内蒙古自然科学基金项目

论 文 集

1986—1990

Academic Theses Supported by Inner Mongolia Foundation for Natural Sciences

内蒙古大学出版社

内蒙古自然科学基金项目

论 文 集

（1986—1990）

主编 陈杰

内蒙古大学出版社

一九九三年

（内蒙）新登字6号

内蒙古自然科学基金项目

论　文　集

（1986—1990）

主编　陈杰

内蒙古大学出版社出版发行
（呼和浩特市大学西路1号）
内蒙古自治区新华书店经销
内蒙古大学新技术公司印刷厂印刷
开本：787×1092/16　印张：11.5　字数：273千
1993年12月第1版 1993年12月第1次印刷
印数：1—1000册
ISBN 7—81015—373—0/Z·20
定价：8.00元

前　言

这个集子是内蒙自治区自然科学基金委员会成立以来、第一个五年(1986—90)内得到基金支持的、以论文和专著形式发表的基础研究成果的一个总汇。通过它可以大致了解近年来基础科学研究工作在自治区发展的一个概貌。但有几点要说明：

一、它反映不了全貌。还有些基础研究工作本书未能收录，因为它们不是本基金支持的成果。这类成果还是不少的，例如得到国家自然科学基金支持的工作或隶属于其它部委的有些企事业单位工作人员的作品等。

二、即使是本基金支持的工作，这里收录的也不能说完全。编纂这本集子的主意是后来萌发的。我们没有注意积累资料，这次材料收集就费了不少时间，还难免有遗漏。

三、为了节省篇幅，这里全文转录论文 19 篇，摘要刊载 39 篇，其它 419 项工作只著录了标题。全文和摘要的挑选自然注意了学术质量，但学术质量不是被考虑的唯一因素。

自治区自然科学基金委员会是在许令妊同志任职科委主任期间组建起来的。继任的李铁生同志也十分关注这项工作。在人们到处都在慨叹短期行为的今天，他们有远见的科技领导工作受到了学界的赞扬(虽然由于具体原因，基金委的拨款确实嫌少，但这不是他们的过错)。

陈　杰

1993 年于内蒙古大学

1986——1990

内蒙古自然科学基金项目论文集

目　录

论文全文

数　学

物理学

化　学

生物学

畜牧兽医科学

医　学

论文摘要

数　学

物理学

化　学

生物学

畜牧科学

医　学

论文和专著目录

数 学

非线性中立型时滞微分方程的解的性态

斯 力 更

（内蒙古师范大学）

有关时滞微分方程解的稳定性，已有不少的研究成果[1-3]，但对于时滞微分方程解的其它性态研究的还不够，其中滞后型方程尚有些研究[4]，而中立型方程能见到的研究资料也不多[5].

1965 年 Bellman[6]曾提出过如下的问题：若方程 $u'(t)+au(t-r)=0$ 的所有解当 $t\to+\infty$ 时趋于零，且当 $t\geqslant0$ 时，$|r(t)-r|\leqslant\sigma$（为充分小），那末方程 $u'(t)+au(t-rt)=0$ 的所有解是否当 $t\to\infty$ 时也趋于零呢？这个问题至今尚未得到解决.

1979 年秦元勋教授也曾提出研究变时滞微分方程解的稳定性，可对比着常时滞方程 $\dot{x}(t)=F(t,x(t),x(t-h))$ 研究变时滞方程 $\dot{x}(t)=F(t,x(t),x(t-\iota(t)))$. 这样就需要研究这两个方程解的性质是否一致？在什么条件下一致？这些问题目前尚不清楚.

本文提出一种方法，对于非线性中立型时滞微分方程，探讨有关类似上述问题的解析性态，从而对上述所提问题给出一种解答，同时还改进了文[5]中的研究.

考虑如下的非线性中立型时滞微分方程

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t-r_i(t)),\dot{x}(t-r_i(t))) \qquad (i=1,2) \tag{1.i}$$

其中 $r_1(t)$ 为 t 的非负连续函数，$r_2(t)\equiv r_2=const.>0$.

在其相应的初始集合 $E_0^{(i)}(i=1,2)$ 上给定如下的连续初始函数

$$x(t)=\varphi(t),\dot{x}(t)=\dot{\varphi}(t), \tag{2}$$

其中 $E_0^{(1)}$ 是由点零以及当 $t\geqslant0$ 时而小于零的 $t-r_1(t)$ 之值所组成，$E_0^{(2)}=[-r_2,0]$.

设函数 $f(t,x,y,u)$ 于区域 $G:t\geqslant0,|x|\leqslant H,|y|\leqslant H,|u|\leqslant H$ 上满足如下条件

i) $f(t,x,y,u)$ 连续有界；

ⅱ) $|f(t,x_1,y_1,u_1)-f(t,x_2,y_2,u_2)|$

$\leqslant k_1(t)|x_1-x_2|+k_2(t)|y_1-y_2|+k_3(t)|u_1-u_2|$

ⅲ) $k_i(t)(i=1,2,3)$为非负连续函数且

$$\int_0^{+\infty}(k_i(t)dt \leqslant k_i = const.\ (i=1,2,3), k_3(t) \leqslant \beta < 1.$$

于是有如下的

定理1 在中立型方程(1.1)、(1.2)中，$f(t,x,y,u)$满足条件 ⅰ)、ⅱ)、ⅲ)且当 $t\geqslant 0$ 时 $|r_1(t)-r_2|\leqslant\sigma$(为充分小)，则对任意给的 $\varepsilon>0$，方程(1.1)与(2)的解 $x(t,r_1(t))$和(1.2)与(2)的解 $x(t,r_2)$有如下的关系：$|x(t,r_1(t))-x(t,r_2)|<\varepsilon$，对于一切 $t\geqslant 0$ 成立.

证 由于当 $t\geqslant 0$ 时，$|r_1(t)-r_2|\leqslant\sigma$(为充分小)而 $r_2>0$，故可推得：当 $0\leqslant t\leqslant r_2-\sigma$ 时，$t-r_1(t)\leqslant 0$.

若不然，当 $0\leqslant t\leqslant r_2-\sigma$ 时，有 $t-r_1(t)>0$ 故 $r_2-\sigma>r_1(t)$；另外，由于当 $t\geqslant 0$ 时，$|r_1(t)-r_2|\leqslant\sigma$ 可得 $r_1(t)\geqslant r_2-\sigma$ 这与上式矛盾，故当 $0\leqslant t\leqslant r_2-\sigma$ 时，$t-r_1(t)\leqslant 0$ 成立.

于是，令 $r_1=r_2-\sigma$，由方程(1.1)、(1.2)和初始条件(2)可得如下等价的积分方程

$$x(t,r_i(t)) = \varphi(0) + \int_0^t f(t,x(t,r_i(t)),\varphi(t-r_i(t)),\dot{\varphi}(t-r_i(t)))dt, \quad 0\leqslant t\leqslant r_i\ (i=1,2) \tag{3}$$

和

$$x(t,r_i(t)) = \varphi(0) + \int_0^{r_i} f(t,x(t,r_i(t)),\varphi(t-r_i(t)),\dot{\varphi}(t-r_i(t)))dt + \int_{r_1}^{t} f(t,x(t,r_i(t)),x(t-r_i(t),r_i(t)),\dot{x}(t-r_i(t),r_i(t)))dt, \quad r_i\leqslant t\ (i=1,2), \tag{4}$$

其中 $x(t,r_i(t))(i=1,2)$表示相应方程$(1,i)(i=1,2)$的解.

下面分三种情形讨论：

(Ⅰ)当 $0\leqslant t\leqslant r_1$ 时，由(3)及条件 ⅱ)有

$$|x(t,r_1(t)) - x(t,r_2) \leqslant m_1 + \int_0^t k_1(t)|x(t,r_1(t)) - x(t,r_2)|dt, \tag{5}$$

其中 $m_1 = \int_0^{r_2} k_2(t)|\varphi(t-r_1(t)) - \varphi(t-r_2)|dt + \int_0^{r_1} k_3(t)|\dot{\varphi}(t-r_1(t)) - \dot{\varphi}(t-r_2)|dt$

由于 $\varphi(t)$、$\dot{\varphi}(t)$在 $E_0^{(i)}(i=1,2)$上连续，故对任给的 $\varepsilon_1>0$ 都存在一 $\delta(0<\delta)$，使得，当 $|r_1(t)-r_2|<\delta$ 时，有

$$|\varphi(t-r_1(t))-\varphi(t-r_2)|<\varepsilon_1,\ 0\leqslant t\leqslant r_1,$$
$$|\dot{\varphi}(t-r_1(t))-\dot{\varphi}(t-r_2)|<\varepsilon_1,\ 0\leqslant t\leqslant r_1.$$

故 $m_1\leqslant H_1\varepsilon_1$，其中

$$H_1 = \int_0^{r_1}[k_2(t) - k_3(t)]dt.$$

根据 *Gronwall－Bellman* 不等式，由(5)可得

$$|x(t,r_1(t))-x(T,r_2)|\leqslant H_1e_1exp(\int_0^t k_1(t)dt),0\leqslant t\leqslant r_1. \tag{6}$$

(Ⅰ)当 $r_1\leqslant t\leqslant r_2$ 时，由(3)和(4)及条件 i)和 ii)有

$$|x(t,r_1(t))-x(t,r_2)|\leqslant H_1e_1+2M(r_2-r_1)$$
$$+\int_0^t k_1(t)|x(t,r_1(t))-x(t,r_2)|dt,$$

其中常数 M 满足 $|f(t,x,y,u)|\leqslant M$.

从而，可推得

$$|x(t,r_1(t))-x(t,r_2)|\leqslant[H_1e_1+2M(r_2-r_1)]exp\left(\int_0^t k_1(t)dt\right),r_1\leqslant t\leqslant r_2. \tag{7}$$

(Ⅱ)当 $r_2\leqslant t$ 时，由(4)及条件 i)和 ii

$$|x(t,r_1(t))-x(t,r_2)|\leqslant H_1e_1+2M(r_2-r_1)$$
$$+\int_{r_2}^t k_1(t)|x(t,r_1(t))-x(t,r_2)|dt$$
$$+\int_{r_2}^t k_2(t)|x(t-r_1(t),r_1(t))-x(t-r_2,r_2)|dt$$
$$+\int_{r_2}^t k_3(t)|\dot{x}(t,r_1(t),r_1(t))-\dot{x}(t-r_2,r_2)|dt$$
$$\leqslant H_1e_1+2M(r_2-r_1)+\int_0^t[k_1(t)+k_2(t+r_2)]|x(t,r_1(t))-x(t,r_2)|dt$$
$$+\int_0^t k_3(t+r_2)|\dot{x}(t,r_1(t))-\dot{x}(t,r_2))|dt$$
$$+\int_{r_2}^t k_2(t)|x(t-r_1(t),r_1(t))-x(t-r_2,r_1(t))|dt$$
$$+\int_{r_2}^t k_3(t)|\dot{x}(t-r_1(t),r_1(t))-\dot{x}(t-r_2,r_1(t))|dt. \tag{8}$$

另外，只要注意到 $k_2(t+r_2)\leqslant\beta<1$，由方程(1.1)和(1.2)类似(8)式的推导，可得

$$\int_0^t|\dot{x}(t,r_1(t))-\dot{x}(t,r_2)|dt\leqslant m_2[H_1e_1+2M(r_2-r_1)]$$
$$+m_2\int_0^t[k_1(t)+k_2(t+r)]|x(t,r_1(t))-x(t,r_2)|dt$$
$$+m_2\int_{r_2}^t k_2(t)|x(t-r_1(t),r_1(t))-x(t-r_2,r_1(t))|dt$$

$$+ m_2\int_{r_2}^{t} k_3(t)\,|\dot{x}(t-r_1(t),r_1(t)) - \dot{x}(t-r_2,r_1(t))|\,dt,$$

其中，
$$m_2=(1-\beta)^{-1}. \tag{9}$$

由(8)和(9)可推得

$$\begin{aligned}|x(t,r_1(t)) - x(t,r_2)| \leqslant{}& m_2[H_1e_1 + 2M(r_2-r_1)]\\ &+ m_2\int_0^t [k_1(t)+k_2(t+r)]\,|x(t,r_1(t)) - x(t,r_2)|\,dt\\ &+ m_2\int_{r_2}^t k_2(t)\,|x(t-r_1(t),r_1(t)) - x(t-r_2,r_1(t))|\,dt\\ &+ m_2\int_{r_2}^t k_3(t)\,|\dot{x}(t-r_1(t),r_1(t)) - \dot{x}(t-r_2,r_1(t))|\,dt.\end{aligned} \tag{10}$$

由条件 i)可推得

$$|x(t-r_1(t),r_1(t))-x(t-r_2,r_1(t))|\leqslant M|r_1(t)-r_2|,\ t\geqslant r_2, \tag{11}$$

其中 $|\dot{x}(t,r_1(t))|=|f(t,x(t,r_1(t),r_1(t)),x(t-r_1(t)),\dot{x}(t-r_1(t),r_1(t)))|\leqslant M$

和

对任意给的 $e_1>0$ 存在一 $\delta(0<\delta)$ 使得当 $|r_1(t)-r_2|<\delta$ 时，有

$$|\dot{x}(t-r_1(t),r_1(t))-\dot{x}(t-r_2,r_1(t))|<e_1,\ t\geqslant r_2. \tag{12}$$

故，由(10)、(11)、(12)，当 $\sigma<\delta$ 时，有

$$|x(t,r_1(t)) - x(t,r_2)| \leqslant H_2 + \int_0^t H_3(t)\,|x(t,r_1(t)) - x(t,r_2)|\,dt, \tag{13}$$

其中
$$H_2=m_2[H_1e_1+2M\sigma]+m_2Mk_2\sigma+m_2k_3e_1,$$
$$H_3(t)=m_2(k_1(t)+k_2(t+r_2)).$$

于是，由 *Gronwall—Bellman* 不等式，得

$$|x(t,r_1(t))-x(t,r_2)|\leqslant H_2 exp\left(\int_0^t H_3(t)dt\right). \tag{14}$$

注意到条件 iii)和 σ 为充分小，故可由(6)、(7)、(14)推得：对任给的 $e>0$，方程(1.1)与(2)的解和方程(1.2)与(2)的解，对于一切 $t\geqslant0$ 有如下不等式成立

$$|x(t,r_1(t))-x(t,r_2)|<e. \tag{15}$$

利用定理 1 或类似定理 1 的证法，不难得到如下：

定理 2 设定理 1 的条件成立，又若方程(1.2)和(2)的所有解当 $t\to+\infty$ 时趋于零，则方程(1.1)和(2)的所有解当 $t\to+\infty$ 时亦趋于零.

推论 若 *Bellman* 所提问题中，方程的系数 a 为 t 的函数，连续且 $\int_0^{+\infty} a(t)dt$ 有界，则 *Bellman* 问题为真.

注： 本推论可以看作是对 *Bellman* 所提问题的一种解答.

定理 3 设定理 1 的条件成立，则方程(1.1)和(1.2)的解的各种稳定性质都是一致的.

推论 若方程中的 $f(t,x,y,u)\equiv F(t,x,y)$ 且满足定理 1 中相应条件，则定理 3 仍然成立.

注 本推论可以看作是对秦元勋教授所提问题的一种解答.

定理 4 若 $f(t,x,y,u)$ 满足条件 i)、ii)、iii) 且当 $m\to+\infty$ 时 $r_m\to r\,(r>0,r_m>0)$，只要存在一正整数 M，当 $m>M$ 时，方程

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t-r_m),\dot{x}(t-r_m))$$

和连续始值函数的所有解当 $t\to+\infty$ 时趋于零，则方程

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t-r),\dot{x}(t-r))$$

和连续始值函数的所有解当 $t\to+\infty$ 时亦趋于零.

注 若定理 4 中的条件 iii) 中的 $k_i(t)\equiv k_1=const.$，则定理 4 的结论未必成立(即使是滞后型时滞微分方程也是如此). 见反例如下:

例 考虑方程

$$\dot{x}(t)+\frac{\pi}{2}x(t-r_m)=0\quad(m=1,2,\cdots)\tag{*}$$

和方程

$$\dot{x}(t)+\frac{\pi}{2}x(t-1)=0,\tag{**}$$

其中 r_m 满足 $0<r_m<1\,(m=1,2,\cdots)$ 且 $\lim\limits_{m\to+\infty}r_m=1$.

由于在方程(*)中，对每个 m 有 $0<\frac{\pi}{2}r_m<\frac{\pi}{2}$，故由[7]知，方程(*)的零解是一致渐近稳定的，又因方程(*)是线性的，故由[2]中定理推得方程(*)的所有解当 $t\to+\infty$ 时趋于零；但是，容易验证：函数 $x(t)=\cos\frac{\pi}{2}t$ 或 $x(t)=\sin\frac{\pi}{2}t$ 都是方程(**)的解，显然这些解当 $t\to+\infty$ 时并不趋于零.

下面为了讨论非线性中立型时滞微分方程的解当时滞趋于零时的性态，假定函数 $f(t,x,y,u)$ 在 G':

$0\leqslant t\leqslant T,\ |x|\leqslant H,\ |y|\leqslant H,\ |u|\leqslant H$ 上满足初始值问题存在唯一解的条件

1) $f(t,x,y,u)$ 连续;

2) $|f(t,x_1,y_1,u_1)-f(t,x_2,y_2,u_2)|\leqslant K_1|x_1-x_2|+K_2|y_1-y_2|+K_3|u_1-u_2|$,

其中 $K_i\,(i=1,2,3)$ 为常数且 $K_3\leqslant\beta<1$. 于是有如下

定理 5 在中立型方程(1.2)中 $f(t,x(t),x(t-r_2),\dot{x}(t-r_2))$ 满足条件 1) 和 2)，则方程(1.2)在 $0\leqslant t\leqslant T$ 上之解 $x(t,r_2)$ 是 r_2 的连续函数.

本定理 5 的证明，只要注意到有界闭区间：$0\leqslant t\leqslant T$，类似定理 1 便可推得. 类似地还可得如下

定理 6 若定理 5 的条件成立，则方程(1.2)和(2)的解 $x(t,r_2)$，当 $r_2\to0$ 时，在 $0\leqslant t\leqslant T$ 上一致收敛于如下退化方程的解 $x_0(t)$:

$$\begin{cases}\dot{x}_0(t)=f(t,x_0(t),x_0(t),\dot{x}_0(t)),\\ x_0(0)=\varphi(0).\end{cases}$$

注: 定理 6 要比[5]中相应的定理优越一些，因为本定理 6 放弃了[5]中对 $f(t,x,y,u)$ 可微的要求.

参考文献

[1] 秦元勋、刘永清、王 联，带有时滞的动力系统的稳定性，科学出版社，北京，1963.

[2] Driver, R. D., Ordinary and delay differential equations, Springer—Verlag, Heidelberg, Berlin, 1977.

[3] 李森林，科学通报，23:2(1978)，88—93.

[4] Bellman, R. and Cooke, K. L., Differential—Difference equations, Academic press; London, 1963.

[5] Васильева, А. В., ДАН., 145:3(1962), 495—4978.

[6] Bellman. *R.*, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 71:3(1965), 495.

[7] Wright, E. M., J. *Die Reine and Angewandte Math.*, 194(1955), 66—87.

数学年刊，9A(2)(1988)，105—109

On the Self-adjoint Extensions of Symmetric Ordinary Differential Operators with Middle Deficiency Indices

Sun Jiong (孙 炯)

Department of Mathematics, University of Inner Mongolia (内蒙古大学)

How can one generate self-adjoint operators in L^2 associated with symmetric differential expressions with deficiency indices(m,m)? This is a fundamental problem in the spectral theory of differential operators. Constructing Weyl's solutions by using H. Weyl's "circles" method was the classical method. This was then applied to the describing of the boundary conditions which determine self-adjoint domains associated with a second order symmetric differential expression ([2]chap. 9). Since the 1960's W. N. Everitt generalized Titchmarsh-Weyl's theory to the higher-order cases, and gave some self-adjoint domains with maximum and minimum deficiency indices. Because of the difficulty in constructing Weyl's solutions, much less is known about the solvability of such problems when the deficiency indices are known in the middle $\left([\frac{n+1}{2}]<m<n\right)$. Everitt considered this difficulty, and gave a self-adjoint domain with middle deficiency indices in the even-order case. But these are not a complete

solution to the problem of describing all the self-adjoint extensions of any given symmetric differential operators. Recently,. using the general theory of linear operators, Cao Zhi-jiang obtained the complete and direct characterization of all the self-adjoint extensions associated with a symmetric differential expression with maximum deficiency indices. He also showed that the classical Titchmarch-Weyl's domains and Everitt's domains are the special cases of his results[5,6,10]

Using Cao's idea, we generalize his result to the cases where the symmetric differential expressions have middle deficiency indices. The key point is to prove a decomposition of $\mathscr{D}_M$, the domain of the maximal operators L_M, such that the conditions that elements of $\mathscr{D}_M$ satisfy at point $t=0$ and at infinity are separeted. Using this decomposition we obtain the complete characterization of all self-adjoint extensions of nth-order symmetric differential operators with middle deficiency indices (m,m). The results of this paper generalize Everitt and Cao's results directly.

In section 1, we list some hasic facts. The decomposition of $\mathscr{D}_M$ is given in Section 2. Section 3 and 4 contain the boundary conditions characterizing all the self-adjoint domains. Section 5 shows that all the self-adjoint domains given by Everitt are special cases of our result. Lastly in section 6 we show that Coddington's self-adjoint domains for compact interval are also the special cases of our result.

The symbols used in this paper are the same as [1,6].

§ 1. Suppose

$$l[y]=P_0(t)y^{(n)}+P_1(t)y^{(n-1)}+\cdots+P_n(t)y, t\in[0,+\infty],$$

where $P_0(t),P_1(t),\cdots,P_n(t)$ are complex functions. In this paper, we assume $l[y]$ is a reguler ordinary symmetric differential expression with equal deficiecy indices $(m,m)\left(\left[\frac{n+1}{2}\right]\leqslant m\leqslant n\right)$. Let L_M and L_0 denote the maximal operator and the minimal operator defined by the differential expression $l[y]$ restrected to the sets $\mathscr{D}_M$ and $\mathscr{D}_0$ respectively.

Definition. Suppose $m_1,\cdots,m_n$ are linear manifolds of $L^2[0,+\infty]$. A linear manifold m is said to be the direct sum of $m_1,\cdots,m_n$, written by

$$m=m_1+\cdots+m_n=\sum_{k=1}^{n}m_k,$$

if each $u\in m$ has a unique representation

$$u=\sum_{k=1}^{n}u_k,$$

with $u_k\in m_k(k=1,\cdots,n)$.

Let n_λ and $n_{\bar\lambda}$ denote the eigenmanifolds of L_M associated with $\bar\lambda$ and λ ($\mathscr{I}\lambda\neq0$), we know that $\mathscr{D}_M$, the domain of L_M, is the direct sum of $\mathscr{D}_0$, n_λ and $n_{\bar\lambda}$

Because the deficiency indices of $l[y]$ are (m,m) $l[y]=\lambda y$ *or* $l[y]=\bar\lambda y$ has exactly m linearly independent square integrable solutions on $[0,+\infty]$, $\varphi_1(t,\lambda),\cdots,\varphi_m(t,\lambda)$ and $\psi_1(t,\bar\lambda),\cdots,\psi_m(t,\bar\lambda)$. From the above result we have

Proposition 1. *If $y\in\mathscr{D}_M$, then y has a unique representation*

$$y=y_0-\sum_{i=1}^{m}c_i\varphi_i(t,\lambda)-\sum_{i=1}^{m}d_i\psi_i(t,\bar\lambda), \tag{1.1}$$