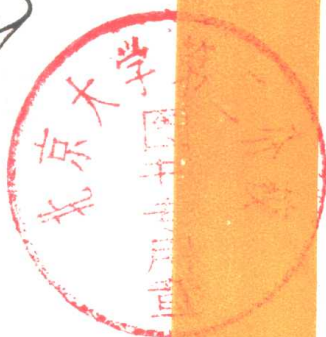
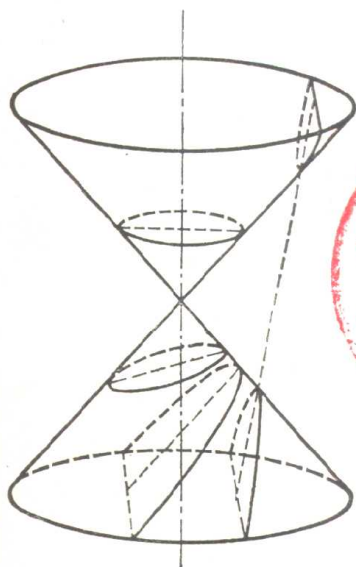


中学数学辅导员丛书

JIEXIJIHE
JICHU

解析几何基础

刘鸿坤 编著



科学普及出版社

G633.6
5

中学数学辅导员丛书

解析几何基础

刘鸿坤 编著

科学普及出版社

15382

内 容 提 要

本书为“中学数学辅导员丛书”之一，是介绍平面解析几何最基本知识的。

编著者从现行中学数学教学大纲和教材出发，着重讲述了解决问题的思想方法，对重点内容和基本技能，做了多次反复、螺旋上升的处理。每章开始，都提出了学习要求；每章末尾，列出了思考题、复习题以及学习指导。习题和思考题均有解答或提示。有关章节还列举了饶有趣味的数学史料。

全书思路清楚，重点突出，文字流畅，是一本有益于中学师生、理工科大学低年级学生以及数学爱好者的参考读物。

中学数学辅导员丛书

解 析 几 何 基 础

刘 鸿 坤 编 著

责任编辑：吴之静

封面设计：窦桂芳

*

科学普及出版社出版（北京白石桥紫竹院公园内）
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
北京印刷一厂印刷

*

开本：787×1092毫米^{1/32} 印张：10 字数：218千字

1982年5月第1版 1982年5月第1次印刷

印数：1—70,000册 定价：0.90元

统一书号：13051·1202 本社书号：0344

编 者 的 话

多年来，广大中学师生普遍感到，在浩如烟海的出版物中，能切实配合中学文化课教学的优秀课外读物为数甚少。与此同时，社会上又有成千上万的知识青年，正在各自的岗位上，通过业余自修，弥补十年动乱给他们造成的损失，走自学成材之路，他们更是渴望有不同于正规学校课本的辅导读物，供自学之用。

正是针对以上情况，我们组织编写了《中学数学辅导员丛书》。

本丛书参照教育部制定的全日制十年制中学数学教学大纲的内容，按不同的数学分支，分册编写。

本丛书的编写要求和特点是：

一、内容密切结合中学现用统编教材，但绝不是教材的重复。它从数学自身的系统出发，着重在讲清基本概念和基本理论。

二、每一分册自成体系，首先引入与重点内容相关的预备知识。每章前，有引导文字，强调重点；章末，有总结性的概述，以便于自学。

三、论述中注意理论联系实际，引入概念时尽量从实例出发。

四、配备适量的习题，但不搞题海战术。凡初学者必须掌握的知识，均给出练习题、解题方法和答案。例题的讲解，着重于讲清解题思路，启发和培养学生的思维能力。

五、力求内容翔实，资料丰富，说理清楚，文字生动。
适当引入与内容相关的历史事实，以增加趣味性。

我们希望：本丛书对中学生和自学青年能起到辅导员作用，对中学教师能起到助手作用。

本丛书无论在内容和编写方法上均可能有不当之处，还望读者和专家不吝赐教。

编 者

一九八一年六月

前 言

这本《解析几何基础》顾名思义是介绍解析几何最基本知识的。目的是为中学生学习解析几何提供一份辅导资料，同时为爱好数学的青年进一步学习高等数学打下基础。此外，也可中学数学教师教学和开展课外数学小组活动时提供参考资料，并作为大学一年级学生学习解析几何的补充读物。

全书共七章。前三章大部分无需高中数学知识就可阅读，接下来的四章则要求懂得如何使用几何、代数、三角等综合知识。在编写中，我们注意了从现行中学数学教学大纲和教材出发，着重讲清解决问题的思想方法；对于涉及到象由曲线求它的方程和适当选取坐标系等重点内容和基本技能，做了多次反复、螺旋上升的处理。全书除了配置适量的例题外，还选编了问答题、练习题、思考题和复习题共三百多个，并附有提示和答案，以帮助读者掌握最基本的内容。同时，在基础知识和基本训练方面，给以适当的提高和补充。

在第一章、第四章和第六章中，我们还特地加入了一些历史资料，以扩大读者的知识面，并提高阅读兴趣。

为了便于自学，减少初学者的困难，每一章开头提出了学习要求，末尾列出了思考题和复习题，又写了学习指导。读者在学习时可以先看一下学习要求，对该章的内容和学习要求做到心中有数；阅读正文后，参考每章学习指导，自己动手整理该章的主要内容，巩固所学到的知识。复习题在综

合运用知识方面有一定的要求，必须在熟悉基本概念和基本运算的基础上予以解答。这样，才有助于达到知识上的融会贯通和技能技巧上的进一步提高。同时，这也是读者检查自己是否达到了学习要求的依据之一。

由于水平的限制，本书在内容安排和习题配置等方面，还存在许多问题，恳请读者批评指正。

目 录

第一章 绪 论	1
第二章 平面坐标法	9
§ 2.1 有向线段	9
§ 2.2 几个基本问题	17
§ 2.3 适当选取坐标系	29
§ 2.4 曲线与方程	33
第三章 直线与二元一次方程	55
§ 3.1 直线的方程	55
§ 3.2 直线方程的法线式	66
§ 3.3 点、直线间的相互关系	73
§ 3.4 直线系	89
第四章 圆锥曲线与二元二次方程	109
§ 4.1 圆	112
§ 4.2 椭圆	133
§ 4.3 双曲线	149
§ 4.4 抛物线	165
§ 4.5 圆锥曲线的切线和法线	175
§ 4.6 解轨迹问题的几种方法	186
第五章 坐标变换	204
§ 5.1 利用移轴化简方程	204
§ 5.2 利用转轴化简方程	206
§ 5.3 一般二次方程的讨论	216
§ 5.4 一般二次方程的化简	218

第六章 极坐标	230
§ 6.1 极坐标系	231
§ 6.2 极坐标和直角坐标之间的关系	234
§ 6.3 极坐标系下曲线的方程	238
§ 6.4 极坐标方程的讨论和作图	251
§ 6.5 利用极坐标求轨迹的方程	260
第七章 参数方程	271
§ 7.1 曲线的参数方程	271
§ 7.2 消去参数与选择参数	275
§ 7.3 由参数方程画图	285
§ 7.4 参数方程的应用	289

第一章 绪 论

解析几何学是以坐标方法为基础，运用代数方法来研究几何对象的科学。它包含两类基本课题：(i) 从给出轨迹的几何条件，通过适当选取坐标系来确定它们的方程。(ii) 从给出坐标 x, y 间的方程，作出满足这方程的图形。前者的研究是利用一些轨迹条件，选取坐标系来确定它们的方程，而后者往往从曲线方程的代数性质的研究来推导它的某些几何性质。

解析几何产生于十七世纪前期决不是偶然的，当时欧洲正过渡到新的资本主义生产方式时期，由于生产的发展，推动了科学的进步。首先，哥白尼 (Copernicus, N. 波 1473—1543) 提出了日心地动学说，推翻了长期被教会利用的错误的托勒密的地心假说。开普勒 (Kepler, J. 德 1571—1630) 在此基础上发现行星沿椭圆轨道绕着太阳运动。伽利略 (Galilei, G. 意 1564—1642) 发现抛出去的石子沿着抛物线轨道飞去，从而进一步确定了抛射体运动轨道的抛物线形状。此外，由抽水机的扬程问题，引起帕斯卡 (Pascal, B. 法 1623—1662) 等人发现的大气压力随着高度增加而递减的法则，诸如此类不胜枚举。所有这些科学的发现促进了数学相应的发展。尽管当时一些最优秀的数学家已经接近了解析几何的观念，但是只有勒奈·笛卡儿 (Descartes, R. 法 1596—1650) 和庇埃尔·费尔马 (Fermat, P. 法 1601—1665) 两位数学家，他们注意到曲线研究中的一般方法，敏

锐地看到了数量方法的必要。而且注意到代数具有提供这种方法的力量，因此，他们就用代数来研究几何。



笛卡儿 (Descartes)

笛卡儿于1596年3月31日出生在法国西部土伦的拉哈耶。他是法国著名的哲学家，是近代生物学的奠基人，第一流的物理学家。虽然他声称平生信奉正教，但是在科学上他却是一个地道的怀疑论者。当他八岁的时候，他的父亲把他送进昂茹的拉弗莱希地方的一个耶稣会

学校。因为他身体不好，被允许每天早上在床上工作，这习惯他一直保持到老。他十六岁离开拉弗莱希，二十岁毕业于普瓦界大学，去巴黎当律师。二十一岁那年，他应征到奥伦治的毛雷斯公爵的部队里服兵役。他当士兵的那些岁月是空闲的，这使他能有机会到荷兰、德国等国家，所见所闻丰富了他的科学知识，并且使他腾出时间来进行刻苦学习。有一次，他在荷兰布莱达的街上散步，被一张荷兰文的招贴所吸引。他不懂荷兰文，便请求站在旁边的人译成拉丁文或法文给他看。这人正好是多特学院的院长艾萨克·毕克门，他答应了这一请求。原来这张广告是当时数学家的一种挑战书，列有难题，广征答案。笛卡儿却在数小时内解决了，毕克门大为佩服。这使笛卡儿自信有数学才能，从而开始认真地用心于数学研究。在那段时间里，数学是他珍爱的一门科学。回到巴黎后，他为望远镜的威力所激动，闭门钻研光学仪器的理

论与构造。1629 到 1649 年，他是在荷兰度过的，主要是研究物理和哲学。1637 年他发表了“方法论讲演集”，其中有一篇是论几何学的，它长达一百零六页。1649 年他被邀请去瑞典做古斯塔夫斯·阿道弗斯的女儿克里斯蒂纳女皇的教师。一年之后，他在斯德哥尔摩患肺炎去世。

笛卡儿的《几何学》由三“大卷”组成。第一卷是应付“仅用圆规和直尺就能解决的作图问题”。第二卷是“论曲线之特性”。第三卷是处理“三次和三次以上的作图问题”。笛卡儿的理论以两个观念为基础：坐标观念和利用坐标方法把带有两个未知数的任意代数方程看成平面上的一条曲线的观念。他最先应用两个数或三个数的数组，例如 (A, B) 或 (A, B, C) 当作坐标来代表一个平面上或一个空间中的点。用这种方法，欧氏几何中有关图形的说明都可用数来解释。据说，他在患病卧床时，观察一个蜘蛛在天花板上爬，然后又顺着吐出的丝渐渐地降下来，这就启发了他用 (A, B, C) 代表空间中各个点的想法。他是用字母，例如 a, b, c , x, y, z 来代表正数的第一个人。他用几何的方法去研究代数方程的解，同时又反过来通过代数方程去研究几何作图问题，这就是最初的解析几何学的基本思想。由于笛卡儿把代数与几何学密切地结合起来，所以直到现在仍沿用着笛卡儿坐标的名称，以纪念这位科学大师。如果点用坐标表示，那末图形之间的关系可以用方程来表示，这就使几何与代数融为一体。笛卡儿学说，到十八世纪开放了灿烂之花，就是现代数学中也还在继续发展着。

笛卡儿在他的几何里所解决的第一个重要课题是“帕普斯问题”，即“在一平面上给定若干直线，要找出一个点的轨迹，这个点到这些定线所作的若干垂线，或更一般地，按一

些给定的角度所作的若干直线，将能满足下列条件，那就是它们中间某几个的乘积和其余几个的乘积之比等于一个给定的数值”。关于这个著名的问题，古希腊人只是解决了它的一个特殊情况，即所给定的直线是四条的情形，这时点的轨迹成为一条圆锥曲线。笛卡儿完全地解决了这个问题。这里不妨以四条直线时的帕普斯问题，看笛卡儿的做法。

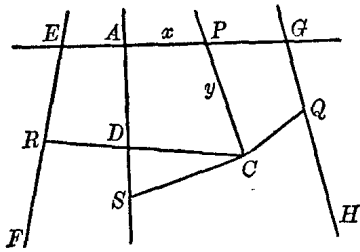


图 1.1

他先设给定的线（图 1.1）是 AG, GH, EF 和 AD 。考虑一点 C ，从点 C 引四条线各与一条已知线交于已知角，把所得的四条线段记为 CP, CQ, CR 和

CS ，然后，他选定一条线 AG 作为基线，以点 A 为原点，记 AP 为 x （ x 值是基线上的长度，从 A 量起），记 PC 为 y （ y 值是一个线段的长度，由基线出发，与基线作成一个固定的角度）。他从已知量得出 CR, CQ 和 CS 的值，把这三个值代入 $CP \cdot CR = CS \cdot CQ$ ，他就得到一个关于 x 和 y 的二次方程

$$y^2 = Ay + Bxy + Cx + Dx^2, \quad (1)$$

其中 A, B, C, D 是由已知量组成的简单的代数式，于是他指出，如果任意给出 x 一个值，就得到一个 y 的二次方程，从这个方程可以解出 y 。如果我们取无穷多个 x 值，就得到无穷多个 y 值，从而得到无穷多个点 C 。所有这些 C 点的轨迹，就是方程 (1) 所代表的曲线。但是，笛卡儿的坐标系是不完整的，因为他考虑的是线段和坐标间的关系，而不是点和坐标间的关系。他的 x, y 只取正值，其图象局限于第一

象限之内，但方程(1)所代表的曲线却无此限制。笛卡儿简单地假定轨迹根本上位于第一象限之内，只附带地说了一下在第一象限外可能出现的情况，他又不自觉地假定了对于每个正实数有一个长度。对笛卡儿说来，一个字母永远只是代表着一个正数。

现代的解析几何学是在笛卡儿(还有费尔马)的基础上发展起来的。和笛卡儿同时代的费尔马，分享着解析几何创立的荣誉。费尔马生于1601年8月20日，出生在法国南部土鲁兹附近的波蒙。他是土鲁兹城的市议会的顾问，世界上最卓越的数学家之一。他在一篇题为“平面轨迹和空间轨迹导论”的论文中发展了关于解析几何的思想，费尔马早就叙述出他的一般原理：“只要在最后的方程里出现了两个未知量，我们就得到一个轨迹，这两个量之一，其末端就描绘出一条直线或曲线。”图1.2中对于

不同位置的 E ，其末端 $J, J', J'', \dots$ 就把“线”描出。他的未知量 A 和 E ，实际上是变数，或者说，联系 A 和 E 的方程是不确定的。不仅如此，他

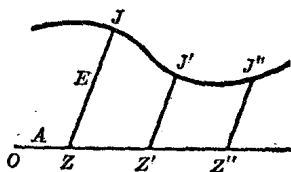


图 1.2

还把直线和二次曲线的方程都写了出来，用我们的写法就是：

- | | |
|---------------|--------------------------------|
| 1. 通过原点的直线方程： | $Dx = By.$ |
| 2. 任意直线的方程： | $d(a-x) = by.$ |
| 3. 圆的方程： | $B^2 - x^2 = y^2.$ |
| 4. 椭圆的方程： | $a^2 - x^2 = ky^2.$ |
| 5. 双曲线的方程： | $a^2 + x^2 = ky^2$ 和 $xy = a.$ |
| 6. 抛物线的方程： | $x^2 = ay.$ |

现在的解析几何，这些曲线的方程和它们基本相同。费尔马有比笛卡儿更为明确的坐标概念和坐标轴的概念。但是他和笛卡儿一样，不用负坐标，他的方程不能象他所说代表整个曲线，但他确实领会到坐标轴可以平移或旋转，因为他给出一些较复杂的二次方程，并给出它们可能简化的形式，因此他肯定：一个联系着 A 和 E 的方程，如果是一次的，就代表直线轨迹，如果是二次的，就代表圆锥曲线。

尽管笛卡儿和费尔马研究解析几何的方式和目的有显著的不同，但是他们之间却发生了谁先发现解析几何的争论。事情经过是这样：费尔马的著作直到 1679 年才出版，但他在 1629 年已发现了解析几何的基本原理，这比笛卡儿发表《几何》的年代 1637 年还早。笛卡儿当时已完全知道费尔马的许多发现，但否认自己的思想是从费尔马那里来的。最后，荷兰数学家艾萨克·毕克门，证实解析几何中的许多基本思想，无疑是笛卡儿在 1619 年首创的，从而结束了这场争论。

当今，解析几何中所用的“坐标”、“横坐标”和“纵坐标”等名词是由德国的莱布尼兹 (Leibniz, G. W. 1646—1716) 首先提出的。在英国的牛顿 (Newton, I. 1642—1727) 的著作中第一次使用了坐标和正确地运用了纵横轴，并对二次和三次曲线进行了较系统的研究。

十八世纪中期，解析几何的内容已很丰富，基本上达到了成熟的阶段。瑞士科学家欧拉 (Euler, L. 1707—1783) 则作了一些总结性的研究。1748 年出版了他的名著《无穷小的分析入门》，此书第二卷讨论了平面曲线的性质，被誉为第一本解析几何学的课本。在这本书中，一开始就建立了如图 1.3

所示的坐标系。设 RS 是一给定的直线， A 是 RS 上的一个定点， P 是 RS 上的一个任意（动）点。

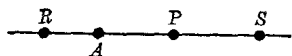


图 1.3

AP 之值为 x ，当 P 趋向于 A ，

且与 A 重合时， $x=0$ 。欧拉把线段 AP 定义为“横坐标”。 AP 的值按照两个相反的方向变化。这里的点 A ，就是现在所说的原点，直线 RS 是横轴。

然后，再过点 A 作 $AB \perp RS$ ， M 是平面上一条曲线上的

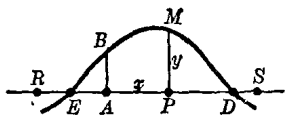


图 1.4

的点（如图 1.4）。点 M 的坐标分别为 x 和 y ，当 $x=0$ 时， $y=AB$ ；当 $x=AP$ 时， $y=PM$ ；如果 $x=AD$ ，那么 $y=0, \dots$ 。

这个坐标不足之处，在于纵轴没有用一整条直线表示，而是用一线段。不过这线段可以根据实际情况，任意决定长短。而欧拉在另外一书中曾经用互相垂直的两条直线建立了直角坐标系，以 O 为原点。

此外，欧拉还给出了平移和旋转的最早的公式、平面代数曲线的分类、二次曲线的切线与渐近线、极坐标与参数方程等。欧拉以后，又有许多数学家继续研究解析几何，使其内容日臻完善，达到了今天的样子。十七世纪以来数学的巨大发展，在很大程度上应归功于解析几何。

解析几何经历了这样长的发展道路，看来它应已发展到了尽头。然而，事实上却并非如此。在十九世纪末，许多卓越的分析学家认为，必须研讨无穷维的解析几何。于是，急剧地发展成为数学的一大分支——泛函分析。有趣的是，无穷维的解析几何有重要的实际应用，而且在现代物理学里占有基本的地位。另一个新的宽广的数学分支——代数几

何。它是普通解析几何的更直接的推广，它研究在笛卡儿坐标里由代数方程表示的曲线、曲面和超曲面。这些方程不仅是一次的和二次的，而且还有高次的。在这些研究中不仅考虑实数坐标，而且也考虑复数坐标，即考虑在所谓复空间里的东西。以上两个数学分支都只是一半地代表了古典解析几何直接的延续：在泛函分析里有许多是分析内容，在代数几何里有不少函数论和拓扑学的内容。