高职高专机电类系列教材

工 程 数 学

林 益 主编

王志宏 叶 鹰 何 超 梅正阳 撰稿

中国人民大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

工程数学/林益主编．
北京：中国人民大学出版社，2000．
高职高专机电类系列教材

ISBN 7-300-03436-5/F.1023
Ⅰ．工…
Ⅱ．林…
Ⅲ．工程数学-高等学校：技术学校-教材
Ⅳ．TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2000）第 34621 号

高职高专机电类系列教材
工程数学
林　益　主编

出版发行：中国人民大学出版社
（北京海淀路 157 号　邮编 100080）
发行部：62514146　门市部：62511369
总编室：62511242　出版部：62511239
E-mail：rendafx@public3. bta. net. cn
经　　销：新华书店
印　　刷：北京市丰台丰华印刷厂

开本：787×1092 毫米　1/16　印张：16.5
2000 年 9 月第 1 版　2000 年 9 月第 1 次印刷
字数：373 000

定价：20.00 元
（图书出现印装问题，本社负责调换）

前　言

随着近年来计算机的飞速发展，数学和计算机结合形成的“数学技术”（包括软件）已成为高科技的重要组成部分和突出的标志。数学正向一切领域渗透，科学的决策、精确的计划、工程设计、控制过程、产品营销、质量管理、可靠性分析，以至于股市商情、天气预报、生物、医学、农业……都离不开数学。面对信息社会和知识经济定量化、数学化发展的必然趋势，作为新世纪的人才必须学习和掌握一定的应用数学知识，以适应将来工作的需要，并打下进一步学习其他科学的基础。本书便是适应这一社会需求，为高等学校工科高职、高专各类专业编写的“工程数学”教材。其内容包括线性代数、概率统计、积分变换和数学实验等四部分。本书不仅提供了工程技术中常用的应用数学知识和方法，还努力培养学生应用数学的意识、兴趣和能力。

为适应高职这一新型专业的需求和新世纪对人才素质全面发展的要求，我们在教材编写中作了一些探索与创新，注意贯彻以下几点想法：

（1）不片面追求理论的系统性和完整性。在基本理论和联系实际的内容取舍上，均以“必需、够用”为度。突出数学思想和方法的引导，增强数值计算能力和分析、解决实际问题能力的培养。

（2）强调理论联系实际。有意识地通过身边发生的令人感兴趣的实际问题，引入数学概念，讲解基本理论、基本方法和实际应用，让学生意识到“数学就在身边”。本书增设了数学实验，引入初步的数学建模思想和数值计算软件的使用，加深了学生对数学思想和方法的理解，提高了应用计算机进行数据处理和数值计算的能力，培养了解决实际问题的兴趣和技能。本书还针对高职学生的特点，配置了详细的实验指导，方便学生上机实验。

（3）收录了一些饶有趣味的小知识、小资料，开阔了学生的眼界，贴近学生的生活，可激发学生的兴趣。

（4）习题部分在强调“三基”的基础上，适当增添了应用问题，增添了上机题的题型，为学生提供更多使用计算机和解决实际问题的训练。

（5）力图做到语言流畅、通俗易懂、便于自学。

（6）本书呈模块式结构，便于组合，以适合不同专业、不同层次的教学要求。

本书由林益主编，王志宏编写了线性代数部分；叶鹰编写了概率统计部分；何超编写了积分变换部分；梅正阳编写了数学实验与附录 A 部分。在编写过程中得到了华中理工大学余明书教授和黄先春、林升旭、王以治副教授的大力支持，他们认真审阅了书

稿，提出了许多宝贵意见，使本书得以完善。在此我们表示衷心的感谢。

由于时间仓促，书中尚有不足甚至错误，恳请同行、专家以及热心的读者批评指正。

编　者

2000 年 5 月

第1章 矩 阵

矩阵是线性代数的主要研究对象．现实中许多线性问题借助矩阵，可以很方便地表示出来，因而矩阵的理论和方法是解决问题的关键．可以说，矩阵是贯穿整个线性代数的灵魂，同时也是研究其他学科的重要工具．本章将从实际的示例中引入矩阵的概念，并规定其运算法则，对矩阵的秩的计算，以及方阵求逆的方法．此外，还着重介绍行列式的运算和运用．

1.1 矩阵问题

[问题 1] 炼油厂模型 现有一家公司开办了三个炼油厂，每个炼油厂生产 3 种产品：燃料油、柴油和汽油．设从 1 桶（1 桶 = 31.5gal = 158.99L）原油中，第一个炼油厂生产 16gal 燃料油、8gal 柴油和 4gal 汽油；第二个炼油厂生产 8gal 燃料油、20gal 柴油和 10gal 汽油；第三炼油厂生产 8gal 燃料油、8gal 柴油和 20gal 汽油．若需要 210gal 燃料油、240gal 柴油和 348gal 汽油，那么每个炼油厂各需要多少桶石油？

可以用一个表来表示各个厂的生产能力和生产某种产品的数量，如表 1－1－1 所列．

表 1－1－1

产品	炼油一厂	炼油二厂	炼油三厂
燃料油/gal	16	8	8
柴油/gal	8	20	8
汽油/gal	4	10	20

表中每一列数分别为每个炼油厂对这三种产品的产量．如第二炼油厂的生产能力可用下式表示

$$\alpha_2=\begin{pmatrix}8\\20\\10\end{pmatrix}$$

表中每一行数分别表示不同炼油厂生产某种产品的数量，如 $\beta_3=(4,10,20)$．

[解] 设 x_i 表示第 i 个炼油厂（$i=1,2,3$）所用石油的桶数，由题意，x_i 应满足下列线性方程组（即未知数的次方都是一次的）．

$$\begin{cases}16x_1+8x_2+8x_3=210\\8x_1+20x_2+8x_3=240\\4x_1+10x_2+20x_3=348\end{cases}\xRightarrow{\text{记成}}\begin{bmatrix}16&8&8\\8&20&8\\4&10&20\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}210\\240\\348\end{bmatrix}$$

解出此方程组中未知数 x_1，x_2，x_3 即可，如何解呢？

[问题 2] 求解方程组

$$\begin{cases}x_1-2x_2+4x_3=3\\3x_1-7x_2+9x_3=11\\-x_1+3x_2-3x_3=-1\end{cases}\tag{1-1-1}$$

[解] 一般常采用如下消元法

$$\begin{cases}x_1-2x_2+4x_3=3\\3x_1-7x_2+9x_3=11\\-x_1+3x_2-3x_3=-1\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}x_1-2x_2+4x_3=3\\-x_2-3x_3=2\\x_2+x_3=2\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}x_1-2x_2+4x_3=3\\-x_2-3x_3=2\\-2x_3=4\end{cases}$$

$$\longrightarrow\begin{cases}x_1-2x_2+4x_3=3\\-x_2-3x_3=2\\x_3=-2\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}x_1-2x_2=11\\-x_2=-4\\x_3=-2\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}x_1-2x_2=11\\x_2=4\\x_3=-2\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}x_1=19\\x_2=4\\x_3=-2\end{cases}$$

在这一求解过程中，只有三个未知数的系数变化，而未知数本身并不改变. 如果将其中线性方程组的所有未知数及运算符号（其中减号看成加负）去掉，便得到系数表格的变化过程即

$$\left[\begin{array}{ccc:c}1&-2&4&3\\3&-7&9&11\\-1&3&-3&-1\end{array}\right]\xrightarrow[1\times(1)+(3)]{-3\times(1)+(2)}\left[\begin{array}{ccc:c}1&-2&4&3\\0&-1&-3&2\\0&1&1&2\end{array}\right]\xrightarrow{1\times(2)+(3)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c}1&-2&4&3\\0&-1&-3&2\\0&0&-2&4\end{array}\right]\xrightarrow[-1\times(2)]{-\frac{1}{2}\times(3)}\left[\begin{array}{ccc:c}1&-2&4&3\\0&1&3&-2\\0&0&1&-2\end{array}\right]\xrightarrow[-4\times(3)+(1)]{-3\times(3)+(2)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c}1&-2&0&11\\0&1&0&4\\0&0&1&-2\end{array}\right]\xrightarrow{2\times(2)+(1)}\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&0&19\\0&1&0&4\\0&0&1&-2\end{array}\right]$$

最后一个矩阵的最右列即表示该方程组的解为

$$\begin{cases}x_1=19\\x_2=4\\x_3=-2\end{cases}$$

其中运算过程中的（1)、(2)、(3）分别表示系数表格中的第 1，2，3 行，最后得到了与上面完全相同的结果. 由此可见用消元法解线性方程组的过程，即为一种表（这种表

称为方程组的增广矩阵）的相应变换，这一结果对一般线性方程组同样适用. 这就是计算机中为节省存储单元而使用的求解线性方程组的消元过程. 因为把整个方程组（包括未知数 x_1，x_2，x_3 和运算符号）以及求解过程都输入电脑，将会占有较大的存储单元，而上面这种形式简洁，却反映方程组实质的过程，它必然会节省很多存储单元. 这就使得这个结果更具有实际应用价值.

更进一步讨论，如果方程组中的各变量又由其他的变量确定. 如方程式（1－1－1）中变量 x_1，x_2，x_3 分别由变量 y_1，y_2，y_3 按如下方式确定

$$\begin{cases} x_1 = 2y_1 - y_2 + 6y_3 \\ x_2 = y_1 - y_2 + 2y_3 \\ x_3 = -3y_1 + 4y_2 - 5y_3 \end{cases} \tag{1-1-2}$$

则满足式（1－1－1）和式（1－1－2）的 y_1，y_2，y_3 分别是多少？当然可以直接再求解一次方程组得出结果. 但当方程中的变量数很多时，计算量会很大，我们很容易发现，用代入法把式（1－1－2）代入式（1－1－1）后再解方程的方法可以节省计算量. 但在计算机中要实现这一代入，必须实现以矩形表格为表现形式的变量代换.

由此可见，在解方程组和确定变量组之间线性关系时，只需对其构造的矩形表格中数进行相应的计算. 那么这个表格是什么？它是怎样构造的？又将如何进行运算呢？

要回答这些问题，就需要引入矩阵以及运算，并介绍矩阵的一些应用.

1.2 矩阵及其运算

1.2.1 矩阵的概念

定义 1 由 $m \times n$ 个数 a_{ij}（$i=1, 2, \cdots, m$；$j=1, 2, \cdots, n$）排成的 m 行 n 列的数表，记为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

叫做 m 行 n 列**矩阵**，简称为 $m \times n$ 矩阵，这 $m \times n$ 个数叫做矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素，a_{ij} 叫做矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列的元素，元素是实数的矩阵称为实矩阵，元素是复数的矩阵称为复矩阵. 一般矩阵用大写 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，…或用（a_{ij}）表示，$m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$，也记为 $\boldsymbol{A}_{m \times n}$.

定义 2 如果两个矩阵行数相同，列数也相同，则称这两个矩阵是**同型矩阵**. 如果两个同型矩阵 $\boldsymbol{A} =$（a_{ij}），$\boldsymbol{B} =$（b_{ij}）如果它们的对应元素相同，即 $a_{ij} = b_{ij}$（$i=1, 2, \cdots, m$；$j=1, 2, \cdots, n$）那么就称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ **相等**，记作 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$. 注意，矩阵不能比较大小. 现介绍几种常用的矩阵.

1.2.1.1 行（列）矩阵

只有一行的矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 叫做行矩阵，记为 $\boldsymbol{A}_{1\times n}$；只有一列的矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ 叫做列矩阵，记为 $\boldsymbol{B}_{m\times 1}$.

1.2.1.2 方阵

如果矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的行数和列数都等于 n，则称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵. 方阵在矩阵中有着特殊的地位，这在以后的章节中还要讨论. 在方阵中，连接左上方和右下方的元素的连线称为主对角线，显然主对角线上元素可表示为 a_{ii} $(i=1, 2, \cdots, n)$；连接左下方和右上方的元素的连线称为副对角线，同样副对角线上元素可表示为 $a_{i(n-i+1)}$；如果不在主对角线上的元素全为零，这种方阵叫做对角矩阵，记为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

特别地，如果对角阵中 $a_{ii}=1$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，这个对角阵叫做单位矩阵，记为 $\boldsymbol{E}$

$$\boldsymbol{E}=(\delta_{ij}), \qquad 其中\ \delta_{ij}=\begin{cases} 1, & 当\ i=j\ 时 \\ 0, & 当\ i\neq j\ 时 \end{cases}$$

1.2.1.3 零矩阵

元素全为零的矩阵称为零矩阵，用 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$ 表示. 注意：(1) $\boldsymbol{O}_{m\times n}\neq 0$；(2) 不同型的零矩阵是不相等的.

1.2.1.4 阶梯形矩阵

如果一个矩阵的零元素的排列形状像台阶（邻近的多列可以在同一高度，或说台阶的宽度可以不同，但高度只能是1），则称这一矩阵为阶梯形矩阵.

如 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$；但 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 则不是阶梯形矩阵.

1.2.2 矩阵的运算

矩阵虽然使我们用数表很容易展示事物之间的关系，如用来表示方程组等，但仅仅如此就没有什么太大意义，如果对它定义一些有理论意义和实际意义的运算，它将成为理论研究和解决实际问题的重要工具.

[问题 3] 假设现记录 A，B，C，D 4 名学生 3 门课程的考试成绩. 对这三次考试，以学生为行、课程为列，各构成一个考试成绩矩阵.

$$\boldsymbol{S}_1=\begin{array}{c} \\ \mathrm{A}\\ \mathrm{B}\\ \mathrm{C}\\ \mathrm{D}\end{array}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 60 & 72 & 83\\ 80 & 55 & 87\\ 82 & 90 & 58\\ 55 & 80 & 73\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{S}_2=\begin{bmatrix}71 & 63 & 80\\ 70 & 67 & 76\\ 56 & 90 & 70\\ 58 & 90 & 82\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{S}_3=\begin{bmatrix}62 & 70 & 90\\ 72 & 75 & 81\\ 76 & 89 & 64\\ 54 & 85 & 76\end{bmatrix}$$

如何得到每个学生每门课程三次考试总成绩矩阵 $\boldsymbol{P}$？如果前两次考试各占总评的 25%，最后一次算 50%，又如何得到每个学生每门课程总评成绩矩阵 $\boldsymbol{Q}$？

现以学生 B 的第二门课程为例，他的三次考试总成绩 $p_{22}=55+67+75=197$，总评为 $q_{22}=55\times\frac{1}{4}+67\times\frac{1}{4}+75\times\frac{1}{2}=68$. 对其他各种情况依此类推，不难发现，所求矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{S}_1+\boldsymbol{S}_2+\boldsymbol{S}_3=\begin{bmatrix}193 & 205 & 253\\ 222 & 197 & 244\\ 214 & 269 & 192\\ 167 & 255 & 231\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q}=\frac{1}{4}\boldsymbol{S}_1+\frac{1}{4}\boldsymbol{S}_2+\frac{1}{2}\boldsymbol{S}_3=\begin{bmatrix}64 & 69 & 86\\ 74 & 68 & 81\\ 73 & 90 & 64\\ 55 & 85 & 77\end{bmatrix}$$

式中，$\boldsymbol{Q}$ 的元素值已进行四舍五入.

1.2.2.1 矩阵的加法和数乘

定义 3 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 和 $\boldsymbol{B}(b_{ij})$ 都是 $m\times n$ 矩阵，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的和记为 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 也是 $m\times n$ 矩阵. 其中 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})$ 满足 $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$，即 $\boldsymbol{C}$ 的元素分别为 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 对应的元素之和.

显然，只有同型矩阵才能进行相加.

定义 4 用数 k 去乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每个元素所得到的矩阵称为数 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的积，记为 $k\boldsymbol{A}$，即：$k\boldsymbol{A}=k(a_{ij})_{m\times n}=(ka_{ij})_{m\times n}$

特别地，$(-1)\boldsymbol{A}$ 简记为 $-\boldsymbol{A}$.

矩阵的加法和数乘具有下列运算规律：

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$　　　(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$

(3) $\boldsymbol{A}+0=\boldsymbol{A}$　　(4) $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=0$

(5) $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$　　(6) $(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$

(7) $(kl)\boldsymbol{A}=k(l\boldsymbol{A})$

式中，k，l 皆为数．以上的加法与数乘运算称为线性运算．

[例 1-2-1] 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&4\\-3&-2&1\\1&2&-1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&1&-2\\2&4&7\\-1&-1&3\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}$．

[解] $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&1&4\\-3&-2&1\\1&2&-1\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}0&1&-2\\2&4&7\\-1&-1&3\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}2&1&4\\-3&-2&1\\1&2&-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&2&-4\\4&8&14\\-2&-2&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3&0\\1&6&15\\-1&0&5\end{bmatrix}$$

[问题 4] 在医院的病房有三种可选择的菜单，每种均含有肉类、蔬菜类和蛋类．矩阵 $\boldsymbol{A}$ 给出了明后两天每天订购的菜单数，其中行表示明后两天的订量，列表示菜单；矩阵 $\boldsymbol{B}$ 给出了每种菜单中每项的价格（单位元），其中行表示菜单，列表示在各菜单中三类菜分别对应的费用．

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}20&30&25\\18&26&30\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3&1&2\\2&2&2\\4&1&3\end{bmatrix}$$

请给出明后两天各类菜所需费用的矩阵．

[解] 现以后天对蛋类需要的费用为例．有 $c_{23}=18\times2+26\times2+30\times3=178$ 元

所以要求的矩阵为

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}20\times3+30\times2+25\times4 & 20\times1+30\times2+25\times1 & 20\times2+30\times2+25\times3\\18\times3+26\times2+30\times4 & 18\times1+26\times2+30\times1 & 18\times2+26\times2+30\times3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}220&105&175\\226&100&178\end{bmatrix}$$

上面的运算可写成 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$．

定义 5 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times s$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $s\times n$ 矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1s}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2s}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{ms}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1n}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_{s1}&b_{s2}&\cdots&b_{sn}\end{bmatrix}$$

则定义 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积为

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1n}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\c_{m1}&c_{m2}&\cdots&c_{mn}\end{bmatrix}$$

式中，$c_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{ki}b_{kj}$，$i=1, 2, \cdots, m$；$j=1, 2, \cdots, n$.

乘积矩阵$\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$的第 i 行第 j 列元素是左边矩阵第 i 行元素与右边矩阵第 j 列对应的元素乘积之和.

［例 1－2－2］ 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & -1 & 0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0 & 2\\ -2 & 4 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$.

［解］ 由乘积定义可知

$$\begin{aligned}\boldsymbol{AB}&=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1 & 0 & 2\\ -2 & 4 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}1\times3+0\times(-2)+3\times0 & 1\times1+0\times4+3\times1 & 1\times0+0\times1+3\times(-1) & 1\times2+0\times0+3\times1\\ 2\times3+(-1)\times(-2)+0\times0 & 2\times1+(-1)\times4+0\times1 & 2\times0+(-1)\times1+0\times(-1) & 2\times2+(-1)\times0+0\times1\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}3 & 4 & -3 & 5\\ 8 & -2 & -1 & 4\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

注意：

（1）只有当左边的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列数与右加矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行数相同时，乘积 $\boldsymbol{AB}$ 才有意义.

如 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}_{2\times1}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 5\end{bmatrix}_{2\times2}$，则 $\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix}1\\ 5\end{bmatrix}_{2\times1}$，而 $\boldsymbol{AB}$ 无意义（不能相乘）.

（2）矩阵的乘法一般不满足交换律，即 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$，所以在做矩阵相乘时要分清是 $\boldsymbol{A}$ 左（边）乘 $\boldsymbol{B}$ 还是右（边）乘 B.

如 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}5 & 4\\ -2 & 2\end{bmatrix}$，但 $\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix}1 & -3\\ 4 & 6\end{bmatrix}$两者并不相等.

（3）两个非零矩阵之积也可能为 0，即 $\boldsymbol{AB}=0$ 并不能推出 $\boldsymbol{A}=0$ 或 $\boldsymbol{B}=0$.

如 $\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$但 $\boldsymbol{A}\neq0$，$\boldsymbol{B}\neq0$.

（4）矩阵乘法一般不满足消去律，即 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{BC}$ 且 $\boldsymbol{C}\neq0$ 不能推出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

如 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 8\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-4 & 1\\ 5 & 3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix}$容易看出，$\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{BC}$ 但 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{B}$.

矩阵乘法满足如下运算规律：

（1）结合律　$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$

（2）分配律　$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$，$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{CA}+\boldsymbol{CB}$，

$k(\boldsymbol{AB})=(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$，其中 k 为数.

1.2.2.2 矩阵的转置

定义 6 将 $m\times n$ 矩阵$\boldsymbol{A}$ 行与列互换，得到的 $n\times m$ 矩阵称为$\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，记为 $\boldsymbol{A}'$，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}, \quad 则\ \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{n\times m}.$$

显然 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列元素等于 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 行第 i 列元素. 如

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A}'=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

矩阵的转置也是一种运算，它满足如下的运算规律:

(1) $(\boldsymbol{A}')'=\boldsymbol{A}$;

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})'=\boldsymbol{A}'+\boldsymbol{B}'$;

(3) $(k\boldsymbol{A})'=k\boldsymbol{A}'$, 其中 k 为数;

(4) $(\boldsymbol{AB})'=\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}'$.

[例 1-2-3] 设 $\boldsymbol{A}=(1 \quad -1 \quad 2)$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, 验证 $(\boldsymbol{AB})'=\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}'$.

[解] 因为, $\boldsymbol{AB}=(9 \quad 2 \quad -1)$

所以 $(\boldsymbol{AB})'=\begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}'=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

1.2.3 矩阵的初等变换与初等矩阵

从第 1.1 节问题 2 中可见，求解一个线性方程组时，常用列的三种变换方法，即为:

(1) 互换两个方程的位置;

(2) 在某个方程两边同除以某个非零常数;

(3) 用一个非零数乘某一个方程后加到另一个方程上去 (即消元).

可以证明，用以上的方法可将原方程转化为一个同解的简单的线性方程组，这些做法同样可以在矩阵上进行运用的具体做法有:

(1) 交换矩阵的两行 (常用 $r_i \leftrightarrow r_j$ 表示将第 i 行与第 j 行交换);

(2) 用一非零常数乘以矩阵的某一行 (常用 $k\times r_i$ 表示用常数 k 乘以第 i 行的所有元素);

(3) 将矩阵的某一行乘以常数 k 后，加到另一行 (常用 $k\times r_i+r_j$ 表示第 i 行的元素的 k 倍分别加到第 j 行的所有元素上去).

这就是矩阵的**初等行变换**; 同理有矩阵的初等列变换，初等行变换和列变换统称为矩阵的**初等变换**. 矩阵的初等变换是线性代数中的基本运算，线性代数的其他一些很重要的计算，如求矩阵的秩、求可逆矩阵的逆矩阵、求解线性方程组等，都可利用矩阵的

初等变换得到解决.

[例 1-2-4] 用初等行变换将矩阵 $A=\begin{bmatrix}0&0&1&2\\1&3&-2&2\\2&6&-8&0\end{bmatrix}$ 化为阶梯形矩阵.

[解]

$$A=\begin{bmatrix}0&0&1&2\\1&3&-2&2\\2&6&-8&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{bmatrix}1&3&-2&2\\0&0&1&2\\2&6&-8&0\end{bmatrix}\xrightarrow{(-2)\times r_1+r_3}$$

$$\begin{bmatrix}1&3&-2&2\\0&0&1&2\\0&0&-4&-4\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3\times\left(-\frac{1}{4}\right)}\begin{bmatrix}1&3&-2&2\\0&0&1&2\\0&0&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{(-1)\times r_3+r_2}$$

$$\begin{bmatrix}1&3&-2&2\\0&0&0&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}1&3&-2&2\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}=B.$$

如果继续施行初等行变换，则

$$B\xrightarrow[r_3\times(-2)+r_1]{r_3\times(-1)+r_2}\begin{bmatrix}1&3&-2&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3\times(-2)+r_1}\begin{bmatrix}1&3&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=C$$

最后得列的矩阵 B 和 C 都是阶梯形矩阵.

由例 1-2-4 可以看到，对矩阵施行初等行变换可以得到多种阶梯形矩阵.

定义 7 若对矩阵 A 施行若干次初等变换得到矩阵 B，则称矩阵 A 和 B 是等价的. 记为 $A\sim B$，如例 1-2-4 中 $A\sim B\sim C$.

显然，任何一个矩阵都等价于一个阶梯形矩阵. 虽然这种阶梯形矩阵可以有很多，但可以证明，形如上例中 C 的阶梯形矩阵则是惟一的，并满足：

(1) 非零行中首个非零元素为 1；

(2) 首个非零元素所在的列除该元素外全为零.

这种阶梯形矩阵叫做行最简阶梯形矩阵. 任何一个矩阵都等价于惟一的行最简阶梯形矩阵. 需要指出的是，在第 1.1 节的问题 2 中解方程组的过程，在应用计算机求解时，就是对线性方程组的增广矩阵施行初等变换的过程. 现再举例说明.

[例 1-2-5] 求解方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2-2x_3+3x_4=2\\2x_1+4x_2-3x_3+4x_4=5\\5x_1+10x_2-8x_3+11x_4=12\end{cases}$.

[解] 对该方程组系数的增广矩阵（即系数矩阵再加上非齐次项构成的一列所得），施行初等行变换化为行最简阶梯形矩阵.

$$\begin{bmatrix}1&2&-2&3&2\\2&4&-3&4&5\\5&10&-8&11&12\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&-2&3&2\\0&0&1&-2&1\\0&0&2&-4&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&0&-1&4\\0&0&1&-2&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

所以原方程组同解于方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \quad - x_4 = 4 \\ \qquad\qquad x_3 - 2x_4 = 1 \end{cases}$$

即解为
$$\begin{cases} x_1 = 4 - 2x_2 + x_4 \\ x_3 = 1 + 2x_4 \end{cases}$$

式中，x_2，x_4 可为任何实数.

定义 8 对单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 施行一次初等行变换所得到的矩阵叫做初等矩阵. 由于初等行变换有三种形式，所以初等矩阵共有三种，即

$$\boldsymbol{E}(i, j) = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & \vdots & \vdots & & \\ & & 1 & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ i\text{ 行} \\ \\ j\text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\boldsymbol{E}(i, j(k)) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & k & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ i\text{ 行} \\ \\ j\text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\boldsymbol{E}(i(k)) = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & k & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ i\text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}$$

式中，$\boldsymbol{E}(i, j)$ 表示将 $\boldsymbol{E}$ 中第 i 行和第 j 行互换；$\boldsymbol{E}(i, j(k))$ 表示将 $\boldsymbol{E}$ 的第 j 行乘以数 k 加到第 i 行上去所得的矩阵；$\boldsymbol{E}(i(k))$ 表示 $\boldsymbol{E}$ 中第 i 行乘以数 k 所得的矩阵.

初等矩阵都是方阵，它和矩阵的初等变换有如下关系.

性质 1 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵，则

(1) $\boldsymbol{E}(i, j)\boldsymbol{A}$，相当于交换 $\boldsymbol{A}$ 的 i，j 两行（即 $r_i \leftrightarrow r_j$）；

(2) $\boldsymbol{E}(i, j(k))\boldsymbol{A}$，相当于 A 的第 j 行加上第 i 行元素的 k 倍（即 $r_j \times k + r_i$）；

(3) $\boldsymbol{E}(i(k))\boldsymbol{A}$，相当于将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行元素同乘以常数 k（即 $r_i \times k$）.

也就是说对 $\boldsymbol{A}$ 作一次初等行变换就等同于用一个 m 阶初等矩阵左乘 $\boldsymbol{A}$，这样可以用等号连接式子而不是用“$\longrightarrow$”连接，便于理论分析和推导.

注意：

(1) 左乘时初等矩阵必须是 m 阶的.

(2) 对 $\boldsymbol{A}$ 作一次初等列变换就等同于用一个 n 阶初等矩阵右乘矩阵 $\boldsymbol{A}$. 由于未讨论列变换，在此从略.

如$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\3&2&1\\2&1&3\end{bmatrix}\xrightarrow{(-3)\times r_1+r_2}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-4&-8\\2&1&8\end{bmatrix}=B$，而$E(2,1(-3))A=$
$\begin{bmatrix}1&0&0\\-3&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\3&2&1\\2&1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-4&-8\\2&1&3\end{bmatrix}=B$，其作用就是把上述变换过程用等号形式表示出来以便计算.

性质 2 任何初等矩阵可由相应的初等变换还原为单位矩阵.

如$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$即$E(2,3)\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}E$.

1.2.4 矩阵的秩

众所周知，任何一个矩阵都可由初等变换化为行最简阶梯形矩阵，且行最简梯形矩阵是惟一的. 由此可见，与矩阵等价的行最简阶梯形矩阵的非零行个数（即行最简形首个非零元素 1 的个数）是该矩阵的固有特征.

定义 9 设A为$m\times n$矩阵，则与A等价的阶梯形矩阵中非零行的个数r称为矩阵A的**秩**. 记为$\mathrm{r}(A)=r$.

可知，$\mathrm{r}(A)\leqslant\min(m,n)$，特殊地$\mathrm{r}(A)=m$，则称矩阵$A$为**行满秩矩阵**. 同理定义列满秩矩阵. 若$\mathrm{r}(A)<\min(m,n)$，称矩阵$A$为**降秩矩阵**.

性质 1 若$A\sim B$，则$\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(B)$.

[例 1-2-6] 求矩阵$A=\begin{bmatrix}1&-1&1&2\\2&3&3&2\\1&1&2&1\end{bmatrix}$的秩.

[解] 对矩阵A施行初等行变换，有

$$\begin{bmatrix}1&-1&1&2\\2&3&3&2\\1&1&2&1\end{bmatrix}\xrightarrow[(-1)\times r_1+r_3]{(-2)\times r_1+r_2}\begin{bmatrix}1&-1&1&2\\0&5&1&-2\\0&2&1&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{(-2)r_3+r_2}$$

$\begin{bmatrix}1&-1&1&2\\0&1&-1&0\\0&2&1&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{(-2)\times r_2+r_3}\begin{bmatrix}1&-1&1&2\\0&1&-1&0\\0&0&3&-1\end{bmatrix}$. 由于该阶梯形矩阵中非零行的个数为 3，所以$\mathrm{r}(A)=3$，即$A$为行满秩矩阵.

[例 1-2-7] 求矩阵$A=\begin{bmatrix}0&0&1&2&-1\\1&3&-2&2&-1\\2&6&-4&5&7\\-1&-3&0&4&-19\end{bmatrix}$的秩.

[解] 按上题同样方法得

$$A \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$. 所以 r（A）=3，A 为一个降秩矩阵.

1.3 方阵的行列式和方阵的幂

1.3.1 方阵的行列式

1.3.1.1 方阵的行列式的定义

设矩阵 A 为二阶方阵，令 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$，称 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$为 A 的行列式，记为

$$|A| \text{或} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

即
$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

若 A 为一个三阶方阵，则定义其行列式为

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

式中，每一项是由第 1 行的元素与 A 中划去该元素所在的行和列所剩下的元素，且按原来位置构成的二阶行列式的乘积，前面的符号取决于该元素所在的行和列数之和的奇偶性，奇数取负；偶数取正（如第二项 a_{12}的行和列数之和为 3，所以前面取负号，等等).

定义 10 对 n 阶方阵$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$，其行列式定义为

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+$$

$$
(-1)^{n+1}a_{1n}\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2(n-1)} \\ a_{31} & \cdots & a_{3(n-1)} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(n-1)} \end{vmatrix}.
$$

n 阶方阵的行列式也简称为 **n 阶行列式**.

注意：

(1) 上述定义是对行列式按矩阵第 1 行展开的，其实按任一行或任一列展开都可以作为行列式的定义.

(2) 行列式和方阵是两个完全不同的概念. n 阶方阵是 n^2 个数按一定方式排列成的数表，而 n 阶行列式则是这个数表按一定的运算法则所确定的一个数.

[例 1－3－1] 用定义计算行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

[解] 按三阶行列式的定义，有

$$
|\boldsymbol{A}| = 4\times\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 0\times\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 2\times\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}
$$

$$
= 4\times[3\times1-(-1)\times2]+2(3\times2-1\times2)=28
$$

说明：行列式的定义除本书介绍的方法外，还有其他的方法. 由于其他方法要用到逻辑性较强的数学知识，本书未予采用. 有兴趣的读者，可自行阅读有关资料.

1.3.1.2 行列式的性质

根据 n 阶行列式的定义，大家知道，若计算 n 阶行列式需要计算 n 个 $(n-1)$ 阶行列式，当用行列式定义去计算另一个行列式，特别是高阶行列式时比较麻烦. 为此列出了行列式计算的基本性质，利用这些性质可以达到简化行列式计算的目的.

性质 1 矩阵的行列式与矩阵转置的行列式相等.

例如 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$，即 $|\boldsymbol{A}'| = |\boldsymbol{A}|$.

性质 2 对矩阵施行第一种初等行变换（矩阵的两行互换）改变其行列式的符号.

例如 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$.

推论 1 矩阵中有两行（列）对应元素相等则其行列式等于零.

性质 3 对矩阵施行第二种初等行变换（将矩阵的某行所有元素同乘以数 k）使矩阵行列式的值增大为 k 倍.

例如 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.