信息物理基础

冯华君　李晓彤　编著

浙江大學出版社

图书在版编目（CIP）数据

信息物理基础／冯华君，李晓彤编著．—杭州：浙江大学出版社，2001．1
ISBN 7-308-02437-7

Ⅰ．信…　Ⅱ．①冯…　②李…　Ⅲ．物理学
Ⅳ．O4

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2000）第 39038 号

出版发行　浙江大学出版社
（杭州浙大路 38 号　邮政编码 310027）
（E-mail：zupress@mail.hz.cn）
（网址：http：//www.zjupress.com）
责任编辑　杜希武
排　　版　浙江大学出版社电脑排版中心
印　　刷　浙江大学印刷厂
经　　销　浙江省新华书店
开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　9.75
字　　数　250 千
版 印 次　2001 年 1 月第 1 版第 1 次印刷
印　　数　0001—1000
书　　号　ISBN 7-308-02437-7/O·251
定　　价　15.00 元

前　言

光电信息、信电类专业是当今的热门专业之一，该类专业学生要掌握的专业知识非常多，而有关的物理基础知识往往篇幅较大，需要较多的学时才能学完。《信息物理基础》一书精选了相关物理课程中与光电信息类专业相关的基本概念、光电现象及其应用等方面的内容，篇幅作了很大的精简，适合三学分课程讲授使用。考虑到篇幅，本书对有关公式只作说明，不作推导，读者若想进一步了解，应阅读相关的专门教材。全书内容包括：

一、数学基础知识，包括梯度、散度、旋度及其有关运算公式。

二、电磁场基本理论，包括电磁场的普遍规律、麦克斯韦方程组及电磁场的物质性、电磁波的传播及其在界面上的行为、电磁波的辐射、散射和色散等。

三、固体、半导体物理基础，包括晶体结构、晶格衍射、振动、能带理论、布里渊区、晶体导电性、半导体能带结构，本征半导体和杂质半导体，p-n 结，半导体的光学和光电现象及其应用等。

四、量子力学基础知识，包括黑体辐射，光电效应，光量子理论，氢原子光谱，光谱学原理等。

全书共九章，由冯华君教授、李晓彤副教授编著。其中第一至第四章由李晓彤副教授编写，第五至第九章由冯华君教授编写，李奇老师参加了部分制图工作。全书大纲由编者与刘旭教授、刘向东副教授、杨甬英副教授、舒晓武副教授共同讨论确定。

目　　录

第一章 绪 论

§1-1 课程简介

本课程是为光电信息工程学系的本科生开设的一门专业基础性课程，内容包括电磁场的基本理论、量子物理学基础以及固体物理学基础，大体上相当于大学理论物理和固体物理中与光学联系密切的内容。因此，本教材在取材上既适当照顾到其作为物理学分支的系统性，又突出了其中的光学重点，强化了为学习物理光学、光电子学等课程打基础的特色。我们希望本书能成为光电信息工程专业本科生合适的物理基础教材。

光从本质上讲是电磁波，因而电磁场基本理论是光电信息专业必不可少的物理基础。这里我们简单介绍了静电场和稳定电流的磁场及其实验定律，但更有意义的还是时变电磁场和麦克斯韦方程组。它使电磁现象和光现象有了统一的理论解释，为物理学及其光学分支带来了巨大飞跃。这是从实践上升到理论，理论又指导实践的一个范例。在学习普通物理的基础上学习电磁场理论，不仅要理解许多物理概念和原理，而且要掌握大量的物理规律及其联系和应用，学会利用它们来分析各种光学现象。

从晶体结构入手，本书还讨论了自由电子理论，布里渊区，固体、半导体的能带结构，p-n结等对半导体的光吸收、光电导、光磁电现象、光电效应、发光现象作了理论分析，以便使读者对学习激光、光电子学有较扎实的基础。

光的粒子性和光的波动性都只描述了光某一方面的特性，光的量子性才是对光的性质的全面描述。因此，量子力学的有关内容也成为本课程的必要组成部分。

§1-2 数学基础

矢量分析是学习本课程的重要数学工具，在此有必要先作一概括性的复习。

一、标量和矢量

三维空间中两点之间的距离或线段长度在坐标系转动变换下不变，凡属于这一类的量用一个数就可描述，称为标量。将这一结论推广，可定义标量如下：

如果一个物理量在坐标系转动变换下为不变量，则称此物理量是标量。

例如，质量、电荷、电势都是标量。

三维空间点坐标矢量 $\boldsymbol{r}$ 在坐标系转动变换下，其分量将发生变化，由此可一般地定义矢量如下：

如果一个物理量有三个分量，其中每个分量在坐标系转动变换下，如同坐标分量一样变换，则称此物理量是矢量。

例如，速度是一个矢量，因为它的每个分量在坐标系转动变换下将发生变化。

二、场、梯度、散度、旋度

如果在一个空间区域中，某个物理量在其中每一点都取确定值，则称此空间区域中存在该物理量的场。如果该物理量是标量，就称这个场是标量场；如果该物理量为矢量，就称这个场为矢量场。例如，温度场、电势场是标量场，而电场、磁场是矢量场。

可见，在标量场中，分布于各点的物理量 ϕ 是其坐标的单值函数，即

$$\phi = \phi(x,y,z)$$

若在标量场中有一矢量 $\boldsymbol{l}$，$\boldsymbol{l}_0 = \cos\alpha\boldsymbol{i} + \cos\beta\boldsymbol{j} + \cos\gamma\boldsymbol{k}$，在 $\boldsymbol{l}_0$ 方向上任取 $M(x,y,z)$ 和 $M'(x',y',z')$，则标量场中 ϕ 关于 $\boldsymbol{l}$ 的变化率

$$\frac{\partial\phi}{\partial l} = \lim_{M\to M_0}\frac{\phi(M') - \phi(M)}{\Delta l}$$

为 ϕ 沿 $\boldsymbol{l}_0$ 方向的方向导数。据此可得

$$\frac{\partial\phi}{\partial l} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial\phi}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial\phi}{\partial z}\cos\gamma$$

一般来说，在场中的某一点 ϕ 沿不同方向有不同的方向导数。如果在标量场中定义一个矢量 $\boldsymbol{G}$：

$$\boldsymbol{G} = \mathrm{grad}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\boldsymbol{k} \tag{1.1}$$

则

$$\frac{\partial\phi}{\partial l} = \boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{l}_0 = |\boldsymbol{G}|\cos(\boldsymbol{G},\boldsymbol{l}_0) \tag{1.2}$$

这表明，矢量 $\boldsymbol{G}$ 的方向就是 ϕ 变化率最大的方向，其模就是这个最大的方向导数。我们把矢量 $\boldsymbol{G}$ 称为标量场 φ 的梯度。标量场在某点的梯度方向垂直于同一点处的等值面。

引进矢量微分算子(del operator)

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{1.3}$$

则可将梯度记为

$$\nabla\phi = \boldsymbol{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial\phi}{\partial z} \tag{1.4}$$

为讨论矢量场的散度和旋度，先引进面积矢量的概念。某个面元的面积矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 的大小等于该面元的面积，其方向与该面元的外法线相一致，如图 1.1 所示。其各个分量为

$$\mathrm{d}\sigma_x = \mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$\mathrm{d}\sigma_y = \mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}\sigma_z = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

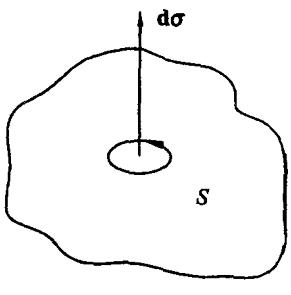

图 1.1

矢量 $\boldsymbol{A}$ 沿任一有向曲面 S 的面积分称为矢量场穿过曲面 S 的通量，即

$$\Psi = \int_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} \tag{1.5}$$

据此，矢量 $\boldsymbol{A}$ 在闭合曲面上的通量为

$$\Psi = \oint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} \tag{1.6}$$

在研究矢量场时常引进矢量线，如电力线、磁力线等。有一类场，其矢量线从场中一些点发出，终止在另一些点或无穷远处，这类场叫纵场；另外一类矢量场，其矢量线是无头无尾的闭合曲线，这类场称横场。后者对任何闭曲面的通量为零，仅前者对式(1.6) 的积分才可以是非零的。如果 $\Psi > 0$，表明有矢量线从中发出，该曲面内是有场源的；若 $\Psi < 0$，表明有矢量线终止在该闭合曲面内，即其中有吸收矢量线的汇；如果把汇看成负源，则 $\Psi \neq 0$ 的场为有源场，$\Psi = 0$ 的场为无源场。

对于无限小平行六面体的闭合表面，易于导出

$$\mathrm{d}\Psi = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

对于每一个平行六面体元都可使用以上公式，积分即得奥 - 高定理：

$$\oint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \int_\Omega \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\mathrm{d}\tau \tag{1.7}$$

该定理利用高斯积分公式，将对于封闭曲面的积分化成了体积分，式中 $\mathrm{d}\tau$ 为体积微分。当空间区域 Ω 以任意方式缩为一点 $\boldsymbol{x}_0$ 时，极限值

$$\lim_{\Omega \to x_0} \frac{\oint_\Omega \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta\Psi}{\Delta V}$$

称为矢量场 $\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 点的散度，记为 $\mathrm{div}\boldsymbol{A}$。

由此可见，矢量场中任一点的散度，就表示该点作为场源的强度。有

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{1.8}$$

上式即为散度在直角坐标系下的表达式。引用 del 算子，上式可简化为

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \nabla \cdot \boldsymbol{A} \tag{1.9}$$

下面我们讨论旋度。

设有矢量场 $\boldsymbol{A}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 沿场中任一有向闭合曲线 L 的积分为矢量 $\boldsymbol{A}$ 沿 L 的环量或环流，即

$$\Gamma = \oint_L \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1.10}$$

式中 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 是长度微分。只有横场才有不为零的环量，纵场对任意闭合回路的环量恒为零。

若取 $\boldsymbol{A}$ 为磁场 $\boldsymbol{H}$，根据安培环路定理，式(1.10) 的积分就表示沿与 L 成右手螺旋方向，通过 L 所围任一曲面的电流。电流是激发磁场的源，故若 Γ 不为零，表明 L 所围横场 $\boldsymbol{A}$ 的源不为零。环量面密度的概念就是为了描述场中一点作为横场源的强度而引进的。

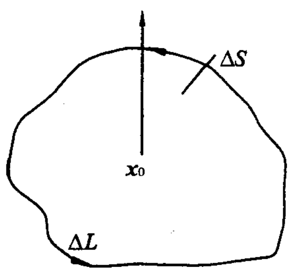

图 1.2

取矢量场中一点 $\boldsymbol{x}_0$，在该点取定方向 $\boldsymbol{n}$，并过该点作一微小曲面 ΔS，其方向恰为 $\boldsymbol{n}$。取 ΔL 为 ΔS 按右手螺旋方向的周界，如图 1.2 所示。定义矢量场沿 ΔL 的环量与面积 ΔS 之比，在 ΔS 趋于零时的极限

$$\lim_{\Delta L\to 0}\frac{\oint A\cdot \mathrm{d}l}{\Delta S}=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta\Gamma}{\Delta S}$$

为 $\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 点沿方向 $\boldsymbol{n}$ 的环量面密度。可见，环量面密度描述了场中各点横场源强度沿指定方向的投影。

利用斯托克斯积分变换公式可得

$$\oint_{\Delta L}\boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{\Delta S}\Big[\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\cos\gamma\Big]\mathrm{d}\sigma \tag{1.11}$$

再利用积分中值定理，得

$$\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta\Gamma}{\Delta S}=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\cos\gamma$$

我们定义矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋度为

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} \tag{1.12}$$

显然，$\boldsymbol{A}$ 的旋度对场中任一给定点是个矢量，由(1.11)式，场中任一点 $\boldsymbol{A}$ 沿方向 $\boldsymbol{n}$ 的环量面密度可通过 $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$ 求出，为 $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}$。这表明，某矢量的旋度在任意方向上的投影就给出沿该方向的环量面密度(或称环量强度)，因此 $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$ 的方向就是环量面密度最大值的方向，其模就是环量面密度的最大值。引用 del 算符，可表示为

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=\nabla\times\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix} \tag{1.13}$$

可见，一般情况下，$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\leqslant|\mathrm{rot}\boldsymbol{A}|$

如果一个矢量场的旋度处处为零，则称为无旋场；如果一个矢量场的散度处处为零，则称为无散场。可以证明，无旋场即纵场，无散场即横场。

三、关于 ▽ 算符的一些计算公式

以上已引进 ▽ 算子表示标量场的梯度、矢量场的散度和旋度：

$$\nabla u=\boldsymbol{i}\frac{\partial u}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial u}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial u}{\partial z} \tag{1.14}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{1.15}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} \tag{1.16}$$

该算子还可以按下述方法构成一个纯标量算子：

$$\nabla\cdot\nabla=\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{1.17}$$

称为拉普拉斯算子，可作用在标量或矢量函数上。

(1) 设 u 是标量场，则有

$$\nabla f(u)=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\nabla u \tag{1.18}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A}(u) = \nabla u \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}u} \tag{1.19}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{A}(u) = \nabla u \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}u} \tag{1.20}$$

(2) 设 u 和 v 是标量场，$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是矢量场，则有

$$\nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u \tag{1.21}$$

$$\nabla \cdot (u\boldsymbol{A}) = \nabla u \cdot \boldsymbol{A} + u\nabla \cdot \boldsymbol{A} \tag{1.22}$$

$$\nabla \times (u\boldsymbol{A}) = \nabla u \times \boldsymbol{A} + u\nabla \times \boldsymbol{A} \tag{1.23}$$

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{B} - \boldsymbol{A} \cdot \nabla \times \boldsymbol{B} \tag{1.24}$$

$$\nabla \times (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{B} \cdot \nabla)\boldsymbol{A} - (\nabla \cdot \boldsymbol{A})\boldsymbol{B} + (\nabla \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A} \cdot \nabla)\boldsymbol{B} \tag{1.25}$$

$$\nabla(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B} \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{B} \cdot \nabla)\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A} \times (\nabla \times \boldsymbol{B}) + (\boldsymbol{A} \cdot \nabla)\boldsymbol{B} \tag{1.26}$$

关于 ∇ 的二级微分运算有下列公式：

$$\nabla \times (\nabla u) = (\nabla \times \nabla)u = 0 \tag{1.27}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = (\nabla \times \nabla)\boldsymbol{A} = 0 \tag{1.28}$$

$$\nabla \cdot \nabla u = (\nabla \cdot \nabla)u = \nabla^2 u \tag{1.29}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A} \tag{1.30}$$

其中(1.27)式和(1.28)式是两个重要结论，即标量场的梯度是一个无旋场，矢量场的旋度是一个无散场。

(3) 设 $\boldsymbol{R} = (x - x')\boldsymbol{i} + (y - y')\boldsymbol{j} + (z - z')\boldsymbol{k} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'$，并且

$$R = |\boldsymbol{R}| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

记
$$\nabla' = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x'} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y'} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z'}$$

则

$$\begin{array}{ll}
\nabla R = -\nabla' R = \dfrac{\boldsymbol{R}}{R}, & \nabla r = -\nabla' r = \dfrac{\boldsymbol{r}}{r} \\
\nabla \dfrac{1}{R} = -\nabla' \dfrac{1}{R} = -\dfrac{\boldsymbol{R}}{R^3}, & \nabla \dfrac{1}{r} = -\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}, \\
\nabla f(R) = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}R}\dfrac{\boldsymbol{R}}{R}, & \nabla f(r) = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}, \\
\nabla \cdot \boldsymbol{R} = 3, & \nabla \cdot \boldsymbol{r} = 3, \\
\nabla \times \boldsymbol{R} = 0, & \nabla \times \boldsymbol{r} = 0, \\
\nabla \times \dfrac{\boldsymbol{R}}{R^3} = 0, & \nabla \times \dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3} = 0, \\
\boldsymbol{A} \cdot \nabla \boldsymbol{R} = \boldsymbol{A}, & \boldsymbol{A} \cdot \nabla \boldsymbol{r} = \boldsymbol{A}, \\
\nabla(\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{R}) = \boldsymbol{C}, & \nabla(\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{C}, \\
\nabla^2 \dfrac{1}{R} = -\nabla \cdot \dfrac{\boldsymbol{R}}{R} = -4\pi\delta(\boldsymbol{R}), & \nabla^2 \dfrac{1}{r} = -\nabla \cdot \dfrac{\boldsymbol{r}}{r} = -4\pi\delta(\boldsymbol{r})
\end{array} \tag{1.31}$$

(4) 利用 ∇ 算子，可将高斯公式、斯托克斯公式和格林公式写成

$$\oint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{A}\mathrm{d}\tau \tag{1.32}$$

$$\oint_L \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} \tag{1.33}$$

$$\oint_S u\nabla v\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=\int_V[u\nabla^2 v+(\nabla u)\cdot(\nabla v)]\mathrm{d}\tau \tag{1.34}$$

$$\oint_S (u\nabla v-v\nabla u)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=\int_V(u\nabla^2 v-v\nabla^2 u)\mathrm{d}\tau \tag{1.35}$$

四、球坐标系和柱坐标系中的重要公式

空间点的球坐标(r,θ,φ)和直角坐标有下列关系：

$$\begin{cases} x=r\sin\theta\cos\varphi \\ y=r\sin\theta\sin\varphi \\ z=r\cos\theta \end{cases}$$

可导出梯度、散度、旋度和拉普拉斯算子在球坐标系中的表达式：

$$\nabla u=\frac{\partial u}{\partial r}\boldsymbol{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi \tag{1.36}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2A_r)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} \tag{1.37}$$

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{A}=&\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(\sin\theta A_\varphi)}{\partial\theta}-\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right]\boldsymbol{e}_r+\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}\right.\\ &\left.-\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right]\boldsymbol{e}_\theta+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r}-\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\boldsymbol{e}_\varphi\end{aligned} \tag{1.38}$$

$$\nabla^2 u=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} \tag{1.39}$$

空间点的柱坐标(ρ,φ,z)与直角坐标有下列关系：

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \\ z=z \end{cases}$$

因此，梯度、散度、旋度和拉普拉斯算子在柱坐标中的表达式为

$$\nabla u=\frac{\partial u}{\partial\rho}\boldsymbol{e}_\rho+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{e}_z \tag{1.40}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial\rho}+\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial(\rho A_z)}{\partial z}\right] \tag{1.41}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_\rho+\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right)\boldsymbol{e}_\varphi+\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial\rho}-\frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}\right]\boldsymbol{e}_z \tag{1.42}$$

$$\nabla^2 u=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] \tag{1.43}$$

习　　题

1. 设 u 是空间坐标 x,y,z 函数，证明(1.18)，(1.19)和(1.20)式。

2. 设 $\boldsymbol{R}=(x-x')\boldsymbol{i}+(y-y')\boldsymbol{j}+(z-z')\boldsymbol{k}$ 是由源点(x',y',z')指向场点(x,y,z)的矢量：

(1) 证明下列结果，并体会对源变数求微商$\left(\nabla'=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x'}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y'}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z'}\right)$与对场变数求微

商($\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$)的关系。

$$\nabla R = -\nabla' R = \frac{\boldsymbol{R}}{R}, \nabla\frac{1}{R} = -\nabla'\frac{1}{R} = -\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}, \nabla\times\frac{\boldsymbol{R}}{R^3} = 0, \nabla\cdot\frac{\boldsymbol{R}}{R^3} = -\nabla'\cdot\frac{\boldsymbol{R}}{R^3} = 0$$

(2) 求 $\nabla\cdot\boldsymbol{R}$,$\nabla\times\boldsymbol{R}$,$(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{R}$,$\nabla\cdot[\boldsymbol{E}_0\sin(\boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{r})]$,$\nabla\times[\boldsymbol{E}_0\sin(\boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{r})]$,其中 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{k}_0$,$\boldsymbol{E}_0$ 均为常矢量。

3. 令 r 表示任意选取的原点到空间某点的距离,试证明标量 $\varphi = \frac{1}{r}$ 满足拉普拉斯方程。

第二章　电磁场的普遍规律及基本方程组

总的来说，电磁场理论的基础是电荷守恒定律、麦克斯韦方程组和洛仑兹力公式。它们是通过对不同条件下电磁现象实验规律的分析、概括，总结出来的基本定律。本章将重点讨论这些基本规律，并根据这些基本规律揭示电磁场的物质本质。

§2-1　电荷、电流与电荷守恒定律

一、电荷

自然界中只存在正、负两种电荷，物质微粒不管带正电荷或负电荷，其电量都是基本电荷单位 e 的整数倍。测量得出：

$$e = 1.602 \times 10^{-19}\mathrm{C}$$

任何宏观物体的电量必然也是基本电荷 e 的整数倍。因此，宏观物体电荷量严格说是量子化的。但是一个宏观物体包括数目极大的带电粒子，基本电荷单位与之相比真是小之又小，故可以认为对宏观物体电荷量连续取值，这样做对宏观物体而言是足够精确的。

为了描述电荷在带电体上的分布，引进电荷体密度 $\rho(\boldsymbol{r})$。空间 $\boldsymbol{r}$ 点的电荷体密度是包括该点在内的小区域 Ω 中的电荷总量 ΔQ 与该区域体积 ΔV 之比在 $\Delta V \to 0$ 时的极限值，即

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} \tag{2.1}$$

当带电体的大小和形状的影响可以忽略不计时，带电体上的电荷可被看成是集中在一个几何点上的电荷，称点电荷。在坐标 $\boldsymbol{r}'$ 上电量为 Q 的点电荷，其密度分布函数为

$$\rho(\boldsymbol{r}) = Q\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') \tag{2.2}$$

与此类似，当电荷分布在一个薄层中，若薄层厚度的影响可以忽略，则可用面电荷密度 $\sigma(\boldsymbol{r})$ 描写它的分布。面上 $\boldsymbol{r}$ 点的面电荷密度是包括该点的面元 ΔS 带的电荷总量 ΔQ 与面元面积 ΔS 之比，在 $\Delta S \to 0$ 时的极限值，即

$$\sigma(\boldsymbol{r}) = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S} \tag{2.3}$$

同理，若电荷沿一条细线分布，可以引进线电荷密度 $\lambda(\boldsymbol{r})$ 描述电荷分布。线上 $\boldsymbol{r}$ 点的线电荷密度是在含有该点的线元 Δl 上的电荷总量 ΔQ 与线元 Δl 之比，当 $\Delta l \to 0$ 时的极限值，即

$$\lambda(\boldsymbol{r}) = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta l} \tag{2.4}$$

当然，任何实际的带电体，其电荷不可能分布在一个几何点、几何面或几何线上，点电荷、面电荷、线电荷只是一定条件下实际问题的抽象。

二、电流

电荷在空间的运动形成电流。这里我们引进电流密度矢量 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ 来描述电流的分布。电流场中 $\boldsymbol{r}$ 点的电流密度矢量，其方向就是该点电流流动的方向，大小等于过该点与电流垂直的面元 ΔS 上流过的电流强度 ΔI 与面元 ΔS 之比，当 $\Delta S \to 0$ 时的极限值，即

$$j(r) = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta I}{\Delta S} \tag{2.5}$$

如果电流是由一种带电粒子的运动形成的，设这种带电粒子的电荷密度为 $\rho(\boldsymbol{r})$，运动速度为 $\boldsymbol{v}$，则电流密度为

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = \rho(\boldsymbol{r})\boldsymbol{v} \tag{2.6}$$

如果电流是由几种带电粒子运动形成的，则总电流密度矢量等于每一种带电粒子电流密度的矢量和。

如果电流存在的空间是一个厚度可以忽略的薄层，那么可以用面电流密度 $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{r})$ 来描述电流分布。面上 $\boldsymbol{r}$ 点的面电流密度，其方向为沿该点的电流流动方向，大小定义为过该点与电流垂直的线元 Δl 上流过的电流 ΔI 与线元长度 Δl 之比，当 $\Delta l \to 0$ 时的极限值，即

$$\alpha(\boldsymbol{r}) = \lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta I}{\Delta l} \tag{2.7}$$

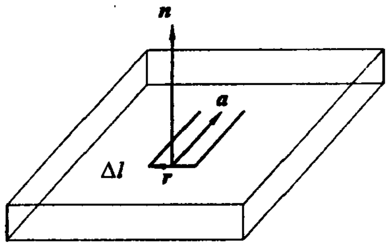

图 2.1

在电流场中，电流密度矢量 $\boldsymbol{j}$ 通过任一有向曲面的电流强度，就是电流密度矢量对 S 面的通量，也就是电流强度。

$$I = \int_S \boldsymbol{j}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} \tag{2.8}$$

类似地，在面电流情况下，流过面上任一曲线 L 的电流强度可表示为

$$I = \int_L (\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\alpha})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{2.9}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为垂直于电流所在平面的单位矢量。

三、电荷守恒定律

实验和事实都表明，在一个物理系统中不论发生任何变化过程，系统中的电荷总量不变。这个实验事实称为电荷守恒定律，它是迄今为止人们认识到的自然界中精确成立的少数几个基本定律之一。

考虑由闭合界面 S 包围的空间区域 V，由于电荷守恒，V 中发生的任何过程都不会引起电荷的产生和消灭，V 中的电荷增加率必等于单位时间内由界面 S 流入的电荷，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho\mathrm{d}\tau = -\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{j} \tag{2.10}$$

这就是电荷守恒定律的积分表示。当区域 V 取定时，V 中的电荷增加率等于其中各点电荷增加

率之和，对上式右边应用高斯公式得

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau = -\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{j} d\tau$$

考虑到上式对任意区域 V 成立，被积函数必处处相等。于是

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{j} = 0 \tag{2.11}$$

这就是微分形式的电荷守恒定律，又称电流连续性方程。

在稳恒情况下，电荷密度与时间无关。因此，稳恒电流连续性方程为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{j} = 0 \tag{2.12}$$

其积分形式为

$$\oint d\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{j} = 0 \tag{2.13}$$

这表明稳恒电流线总是闭合的。

§2-2 真空中的静电场与稳恒电流的磁场

在本节中，我们将复习普通物理中学过的有关定律并加以深化，这是电磁场理论的基础。

一、真空中的静电场

1. 库仑定律，电场

库仑定律是静电情况下的一条基本实验规律，表述如下：真空中静止的点电荷 Q' 对另一静止点电荷 Q 的作用力为

$$\boldsymbol{F} = \frac{QQ'\boldsymbol{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \tag{2.14}$$

其中 ε_0 是真空介电常数，$\boldsymbol{R}$ 是由电荷 Q' 所在点引向电荷 Q 所在点的矢量，$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'$，$R = |\boldsymbol{R}|$，如图 2.2 所示。库仑定律表明，真空中静止的两个点电荷之间的作用力大小与点电荷电量乘积成正比，与相互间距离的平方成反比；作用力沿点电荷连线；同号电荷相斥，异号电荷相吸。

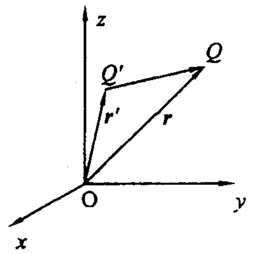

图 2.2

库仑定律正确描述了真空中两个静止点电荷作用力的大小和方向，但它并没有揭示这个作用力的物理本质。也就是说，这个作用力是哪里来的。法拉第以前的传统观念认为，电荷之间的作用是“超距作用”，即一个带电体不通过任何中间媒介，直接地、瞬时地把作用力施加到另一个带电体上。法拉第最早引入“场作用”的概念，认为电磁作用是通过“场”，以有限速度传播过去的。这两种观点都可以解释库仑定律。但在电荷运动变化的情况下，场可以离开电荷在空间单独存在，这两种观点显示出本质上的不同的物理内容。现代物理已抛弃了“超距”作用的观点，认为任何相互作用都是通过物理场进行的，场本身是物质存在和运动的一种方式。电磁场就是传播电磁