三角测量典型图形按現成公式平差法

C·E·巴尔沙依 著
戴冠科 于銘閣 譯

中国工业出版社

三角測量典型图形按現成公式平差法

C. E. 巴尔沙依 著
戴冠科 于銘閣 譯
楊安民 校

中国工业出版社

本书闡述三角測量典型图形不必經过組成和解算法方程式而进行严密平差的方法。

第一章闡述了三角測量平差的一般問題，并且引証了作者所提出的平差法原理。

第二章提出了按独立观测角平差三角测量典型图形的公式，而第三章則提出了按独立观测方向平差三角测量典型图形的公式。

对某些图形还推証了确定平差值函数之权的公式。

书中列举了26个附有理論推証的平差和精度估計的实例，以便广大測量人員易于接受。

С. Е. Барщай
УРАВНОВЕШИВАНИЕ
ТИПОВЫХ ФИГУР ТРИАНГУЛЯЦИИ
ПО ГОТОВЫМ ФОРМУЛАМ
геодезиздат
Москва · 1960

* * *

三角測量典型图形
按現成公式平差法
戴冠科 于銘閣 譯
楊安民 校

*

国家测绘总局测绘书刊編輯部編輯（北京三里河国家测绘总局）
中国工业出版社出版（北京修建閣路丙10号）
（北京市书刊出版事业許可証出字第110号）
中国工业出版社第四印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行·各地新华书店經售

*

开本850×1168 1/32·印张4 15/16·字数126,000
1963年8月北京第一版·1963年8月北京第一次印刷
印数0001—3,361·定价（10—6）0.79元

*

統一书号：15165·2617（测绘-94）

原　　序

平差計算是建立大地測量控制工作中极为重要和繁难的部份。

当加密国家高級三角网时，新网可按典型图形的形式建立。

本书从理論上推証了这些图形不必組成和解算法方程式的平差公式，而且也設計了合理的計算格式。这在很大程度上加速了平差計算工作，并且也容易为中級測量人員所接受。

对多数典型图形也推求了估計平差値函数精度的公式。

从最小二乘法的观点来看所提出的平差法是严密的。这就使得无論是按角度平差还是按方向平差都成为可能。

在編写本稿时，曾采納了莫斯科土地整理工程学院高等測量教研室工作人員的意見，还听取了該院測量教研室工作人員、技术科学博士E.Г.拉尔欽科、副教授A.B.郭吉耶夫和C.Г.沙魯比奇的意見。編輯手稿的大部份工作是由B.П.梁贊諾夫副教授进行的。在此向他們謹致以衷心的感謝。

作　者

1960年2月

目　录

第一章 总 論

§1 緒 言

基本大地測量工作在苏联得到了巨大的发展。完成这些工作的不仅有测繪总局的生产单位，而且也有为某种目的而必須亲自进行大量大地測量工作的各个部門，例如，为了勘探矿藏和开采矿产；农业企业地籍机关的土地整理，城市規划和森林經理；交通綫路和动力設施等方面的勘測与設計。

无論是为正規测图所必須的基本大地測量工作，还是独立进行的测量工作，苏联的大地測量工作者均致力于其方法的改进。

苏联国家大地网法式（1954）規定：建立主要的大地控制需顧計到保証大比例尺地形测图，所以对其精度提出了很高的要求。

此外，法式还指出：一、二和三等三角网，应由测繪总局、軍事测繪局和水文地理局共同建立。敷設四等网和建立测图控制的全部工作均委託給专門从事地形测图的机关和其他部門来完成。

現有的一、二等点网的密度使得有可能以大地四边形、中点多边形、三角鎖等典型的大地图形的形式建立三、四等三角网。

在建立大地控制网的整体工作中，野外測量成果的平差是非常重要的一部份。在苏联，对确保必要精度的一些平差計算方式和方法問題的研究給予了很大的重視，这就有可能使中等技术人員掌握这些計算。这种情况对主管大地测量工作的单位特别重要。

实际上，按最小二乘法进行的三角测量平差，通常是按确定直接观測值改正数的条件观測平差法或是按确定作为未知数的所有非坚强点的近似座标值改正数的間接观測平差法❶来进行。当

❶ 在任何情况下，两种方法均得出相同的結果，但計算工作量并不都是相等的。

多余的起算数据(观测的和固定的)数量很多时，間接观测平差法看来是最适宜的，否则最好用条件观测平差法。在每一具体情况下由这两种方法中选择哪一种方法的問題是很容易决定的。

在待定点比較多且三角网可以預先选定为典型图形的局部三角测量中采用条件观测平差法常是最有利的，尤其是对于很多典型图形其整个平差計算都可以塡于1—2个預先設計好的格式中。

在进行城市测量、航空摄影测量及其它的一些测量时，往往因为沒有更多的坚强資料，而广泛地采用着三角鎖、中点多边形和其它形式的典型三角测量图形。

§2 角度平差和方向平差

进行角度观测时，独立观测値可以是角度也可以是方向。大家知道，为了取得严格滿足于最小二乘法全部要求的結果，对于乘以相应权的改正数平方和为极小这一条件，应当是建立在独立値的基础上。所以大地测量分为角度平差和方向平差两种情况。然而，为了計算工作的簡化，即使独立观测値为方向时也常采用角度平差。

若三角网观测了方向而按角度平差时，所得平差角之数値稍不同于該三角网按方向平差，即在方向改正数平方和为极小的条件下进行平差时，而由方向平差値之差所导出的平差角之数値。

只有在固定三角形中插点的情形下，此时，由于在每一个测站上都只观测了三个方向，角度平差和方向平差的結果才是一致的。

§3 现有的三角测量典型图形的平差方法和本書的任务

按照組成条件方程式和法方程式的最小二乘法的一般方式进行平差，由于方程式的数量可能很多，所以不是对任何情况都是适宜的。解算法方程式所需的时間，将随着法方程式数量的增加

而急剧地增多。平差計算工作比較复杂且常需由技术水平高的专家——工程师来担任。

苏联大地测量学者們，卓越地拟定出建立高級三角网的方案和平差方法。

平差低級的或局部的三角网时，所采用的方法，通常可分为严密的和非严密的。典型图形平差的非严密方法通常是在仅仅注意到一部份条件方程式的概略平差之后，再顧及其余条件方程式进行补充平差。这时，为了保証在第一組方程式中不再出現不符合的情形，而把某些违反平差值最大权原理的任意条件加到第二次改正数上。

这种方法在В.В.維特考夫斯基、А.С.費洛年科、П.И.希洛夫、А.В.格拉烏尔等人的著作中都有闡述。

采用簡化平差方法的另外一些途径在В.В.波波夫的文章中可以找到。

附加于第二改正数上的条件并不完全是任意的。В.В.波波夫根据“任意条件”这一概念的某些不定性，选取一些条件使第二次改正数尽可能接近于其最或是值。

由此，对大地四边形来說，如其形状近似伸展的菱形，則“任意条件”就与长方形的不同。本书中包括这种簡化平差的假定，而所得改正数完全近于其最或是值。

以严密方法平差典型大地图形必須提到Ф.Н.克拉索夫斯基教授在1925年所提出的平差中点多边形的方法；В.В.波波夫教授的按角度和方向平差大地四边形的方法以及其在固定三角形和其它图形中插点而构成图形的严密平差方法。

利用各种近似的方法，即非严密的方法，虽然能减輕計算工作量，但常常使平差結果与其最或是值偏差很大，而这种偏差的程度还不十分清楚。

不久以前平差低級三角系时曾采用过前述之簡化的、非严密的方法。Н.А.烏尔馬耶夫教授在1930年拟定了两組平差法的实际应用原理之后，严密的方法才开始代替所有的近似方法。将这

种方法用于由三角形組成的沒有交叉对角綫的网，特别有利，并且当独立观测值不是方向而是角度时則更为重要。正如前述，观测了方向而平差角度，往往使改正数与其严格值之間有显著差异。而采用这种方法总是必須組成和改化条件方程式，而后再組成和解算第二組法方程式。

本书的目的，是利用現有的三角測量平差的严密方法推导公式并对最常見的大地图形編制計算表格，这种表格能为从事建立控制网和为布置测图工作而加密控制网的所有人員使用。就是說消除了組成和解算法方程式的全部中間計算。本书还对三角測量典型图形按角度和方向的严密平差提出了現成的公式和表格。

在已出版的A.B.郭吉耶夫和C.Γ.沙魯比奇的“三角測量典型图形平差法”❶一书中也闡述了类似的問題，但所述的解算方法与本书有所不同。

除平差本身的問題以外，我們还研究按現成公式对某些图形的平差值函数进行精度估計的問題。首先是对大地四边形基綫网的扩大边、中点多边形中距基綫最远的边（小城市高級三角測量的典型图形）、在堅强三角形或其它图形中插点的情况。

§4 提出的平差法的原理

本书所提出的按現成公式进行局部三角測量典型图形严密平差的方法是利用所熟悉的两組平差法原理的。

在我国的大地測量文献中，适用于測角情况的平差方法都已有很好的闡述。

推导方向平差的公式时，我們利用一般的方法：即把联系数表示为分成几組的条件方程式自由項之綫性函数的方法。

先求相应于第一組条件方程式部份的联系数表达式。而后在逐次加入新条件方程式时求已有表达式的联系数的改正数，就得出由新、旧方程式自由項表示的联系数表达式。

---

❶ 本书1953年版測繪出版社已于1956年出版中譯本——編者注。

在此不必贅述此法的理論，因为这在 Φ.Н. 克拉索夫斯基教授和 В.В. 达尼洛夫教授合著的“大地測量学”一书中已闡明的相当全面。我們来推求現成公式和包括全部平差的計算表格。

1. 假定我們把条件方程式分为两組，仅顧及到第一組方程式，我們用这些方程式的自由項来表达近似的联系数（因为此时还暫且沒有顧及到第二組方程式）。

$$\left.\begin{aligned} k_1' &= f_{1.1}w_1 + f_{1.2}w_2 + \cdots + f_{1.r}w_r \\ k_2' &= f_{2.1}w_1 + f_{2.2}w_2 + \cdots + f_{2.r}w_r \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ k_r' &= f_{r.1}w + f_{r.2}w_2 + \cdots + f_{r.r}w_r \end{aligned}\right\}. \tag{1}$$

2. 而后按下列公式計算中間联系数 ρ：

$$\begin{aligned} \rho_{\alpha.1} &= f_{1.1}[a\alpha] + f_{1.2}[b\alpha] + \cdots + f_{1.r}[r\alpha]; \\ \rho_{\alpha.2} &= f_{2.1}[a\alpha] + f_{2.2}[b\alpha] + \cdots + f_{2.r}[r\alpha]; \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \rho_{\alpha.r} &= f_{r.1}[a\alpha] + f_{r.2}[b\alpha] + \cdots + f_{r.r}[r\alpha]; \\ \rho_{\beta.1} &= f_{1.1}[a\beta] + f_{1.2}[b\beta] + \cdots + f_{1.r}[r\beta]; \\ \rho_{\beta.2} &= f_{2.1}[a\beta] + f_{2.2}[b\beta] + \cdots + f_{2.r}[r\beta]; \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \rho_{\beta.r} &= f_{r.1}[a\beta] + f_{r.2}[b\beta] + \cdots + f_{r.r}[r\beta]; \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \rho_{\lambda.1} &= f_{1.1}[a\lambda] + f_{1.2}[b\lambda] + \cdots + f_{1.r}[r\lambda]; \\ \rho_{\lambda.2} &= f_{2.1}[a\lambda] + f_{2.2}[b\lambda] + \cdots + f_{2.r}[r\lambda]; \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \rho_{\lambda.r} &= f_{r.1}[a\lambda] + f_{r.2}[b\lambda] + \cdots + f_{r.r}[r\lambda]. \end{aligned}$$

式中 a、b、$\cdots$、r 是第一組方程式的系数，α、β、$\cdots$、λ 是第二組方程式的系数。

3. 确定第二組改化法方程式的系数和自由項：

$$A_{1.\alpha} = [\alpha\alpha] + [\alpha a]\rho_{\alpha.1} + [\alpha b]\rho_{\alpha.2} + \cdots + [\alpha r]\rho_{\alpha.r};$$

$$A_{1\cdot\beta}=[\alpha\beta]+[\alpha a]\rho_{\beta\cdot1}+[\alpha b]\rho_{\beta\cdot2}+\cdots+[\alpha r]\rho_{\beta\cdot r};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_{1\cdot\lambda}=[\alpha\lambda]+[\alpha a]\rho_{\lambda\cdot1}+[\alpha b]\rho_{\lambda\cdot2}+\cdots+[\alpha r]\rho_{\lambda\cdot r};$$

$$W_A=w_\alpha+\rho_{\alpha\cdot1}w_1+\rho_{\alpha\cdot2}w_2+\cdots+\rho_{\alpha\cdot r}w_r;$$

$$A_{2\cdot\alpha}=[\beta\alpha]+[\beta a]\rho_{\alpha\cdot1}+[\beta b]\rho_{\alpha\cdot2}+\cdots+[\beta r]\rho_{\alpha\cdot r};$$

$$A_{2\cdot\beta}=[\beta\beta]+[\beta a]\rho_{\beta\cdot1}+[\beta b]\rho_{\beta\cdot2}+\cdots+[\beta r]\rho_{\beta\cdot r};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_{2\cdot\lambda}=[\beta\lambda]+[\beta a]\rho_{\lambda\cdot1}+[\beta b]\rho_{\lambda\cdot2}+\cdots+[\beta r]\rho_{\lambda\cdot r};$$

$$W_B=w_\beta+\rho_{\beta\cdot1}w_1+\rho_{\beta\cdot2}w_2+\cdots+\rho_{\beta\cdot r}w_r;$$

$$A_{\lambda\cdot\alpha}=[\lambda\alpha]+[\lambda a]\rho_{\alpha\cdot1}+[\lambda b]\rho_{\alpha\cdot2}+\cdots+[\lambda r]\rho_{\alpha\cdot r};$$

$$A_{\lambda\cdot\beta}=[\lambda\beta]+[\lambda a]\rho_{\beta\cdot1}+[\lambda b]\rho_{\beta\cdot2}+\cdots+[\lambda r]\rho_{\beta\cdot r};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_{\lambda\cdot\lambda}=[\lambda\lambda]+[\lambda a]\rho_{\lambda\cdot1}+[\lambda b]\rho_{\lambda\cdot2}+\cdots+[\lambda r]\rho_{\lambda\cdot r};$$

$$W_L=w_\lambda+\rho_{\lambda\cdot1}w_1+\rho_{\lambda\cdot2}w_2+\cdots+\rho_{\lambda\cdot r}w_r.$$

相应于第二組条件方程式的改化法方程式是：

$$A_{1\cdot\alpha}k_A+A_{1\cdot\beta}k_B+\cdots+A_{1\cdot\lambda}k_L+W_A=0;$$

$$A_{2\cdot\alpha}k_A+A_{2\cdot\beta}k_B+\cdots+A_{2\cdot\lambda}k_L+W_B=0;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_{\lambda\cdot\alpha}k_A+A_{\lambda\cdot\beta}k_B+\cdots+A_{\lambda\cdot\lambda}k_L+W_L=0.$$

4.整体解算这些方程式求得由所有方程式自由項表示的第二組联系数的表达式：

$$k_A=\varphi_{1\cdot1}w_1+\varphi_{1\cdot2}w_2+\cdots+\varphi_{1\cdot r}w_r+F_{1\cdot\alpha}w_\alpha+$$
$$+F_{1\cdot\beta}w_\beta+\cdots+F_{1\cdot\lambda}w_\lambda;$$

$$k_B=\varphi_{2\cdot1}w_1+\varphi_{2\cdot2}w_2+\cdots+\varphi_{2\cdot r}w_r+F_{2\cdot\alpha}w_\alpha+$$
$$+F_{2\cdot\beta}w_\beta+\cdots+F_{2\cdot\lambda}w_\lambda;$$

$$k_L=\varphi_{\lambda\cdot1}w_1+\varphi_{\lambda\cdot2}w_2+\cdots+\varphi_{\lambda\cdot r}w_r+F_{\lambda\cdot\alpha}w_\alpha+$$
$$+F_{\lambda\cdot\beta}w_\beta+\cdots+F_{\lambda\cdot\lambda}w_\lambda.$$

5.計算第一組联系数 k_i' 之“附加值” $\Delta k_i'$：

$$\Delta k_1'=\rho_{\alpha\cdot1}k_A+\rho_{\beta\cdot1}k_B+\cdots+\rho_{\lambda\cdot1}k_L;$$

$$\Delta k_2'=\rho_{\alpha\cdot2}k_A+\rho_{\beta\cdot2}k_B+\cdots+\rho_{\lambda\cdot2}k_L;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Delta k_r' = \rho_{\alpha\cdot r} k_A + \rho_{\beta\cdot r} k_B + \cdots + \rho_{\lambda\cdot r} k_L.$$

由全部方程式自由項表示的第一組联系数的最后值是：

$$k_1 = k_1' + \Delta k_1';$$

$$k_2 = k_2' + \Delta k_2';$$

$$\cdots\cdots$$

$$k_r = k_r' + \Delta k_r'.$$

如果第二組中多于两个方程式，那么最好再将其分成几組，使每一組中都不多于两个方程式。依据条件方程式新組的划分，相繼再加“附加值”以求取联系数。

平差三角鎖的同等精度的方向时，因子 f 称为按自由項展开的联系数之系数，它仅与三角形的个数有关。因此，就可以对由不同的三角形个数所构成的各种图形預先計算这些系数，并可編制成表。利用这些表就可以大大地加快单三角鎖和中点多边形的平差計算。

根据这些表将自由項乘以相应的 f 求其和即得 k_i'。

§5 用两组平差法时平差值的权和平差值函数的中誤差

假如将条件方程式分为两組，并且有权函数：

$$\varphi = f_0 + f_1(1) + f_2(2) + \cdots + f_n(n).$$

象两組平差时所作的一样，令第二組条件方程式及权函数的改化系数为：

$$A_1, A_2, \cdots, A_n;$$

$$B_1, B_2, \cdots, B_n;$$

$$\cdots\cdots$$

$$L_1, L_2, \cdots, L_n;$$

$$F_1, F_2, \cdots, F_n.$$

在最小二乘法指南中，采用两組平差法时确定已平差之測量結果的函数之权的公式是：

$$\frac{1}{P_\varphi}=[ff]-\left\{\frac{[af]^2}{[aa]}+\frac{[bf.1]^2}{[bb.1]}+\cdots+\frac{[rf(r-1)]^2}{[rr(r-1)]}\right\}-$$
$$-\left\{\frac{[Af]^2}{[AA]}+\frac{[Bf.1]^2}{[BB.1]}+\cdots+\frac{[Lf(\lambda-1)]^2}{[LL(\lambda-1)]}\right\},\qquad(2)$$

此式包含第一組方程式中的改正数之系数，第二組方程式的改化系数和未經改化的权函数之系数。

当不組成条件和法方程式而平差时，最好采用只由第二組方程式和权函数的改化系数所表达的函数之权的公式来代替（2）式。

仿照改化第二組条件方程式之系数所用的公式，得出权函数的改化系数

$$\left.\begin{array}{l}F_1=f_1+a_1\rho_{\lambda+1\cdot1}+b_1\rho_{\lambda+1\cdot2}+\cdots+r_1\rho_{\lambda+1\cdot r}\\ F_2=f_2+a_2\rho_{\lambda+1\cdot1}+b_2\rho_{\lambda+1\cdot2}+\cdots+r_2\rho_{\lambda+1\cdot r}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ F_n=f_n+a_n\rho_{\lambda+1\cdot1}+b_n\rho_{\lambda+1\cdot2}+\cdots+r_n\rho_{\lambda+1\cdot r}\end{array}\right\}.\qquad(3)$$

将第二組的每一个方程式相应地乘以$A_1,A_2,\cdots,A_n$并相加之得：

$$[AA]=[A\alpha]+[Aa]\rho_{1\cdot1}+[Ab]\rho_{1\cdot2}+\cdots+[Ar]\rho_{1\cdot r}.$$

在此等式中ρ的所有系数均等于零。显然

$$[AA]=[A\alpha].$$

用同样的方法易得

$$\left.\begin{array}{l}[BB]=[B\beta]\\ [CC]=[C\gamma]\\ \cdots\cdots\\ [LL]=[L\lambda]\\ [FF]=[Ff]\\ [AF]=[Af]\\ [BF]=[Bf]\\ \cdots\cdots\\ [LF]=[Lf]\end{array}\right\}.\qquad(4)$$

我們来求 $[Ff]$。为此将方程式(3)相应地乘以 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 幷将其結果相加得：

$$[Ff]=[ff]+[af]\rho_{\lambda+1\cdot1}+[bf]\rho_{\lambda+1\cdot2}+\cdots+ +[rf]\rho_{\lambda+1\cdot r}. \tag{5}$$

由自由項之値为 $[af], [bf], \cdots, [rf]$ 的方程組来确定联系数 ρ。求得 ρ 的一般式是

$$\rho_{\lambda+1\cdot1}=-\frac{[af]}{[aa]}-\frac{[ab]}{[aa]}\rho_{\lambda+1\cdot2}-\frac{[ac]}{[aa]}\rho_{\lambda+1\cdot3}- -\cdots-\frac{[ar]}{[aa]}\rho_{\lambda+1\cdot r}$$

$$\rho_{\lambda+1\cdot2}=-\frac{[bf.1]}{[bb.1]}-\frac{[bc.1]}{[bb.1]}\rho_{\lambda+1\cdot3}-\frac{[bd.1]}{[bb.1]}\rho_{\lambda+1\cdot4}- -\cdots-\frac{[br.1]}{[bb.1]}\rho_{\lambda+1\cdot r}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\rho_{\lambda+1\cdot r}=-\frac{[rf(r-1)]}{[rr(r-1)]}.$$

若将这些 ρ 值代入（5）式中幷且进行一些改化，則得

$$[FF]=[Ff]=[ff]-\frac{[af]^2}{[aa]}-\frac{[bf.1]^2}{[bb.1]}-\frac{[cf.2]^2}{[cc.2]}- -\cdots-\frac{[rf(r-1)]^2}{[rr(r-1)]}. \tag{6}$$

注意到(4)和(6)式，公式(2)可改写为下列形式：

$$\frac{1}{P_\varphi}=[FF]-\frac{[AF]^2}{[AA]}-\frac{[BF.1]^2}{[BB.1]}-\cdots- -\frac{[LF(\lambda-1)]^2}{[LL(\lambda-1)]}=[FF.\lambda]. \tag{7}$$

在第二組中仅包含一个方程式的情况下，公式(7)采取如下形式：

$$\frac{1}{P_{\varphi}}=[FF]-\frac{[AF]^{2}}{[AA]}. \tag{8}$$

此式在以下的叙述中同样会用到。

函数的中誤差 M_{φ} 按已知的公式計算：

$$M_{\varphi}=\mu\sqrt{\frac{1}{P_{\varphi}}},$$

式中 μ 是单位权中誤差，按下式决定：

$$\mu=\sqrt{\frac{[\delta^{2}]}{r}}.$$

上式中 δ 是观测角的总改正数，r 是全部条件方程式的总数。

第二章　角度平差

§6　中点多边形

本章是以测量角度而不是测量方向为出发点。只有把不超出三角形本身范围的方程式列入条件方程式的第一組，才能使两組平差的第一組法方程式的整体解算簡化。

对最常見的大地图形我們要解决其整体平差問題并推求其不用組成法方程式而直接确定第二組联系数的公式。

此外，还編制了平差計算格式并給出了采用这些格式和公式的数字实例。

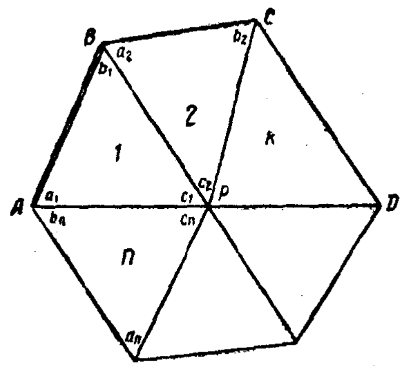

图 1

設有由 n 个三角形組成的中点多边形（图1）。

传距角用字母 a 和 b 表示，而中心点 P 处的角用字母 c 表示。全部条件有 $n+2$ 个；其中有 n 个图形条件，1 个水平条件和 1 个极条件。这些方程式将有如下形式：

$$(a_1)+(b_1)+(c_1)+w_1=0;$$
$$(a_2)+(b_2)+(c_2)+w_2=0;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(a_n)+(b_n)+(c_n)+w_n=0;$$

$$(c_1)+(c_2)+(c_3)+\cdots+(c_n)+w_{n+1}=0;$$

$$\alpha_1(a_1)+\alpha_2(a_2)+\cdots+\alpha_n(a_n)-\beta_1(b_1)-\beta_2(b_2)-$$
$$-\cdots-\beta_n(b_n)+w_{n+2}=0,$$

式中(a_i)、(b_i)和(c_i)为相应角度的改正数；α和β是角度a和b增加1″时其正弦对数之增量；$w_1, w_2, \cdots, w_n$是三角形的閉合差，而w_{n+1}和w_{n+2}是按观测角計算的最后两个方程式的自由項。正如大家所知，仅考虑属于第一組的n个方程式按最小二乘法平差，是将閉合差反号平均分配給相应三角形的各角，显然，

$$(a_1)'=(b_1)'=(c_1)'=-\frac{w_1}{3};$$

$$(a_2)'=(b_2)'=(c_2)'=-\frac{w_2}{3};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(a_n)'=(b_n)'=(c_n)'=-\frac{w_n}{3},$$

式中$(a_i)'$,$(b_i)'$和$(c_i)'$是由第一組条件求得之第一改正数。

显然，第二組方程式系数的改化是自每一系数减去相应三角形各角度改正数的系数总和之三分之一（见§4）。

按預先經过第一組条件改正过的角度算得的第二組改化方程式的自由項用W_1和W_2表示。

第二組条件方程式的改化系数列于表1，其中方程式的改化系数已經乘了3。

联系数的法方程式是

$$\left.\begin{aligned}[AA]k_1+[AB]k_2+3W_1=0\\ [AB]k_1+[BB]k_2+3W_2=0\end{aligned}\right\}. \qquad (9)$$

在此情形下：

$$[AA]=6n;$$
$$[AB]=3[\beta-\alpha]=3\{[\beta]-[\alpha]\};$$
$$[BB]=6[\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2].$$

将系数值代入式(9)中，除以3并引用符号：