\mathbf{Z}$	整数集
$\mathbf{Q}$	有理数集
$\mathbf{R}$	实数集
$\mathscr{C}A$	A 的余集
$\Pi_{i\in I}A_i$	集族的笛卡尔集
$(x_i)_{i\in I}$	笛卡尔集的元素
$\Pi(U_{i_1},\cdots,U_{i_m})$	关于 U_{i_1}，$\cdots$，U_{i_m} 的部分积
xRy	x 与 y 相关
dom	定义域
ran	值域，群的秩
R^{-1}	关系 R 的逆
$S\circ R$	关系 R 与 S 的复合
Δ	恒等关系
$\sim$	等价关系，同调
$[x]$	x 的等价类
X/R	X 关于等价关系 R 的商集
$f: X\to Y$	X 到 Y 的映射
$e_{y_0}: X\to Y$	X 到 Y 的常值映射
1_X	X 上的恒等映射
$i: A\to X$	包含映射或内射
p_k	射影
$\pi: X\to X/R$	自然映射
$f\|_A$	f 在 A 上的限制
$f(A)$	A 在 f 下的象
$f^{-1}(B)$	B 在 f 下的原象

f^{-1}	映射 f 的逆
$g\circ f$	映射 f 与 g 的复合
$d(x, y)$	点 x 与 y 间的距离
E^1	实数空间
E^n	n 维欧氏空间
$B(x, \varepsilon)$	x 的球形邻域
$\mathscr{N}_x$	点 x 的邻域系
$d(A)$	A 的导集
$c_X(A)$ 或 $\overline{A}$	A 的闭包
$i(A)$ 或 A°	A 的内部
$b(A)$	A 的边界
$(D, \leqslant)$	有向集
$\{x_\alpha\}_{\alpha\in(D,\leqslant)}$	网
$\lim\limits_{\alpha\in(D,\leqslant)} x_\alpha = x$ 或 $x_\alpha\to x$	网收敛于 x
$\approx$	同胚
$\mathscr{B}\|_Y$	$\mathscr{B}$ 在 Y 上的限制
$f_1\times f_2$	f_1 与 f_2 的拓扑积
S^n	n 维球面
S^1	单位圆周
$\bar{\alpha}$	道路 α 的逆
$\alpha*\beta$	道路的积
T	环面
T_2	双环面
$\simeq$	同伦，同伦等价
$f\simeq g \text{ rel} A$	相对于 A 同伦
$\doteq$	道路的等价
$[\alpha]$	道路类
$[\alpha]\circ[\beta]$ 或 $[\alpha][\beta]$	道路类的积

$\pi_1(X, x_0)$	基点 x_0 处的基本群
$\cong$	群的同构
$\pi_1(X)$	道路连通空间的基本群
f_*	诱导同态
$\deg\alpha$	α 的度数
$(a_0, a_1, \cdots, a_p)$	以 $a_0, a_1, \cdots, a_p$ 为顶点的 p 维几何单形
σ^p 或 σ	(p 维)几何单形，有向单形
$\hat{\sigma}^p$	σ^p 的重心
$\sigma^p \leqslant \sigma^q$	σ^p 是 σ^q 的面
$\sigma^p < \sigma^q$	σ^p 是 σ^q 的真面
dim	维数
$\lvert K \rvert$	复形 K 的多面体
$\mathrm{Cl}\sigma^p$	σ^p 的闭包复形
$\mathrm{Bd}\sigma^p$	σ^p 的边缘复形
K^r	复形 K 的 r 维骨架
$(a_0a_1\cdots a_p)$ 或 $a_0a_1\cdots a_p$	有向单形
$-\sigma^p$ 或 $-\sigma$	与 σ 定向相反的有向单形
S_p^+	p 维基本组
S_p	复形的全体 p 维有向单形
$C_p(K)$	复形 K 的 p 维链群
∂_p 或 ∂	p 维边缘算子
$Z_p(K)$	复形 K 的 p 维闭链群
$B_p(K)$	复形 K 的 p 维边缘链群
$H_p(K)$	复形 K 的 p 维同调群
aK	复形 K 的以 a 为顶点的锥形
$C_p(K, L)$	复形偶的相对 p 维链群
$B_p(K, L)$	复形偶的相对 p 维边缘链群
$Z_p(K, L)$	复形偶的相对 p 维闭链群

$H_p(K, L)$	复形偶的相对 p 维同调群
d_i	第 i 个包含映射
Δ_p	标准 p 维单形
s^p	奇异 p 维单形
$S_p(X)$	X 中全部奇异 p 维单形
$S(X)$	X 的奇异复形
$C_p(X)$	X 的 p 维奇异链群
$B_p(X)$	X 的 p 维奇异边缘链群
$Z_p(X)$	X 的 p 维奇异闭链群
$H_p(X)$	X 的 p 维奇异同调群
$\{f_{*p}\}$	f 诱导的奇异同调群同态序列
∂_*	联接同态
$\dot{\sigma}$	开单形
$st_K a$	以 a 为顶点的开星形
sdK	复形 K 的第一次重心重分
$sd^m K$ 或 $K^{(m)}$	复形 K 的第 m 次重心重分
sd	重分链映射
$\mathrm{dia}\sigma$	单形 σ 的直径
$\mathrm{mes}K$	复形 K 的网径
$\deg f$	映射度
$\chi(K)$	复形 K的 Euler-Poincare 示性数

目　　录

第一部分　点集拓扑

符号说明
第一章　预备知识 …………………………………………… (2)
　§1.1　集族 ………………………………………………… (2)
　§1.2　笛卡尔积与关系 ……………………………………… (4)
　§1.3　映射 ………………………………………………… (10)
第二章　拓扑空间 …………………………………………… (16)
　§2.1　度量空间 …………………………………………… (16)
　§2.2　拓扑与邻域系 ……………………………………… (22)
　§2.3　基与局部基 ………………………………………… (25)
　§2.4　几个基本概念 ……………………………………… (31)
　§2.5　收敛性 ……………………………………………… (38)
　§2.6　连续映射与同胚 …………………………………… (47)
第三章　构造新空间 ………………………………………… (54)
　§3.1　子空间 ……………………………………………… (54)
　§3.2　积空间 ……………………………………………… (58)
　§3.3　商空间 ……………………………………………… (64)
第四章　可数性、分离性及可度量化 ……………………… (72)
　§4.1　可数性 ……………………………………………… (72)
　§4.2　分离性 ……………………………………………… (77)
　§4.3　函数分离性 ………………………………………… (83)
　§4.4　度量化定理 ………………………………………… (88)
第五章　紧致性 ……………………………………………… (93)
　§5.1　紧致空间 …………………………………………… (93)
　§5.2　紧致性与分离性 …………………………………… (98)

§ 5.3 几种较弱的紧致性 …………………………………… (103)
§ 5.4 局部紧与紧化 ……………………………………… (108)
§ 5.5 仿紧性 ……………………………………………… (111)
第六章 连通性 ……………………………………………… (116)
§ 6.1 连通空间 …………………………………………… (116)
§ 6.2 连通分支与局部连通空间 ………………………… (123)
§ 6.3 道路连通 性………………………………………… (127)

第二部分 代数拓扑

第七章 基本群 ……………………………………………… (134)
§ 7.1 同伦和道路类的积 ………………………………… (135)
§ 7.2 基本群的定义与性质 ……………………………… (142)
§ 7.3 圆周的基本群 ……………………………………… (147)
§ 7.4 计算基本群 ………………………………………… (154)
§ 7.5 空间的同伦等价和代数基本定理 ………………… (159)
第八章 同调群 ……………………………………………… (166)
§ 8.1 单纯复形 …………………………………………… (167)
§ 8.2 单纯同调群 ………………………………………… (178)
*§ 8.3 相对同调群 ………………………………………… (192)
§ 8.4 奇异同调群 ………………………………………… (201)
*§ 8.5 同调论的公理系统 ………………………………… (210)
第九章 单纯同调群的诱导同态和简单应用 ……………… (213)
*§ 9.1 单纯逼近与单纯映射的诱导同态 ………………… (213)
*§ 9.2 单纯同调群的诱导同态与性质 …………………… (223)
§ 9.3 简单应用 …………………………………………… (232)
§ 9.4 Euler-Poincare 公式 ……………………………… (239)

附录 群………………………………………………………… (243)
索引…………………………………………………………… (251)
参考书目……………………………………………………… (258)

第一部分

点 集 拓 扑

第一章 预备知识

§1.1 集　族

点集拓扑的基础是集合论. 我们认为读者对于集合论的一般知识已相当熟悉，这里只是复习与本书密切相关的一些内容，如集族、关系与映射等. 关于集合、子集、集合的并与交、可数集合与不可数集合等概念，虽然本书也常用到，这里也不再复习.

集合是具有某种性质的确定的能够区分的对象所组成的整体. 组成一个集合的那些对象称为这个集合的**元素**. 集合的元素可以是任何事物，例如集合 X 的一切子集就可以组成一个集合，该集合称为 X 的**幂集**，记作 $P(X)$. 由集合组成的集合称为**集族**，通常用花体字母 $\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{U},\mathscr{V},\cdots$表示，它的元素用大写字母 $A,B,U,V,\cdots$表示. 另外，我们用大写正体字母 N，Z，Q，R 分别表示全体自然数、整数、有理数、实数组成的集合.

定义 1　设 I 是一个集合，$\mathscr{A}$ 是一个集族. 如果对于 I 的每一元素 i，在 $\mathscr{A}$ 中有且仅有一个集合 A_i 与之对应，而且 $\mathscr{A}$ 中每一集合都对应 I 的某个元素，则称 $\mathscr{A}$ 为以 I 为指标集的集族，记作　$\mathscr{A}=\{A_i\}_{i\in I}$.

任意的集族$\mathscr{A}$都可以看成以$\mathscr{A}$为指标集的集族$\{A\}_{A\in\mathscr{A}}$.

熟知的集合的并、交运算可以推广到集族上.

定义 2　对于集族 $\{A_i\}_{i\in I}$，所有 $A_i(i\in I)$ 的元素组成的集合称为集族$\{A_i\}_{i\in I}$ 的**并集**，记作 $\cup_{i\in I}A_i$，即

$$\cup_{i\in I}A_i=\{x\mid \exists i\in I,\ 使 x\in A_i\}.$$

如果 $I\subset\mathrm{N}$，这时并集可用下列记号表示：

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots,$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n.$$

定义 3 对于集族 $\{A_i\}_{i\in I}$，所有 $A_i(i\in I)$ 的公共元素组成的集合称为集族 $\{A_i\}_{i\in I}$ 的**交集**，记作 $\bigcap_{i\in I} A_i$，即

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \mid \forall i\in I,\ \text{都有}\ x\in A_i\}.$$

如果 $I\subset \mathrm{N}$，这时交集可表示为

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap \cdots,$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n.$$

如果 $\bigcap_{i\in I} A_i = \varnothing$，则称诸集 $A_i(i\in I)$ 不相交. 如果在集族 $\{A_i\}_{i\in I}$ 中，对任意 i，$j\in I$，只要 $i\neq j$，便有 $A_i\cap A_j=\varnothing$，则称该集族为两两不相交.

对于集族的并、交运算，分配律和 De Morgan 律成立.

定理 1(分配律) 设 $\{A_i\}_{i\in I}$ 是集族，B 是集合，则

(1) $B\cap(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I}(B\cap A_i)$;

(2) $B\cup(\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I}(B\cup A_i)$.

证明：仅证明(2)，(1)的证明留给读者.

$$\begin{aligned} & x\in B\cup(\textstyle\bigcap_{i\in I} A_i) \\ \Longleftrightarrow\ & x\in B \text{ 或 } x\in \textstyle\bigcap_{i\in I} A_i \\ \Longleftrightarrow\ & x\in B \text{ 或 } \forall i\in I,\ \text{都有}\ x\in A_i \\ \Longleftrightarrow\ & \forall i\in I,\ \text{都有}\ x\in B\cup A_i \\ \Longleftrightarrow\ & x\in \textstyle\bigcap_{i\in I}(B\cup A_i). \end{aligned}$$

故 $$B\cup(\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I}(B\cup A_i).\ \square$$

定理 2(De Morgan 律) 设 $\{A_i\}_{i\in I}$ 是集合 X 的任意子集族，则

(1) $\mathscr{C}(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I}\mathscr{C}A_i$;

(2) $\mathscr{C}(\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I}\mathscr{C}A_i$.

证明：仅证明(1)，(2)的证明留给读者.

$x\in\mathscr{C}(\bigcup_{i\in I} A_i) \Longleftrightarrow x\in X$ 但 $x\overline{\in}\bigcup_{i\in I} A_i \Longleftrightarrow x\in X$ 但 $\forall i\in I$,

都有 $x \in A_i \Longleftrightarrow \forall i \in I$，都有 $x \in \mathscr{C}A_i \Longleftrightarrow x \in \bigcap_{i \in I} \mathscr{C}A_i$.

故 $\mathscr{C}(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcap_{i \in I} \mathscr{C}A_i$. □

习　　题

1. 对于集族 $\{A_i\}_{i \in I}$ 与 $\{A_j\}_{j \in J}$，证明：若 $J \subset I$，则

$$\bigcup_{j \in J} A_j \subset \bigcup_{i \in I} A_i, \quad \bigcap_{j \in J} A_j \supset \bigcap_{i \in I} A_i.$$

2. 对于集族 $\{A_i\}_{i \in I}$ 和集合 B，证明：

(1) $\bigcup_{i \in I} A_i \subset B$ 当且仅当 $\forall i \in I$，$A_i \subset B$；

(2) $B \subset \bigcap_{i \in I} A_i$ 当且仅当 $\forall i \in I$，$B \subset A_i$.

§1.2　笛卡尔积与关系

1. 笛卡尔积

对于任意两个对象 x 与 y，确定一个新对象 $z=(x,y)$，z 称为有序对，x 称为 z 的第一坐标，y 称为 z 的第二坐标.

定义1　设 X,Y 是任意两个集合，所有有序对的集合

$$\{(x,y) \mid x \in X \text{ 且 } y \in Y\}$$

称为 X 与 Y 的**笛卡尔积**，记作 $X \times Y$. X 称为 $X \times Y$ 的**第一坐标集**，Y 称为 $X \times Y$ 的**第二坐标集**.

$$X \times X = \{(x,y) \mid x \in X \text{ 且 } y \in X\}$$

是 X 与 X 的笛卡尔积，记作 X^2.

笛卡尔积与坐标集的次序有关. 一般地说，只要 $X \neq Y$，便有 $X \times Y \neq Y \times X$，也就是说交换律不成立.

下面把两个集合的笛卡尔积这一概念推广到集族上.

设有集族 $\{X_i\}_{i \in I}$，对任意 $i \in I$，$X_i \neq \varnothing$，于是有 $x_i \in X_i$，所有这些 $x_i (i \in I)$ 组成一个新的对象，记为 $(x_i)_{i \in I}$. x_i 称为 $(x_i)_{i \in I}$ 的第 i 个**坐标**.

定义 2　设 $\{X_i\}_{i \in I}$ 是由非空集组成的集族，集合

$$\{(x_i)_{i\in I} \mid \forall i\in I,\ x_i\in X_i\}$$

称为集族 $\{X_i\}_{i\in I}$ 的**笛卡尔积**，记作 $\Pi_{i\in I}X_i$. 对任意 $i\in I$, X_i称为 $\Pi_{i\in I}X_i$的**第 i 个坐标集**.

当指标集 $I=\mathrm{N}$ 时，笛卡尔积 $\Pi_{i\in \mathrm{N}}X_i$ 通常写成 $\Pi_{i=1}^{\infty}X_i$，它由所有的序列 $(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$ 所组成，其中 $x_i\in X_i$, $i=1,2,\cdots, n, \cdots$.

当指标集 $I=\{1, 2, \cdots, n\}$ 时，诸集 X_1, X_2, $\cdots$, X_n 的笛卡尔积记为 $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$，它由所有 n 元有序组 $(x_1, x_2, \cdots, x)_n$ 所组成，其中 $x_i\in X_i$, $i=1, 2, \cdots, n$. 特别地，当 $X_i=X$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 时，笛卡尔积记作 X^n.

关于笛卡尔积有下面的一些结论：

定理 1 对于集族 $\{X_i\}_{i\in I}$ 和 $\{Y_j\}_{j\in J}$，有

(1) $(\bigcup_{i\in I}X_i)\times(\bigcup_{j\in J}Y_j)=\bigcup_{(i,j)\in I\times J}X_i\times Y_j$;

(2) $(\bigcap_{i\in I}X_i)\times(\bigcap_{j\in J}Y_j)=\bigcap_{(i,j)\in I\times J}X_i\times Y_j$.

证明留给读者.

定理 2 设 $\{Z_i\}_{i\in I}$ 是非空集组成的集族，且对任意 $i\in I$, X_i, $Y_i\subset Z_i$，则

(1) $(\Pi_{i\in I}X_i)\cap(\Pi_{i\in I}Y_i)=\Pi_{i\in I}(X_i\cap Y_i)$;

(2) $(\Pi_{i\in I}X_i)\cup(\Pi_{i\in I}Y_i)\subset\Pi_{i\in I}(X_i\cup Y_i)$.

证明：(1) $(x_i)_{i\in I}\in(\Pi_{i\in I}X_i)\cap(\Pi_{i\in I}Y_i)$

$\Longleftrightarrow (x_i)_{i\in I}\in\Pi_{i\in I}X_i$ 且 $(x_i)_{i\in I}\in\Pi_{i\in I}Y_i$

$\Longleftrightarrow \forall i\in I,\ x_i\in X_i$ 且 $x_i\in Y_i$

$\Longleftrightarrow \forall i\in I,\ x_i\in X_i\cap Y_i$

$\Longleftrightarrow (x_i)_{i\in I}\in\Pi_{i\in I}(X_i\cap Y_i)$,

故 $\qquad (\Pi_{i\in I}X_i)\cap(\Pi_{i\in I}Y_i)=\Pi_{i\in I}(X_i\cap Y_i)$.

(2) 的证明与此类似. □

定义 3 设 $\{X_i\}_{i\in I}$ 是一个集族，且对任意 $i\in I$, $U_i\subset X_i$. 从指标集 I 中随意选出 m 个标号 i_1, i_2, $\cdots$, i_m，第 i_k 个坐标集为

$U_{i_k}(k=1, 2, \cdots, m)$，第 i 个坐标集为 $X_i(i\neq i_k)$ 的笛卡尔积称为 $\Pi_{i\in I}X_i$ 关于 U_{i_1}，U_{i_2}，$\cdots$，U_{i_m} 的**部分积**，记作

$$\Pi(U_{i_1}, U_{i_2}, \cdots, U_{i_m}).$$

2. 关系

关系是刻划数学中许多概念的基础，这里只讨论二元关系.

定义 4 设 X，Y 是两个集合，X 与 Y 的笛卡尔积 $X\times Y$ 的每一子集 R 都称为从 X 到 Y 中的**关系**. 如果 $(x,y)\in R$，则称 x 与 y 是 R 相关的，并记作 xRy.

从集合 X 到同一集合 X 的关系称为 X 中的关系.

定义 5 设 R 是从 X 到 Y 中的关系，由 R 中所有元素的第一坐标组成的集合称为 R 的**定义域**，记作 $\mathrm{dom}(R)$；由 R 中所有元素的第二坐标组成的集合称为 R 的**值域**，记作 $\mathrm{ran}(R)$，即

$$\mathrm{dom}(R)=\{x\in X \mid \exists y\in Y, \text{使得 } (x,y)\in R\},$$
$$\mathrm{ran}(R)=\{y\in Y \mid \exists x\in X, \text{使得 } (x,y)\in R\}.$$

如果 $A\subset X$，则集合 $\{y\in Y \mid \exists x\in A, \text{使得 } (x,y)\in R\}$ 称为 A（对于关系 R 而言）的**象**，记作 $R(A)$.

关系有逆和复合两种运算.

定义 6 设 R 是从 X 到 Y 中的关系，则集合

$$\{(y,x) \mid (x,y)\in R\}$$

是从 Y 到 X 中的关系，称为关系 R 的**逆**，记作 R^{-1}.

定义 7 设 X，Y，Z 是集合，$R\subset X\times Y$，$S\subset Y\times Z$，则集合

$$\{(x,z) \mid \exists\, y\in Y, \text{使得 } (x,y)\in R \text{ 且 } (y,z)\in S\}$$

是从 X 到 Z 中的关系，称为 R 与 S 的**复合**，记作 $S\circ R$.

定理 3 设 X，Y，U，V 是集合，$R\subset X\times Y$，$S\subset Y\times U$，$T\subset U\times V$，则

(1) $(R^{-1})^{-1}=R$；

(2) $(S\circ R)^{-1}=R^{-1}\circ S^{-1}$；

(3) $T\circ(S\circ R)=(T\circ S)\circ R$.