报考理工科研究生复习指导丛书

WULI

WULI

WULI

WULI

WULI

# 物理

报考理工科研究生复习指导丛书
物　理
唐智明　王永久　编
湖南科学技术出版社出版
（长沙市展览馆路14号）
湖南省新华书店发行　湖南省新华印刷二厂印刷
1986年1月第1版第1次印刷
开本：787×1092毫米 1/32　印张：13.5　字数：311,000
印数：1—3,300
统一书号：13204·120　　定价：2.15元
征订期号：湖南新书目85—21(28)

# 前　言

本书是根据教育部颁发的普通物理教学大纲和报考研究生的具体要求编写的，其目的是为报考理工科研究生的广大青年学生提供一本普通物理复习资料．在内容编排上力求全面而简洁，突出物理概念之间的联系和公式推导过程的来龙去脉，力求考生在复习时不需要再翻阅教材．

书中部分例题选自美国研究生考题和伯克利物理考题，还有一部分选自理论物理的对应部分，经作者改编和加工而成．题目的综合性和灵活性均较突出．在“习题解法分析”中，侧重于分析问题的类型特点和解题思路，以求收到“举一反三”的效果．书末附有北京大学、清华大学和哈尔滨工业大学的研究生考题，供读者复习过后练习之用．

本书可作为在校学生的辅导读物，也可供任课教师和工程技术人员参考．

湖南师范学院物理系谢泉教授审阅了全部手稿，提出了许多有益的意见，作者深表感谢．

王永久　唐智明

一九八四年五月于长沙

# 目　　录

# 第一章　矢量

## 一　复习要点

**1　矢量的表示法**　既具有大小又具有方向，并满足平行四边形法则的量叫做矢量．力学中的速度、加速度、力、动量、力矩、角动量等等都是矢量．任一矢量都有两种表示方法：一般表示法（即矢量法，不需要首先确定坐标系）和坐标表示法（即解析法）．

矢量的一般表示法．任一矢量$\boldsymbol{A}$可用一有向线段表示，或写为

$$\boldsymbol{A}=A\boldsymbol{A}^0,$$

式中$A$为矢量$\boldsymbol{A}$的模（长度），$\boldsymbol{A}^0$为矢量$\boldsymbol{A}$方向上的单位矢量．

矢量的坐标表示法．任一矢量$\boldsymbol{A}$可表为

$$\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k}, \tag{1.2}$$

式中$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$分别为预先选定的狄卡儿坐标系三个坐标轴上的单位矢量．此坐标系常是不转动的，因此$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$均不随时间变化．$A_x$，$A_y$、$A_z$是矢量$\boldsymbol{A}$在三个坐标轴上的分量值．

矢量$\boldsymbol{A}$的模是

$$A=\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}. \tag{1.3}$$

矢量$\boldsymbol{A}$的三个方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{A_x}{A},\quad \cos\beta=\frac{A_y}{A},\quad \cos\gamma=\frac{A_z}{A}. \tag{1.4}$$

**2　矢量的和与矢量的积**

一般表示法：

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}, \tag{1.5}$$

式中$\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$和$\boldsymbol{C}$构成一三角形．同样，由式（1.5）可定义二矢量的差：$\boldsymbol{C}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

标积

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=AB\cos\theta, \tag{1.6}$$

式中$\theta$是二矢量间的夹角．由此可知$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}=A^2$.

矢积

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C},\quad C=AB\sin\theta, \tag{1.7}$$

$\boldsymbol{C}$和$\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$构成右手螺旋系．由此可知

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A},$$

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}=0,$$

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}. \tag{1.8}$$

坐标表示法：

$$\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B}=(A_x\pm B_x)\boldsymbol{i}+(A_y\pm B_y)\boldsymbol{j}+(A_z\pm B_z)\boldsymbol{k}, \tag{1.9}$$

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z, \tag{1.10}$$

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=(A_yB_z-A_zB_y)\boldsymbol{i}+(A_zB_x-A_xB_z)\boldsymbol{j}$$

$$+(A_xB_y-A_yB_x)\boldsymbol{k}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ A & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}. \tag{1.11}$$

**3 矢量的微商**

一般表示法：

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}=\frac{dA}{dt}\boldsymbol{A}^0+A\frac{d\boldsymbol{A}^0}{dt}. \tag{1.12}$$

坐标表示法：

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}=\frac{dA_x}{dt}\boldsymbol{i}+\frac{dA_y}{dt}\boldsymbol{j}+\frac{dA_z}{dt}\boldsymbol{k}. \tag{1.13}$$

对于标量和矢量的积、矢量和矢量的积，其微商法则与通常标量积的微商法则相同（只是要注意矢量积中两矢量的位置不能交换）：

$$\frac{d}{dt}(\varphi\boldsymbol{A})=\frac{d\varphi}{dt}\boldsymbol{A}+\varphi\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}, \tag{1.14}$$

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}, \tag{1.15}$$

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}. \tag{1.16}$$

**4 标量场的梯度** 标量场$\varphi(x,y,z)$的梯度定义为

$$\text{grad}\ \varphi\equiv\nabla\varphi=\boldsymbol{n}^0\frac{\partial\varphi}{\partial n}, \tag{1.17}$$

$\boldsymbol{n}^0$是沿$\frac{\partial\varphi}{\partial l}$最大的方向即$\varphi$等值面的法线方向的单位矢量，$\frac{\partial\varphi}{\partial n}$即沿$\boldsymbol{n}^0$方向的$\varphi$的方向导数．由上式可知

$$\boldsymbol{l}^0\cdot\nabla\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial l}, \tag{1.18}$$

即$\varphi$沿$\boldsymbol{l}^0$方向的方向导数．$\nabla\varphi$的坐标表示式为：

$$\nabla\varphi=\boldsymbol{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \tag{1.19}$$

由梯度的定义不难证明：

$$\nabla(\varphi f)=\varphi\nabla f+(\nabla\varphi)f, \tag{1.20}$$

$$\nabla r=\frac{\boldsymbol{r}}{r},\quad \nabla\frac{1}{r}=-\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}. \tag{1.21}$$

$$\nabla[f(r)]=\frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r}, \tag{1.22}$$

$$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r})=\boldsymbol{A}.\ (\boldsymbol{A}\text{为常矢量}) \tag{1.23}$$

**5 矢量场的散度和旋度** 矢量场$\boldsymbol{E}(x,y,z)$的散度定义为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_S\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}}{\Delta V}, \tag{1.24}$$

其坐标表示式为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}. \tag{1.25}$$

由上式可以证明

$$\oint_S\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=\iiint_V\nabla\cdot\boldsymbol{E}dV, \tag{1.26}$$

$$\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{A})=\nabla\varphi\cdot\boldsymbol{A}+\varphi\nabla\cdot\boldsymbol{A}, \tag{1.27}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{r}=3. \tag{1.28}$$

矢量场$\boldsymbol{E}(x,y,z)$的旋度定义为

$$|\nabla\times\boldsymbol{E}|=\left[\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint_L\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}}{\Delta S}\right]_{\max}, \tag{1.29}$$

其方向与$L$的环绕方向成右手螺旋系. $\nabla\times\boldsymbol{E}$的坐标表示式为

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial E}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}$$
$$+\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}。 \tag{1.30}$$

由上式可以证明

$$\oint_L\boldsymbol{E}\cdot dl=\iint_S\nabla\times\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s}, \tag{1.31}$$

$$\nabla\times(\varphi\boldsymbol{A})=\nabla\varphi\times\boldsymbol{A}+\varphi\nabla\times\boldsymbol{A}, \tag{1.32}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{r}=0. \tag{1.33}$$

# 二　习题解法分析

在证明二矢量$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$垂直时，常证明$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=0$。但此时应注意，只有当$A\neq0$和$B\neq0$二条件同时满足时，才可由$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=0$得到$\boldsymbol{A}\perp\boldsymbol{B}$的结论，这可由定义式(1.6)看出。同样，在$A\neq0$和$B\neq0$的条件下，由$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=0$可以得到$\boldsymbol{A}\parallel\boldsymbol{B}$的结论。

在解题过程中，采用一般表示法还是坐标表示法，要看题目的已知条件.如果已知的诸矢量与某一个或某几个确定的(不随时间变化的）方向有联系，则用坐标表示法方便；如果问题中不涉及某一个或某几个确定的方向，则往往用矢量的一般表示法方便。

**例1.1**　已知$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|$，$(A\neq0,\ B\neq0)$，求证$\boldsymbol{A}\perp\boldsymbol{B}$。

**分析**　问题的已知条件不涉及任何确定的方向，所以不需要采用坐标表示法。

$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|\text{即}$$

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}),$$

由此得　$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=0$，$\boldsymbol{A}\perp\boldsymbol{B}$。

读者可以用坐标表示法重作此题，比较一下，看哪种方法简便。

**例1.2**　试用标积公式证明$\cos(\theta\mp\phi)=\cos\theta\cos\phi\pm\sin\theta\sin\phi$。

**分析**　题中$\phi$的正负必须以$\phi=0$为准，故问题中暗含了一个确定的方向，即$\phi=0$的方向。因此，应采用矢量的坐标表示法（如图)。取$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$为单位矢量，则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\cos(\theta\mp\phi)=a_xb_x\pm a_yb_y,$$

即 $\cos(\theta\mp\phi)=\cos\theta\cos\phi\pm\sin\theta\sin\phi$.

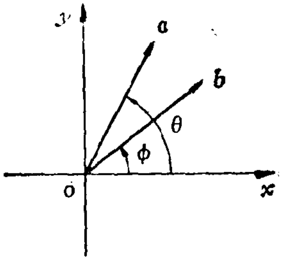


图1.1

## 习　题

**1.1** 已知 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$，$A+B=C$，$A\neq 0$，$B\neq 0$，$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$有什么关系？若$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$，$A^2+B^2=C^2$，$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$又有什么关系？分别用矢量的一般表示法和坐标表示法解之，并比较一下，哪种方法简便？

**1.2** 试用矢积公式证明$\sin(\theta\pm\phi)=\sin\theta\cos\phi\pm\cos\theta\sin\phi$.

**1.3** 一质点的位矢为$\boldsymbol{r}=16t\boldsymbol{i}+25t^2\boldsymbol{j}+33\boldsymbol{k}$，求质点的速度和加速度.

**1.4** 试证明$\dfrac{d\boldsymbol{A}^0}{dt}$与$\boldsymbol{A}^0$垂直.

# 第二章 质点运动学

## 一 复习要点

1 **位矢** 以某个选定的原点为起点，以质点的位置为终点的矢量叫质点的位矢，记作$\boldsymbol{r}$. 用一般表示法和坐标表示法分别表为

$$\boldsymbol{r}=r\boldsymbol{r}^0, \tag{2.1}$$

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}. \tag{2.2}$$

2 **速度** 质点的即时速度定义为

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}. \tag{2.3}$$

由(2.1)可得到

$$\boldsymbol{v}=\frac{dr}{dt}\boldsymbol{r}^0+r\frac{d\boldsymbol{r}^0}{dt}.$$

由图2.1可知$\frac{d\boldsymbol{r}^0}{dt}=\frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{\theta}^0$,

$\boldsymbol{\theta}^0$为横向（与$\boldsymbol{r}^0$垂直)的单位矢，因此

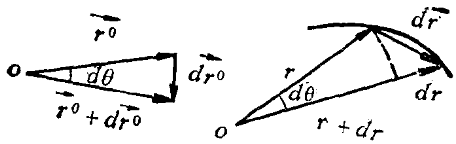


图2.1

$$\boldsymbol{v}=\frac{dr}{dt}\boldsymbol{r}^{0}+r\frac{d\theta}{dt}\theta^{0},\tag{2.4}$$

$$v_r=\frac{dr}{dt},\quad v_\theta=r\frac{d\theta}{dt},\quad v=\sqrt{v_r^2+v_\theta^2}.\tag{2.5}$$

这就是质点速度的二维极坐标表示式.

由(2.2)和(2.3)得到速度的狄卡儿坐标表示式:

$$\boldsymbol{v}=\frac{dx}{dt}\boldsymbol{i}+\frac{dy}{dt}\boldsymbol{j}+\frac{dz}{dt}\boldsymbol{k},\tag{2.6}$$

$$v=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2},\tag{2.7}$$

$\boldsymbol{v}$的方向由三个方向余弦确定〔见式(1.4)〕.

这里要注意速度的矢量性. 由式(2.4) 可见, 在一般情况下,

$$v=\frac{ds}{dt}=\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|\neq\frac{dr}{dt},$$

因为对于一般情况下质点的运动, $\frac{d\boldsymbol{r}^0}{dt}\neq0$, 即位矢的方向要发生变化.只有在直线运动的情况下, 才有

$$\frac{d\boldsymbol{r}^0}{dt}=0,v=\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|=\frac{dr}{dt}.$$

**3　加速度**　质点的即时加速度定义为

$$\boldsymbol{a}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}.\tag{2.8}$$

由式(2.6)可得加速度在狄卡儿坐标系中的表示式:

$$\boldsymbol{a}=\frac{d^2x}{dt^2}\boldsymbol{i}+\frac{d^2y}{dt^2}\boldsymbol{j}+\frac{d^2z}{dt^2}\boldsymbol{k},\tag{2.9}$$

$$a=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2},\tag{2.10}$$

$\boldsymbol{a}$的方向由三个方向余弦确定〔见式(1.4)〕.

在许多情况下，将加速度$\boldsymbol{a}$分解为切向加速度$a_\tau \boldsymbol{\tau}^0$和法向加速度$a_n \boldsymbol{n}^0$会给问题的解决带来方便。这种固连于质点的由切向单位矢量和法向单位矢量构成的运动坐标系，通常称为自然坐标系。在自然坐标系中，速度表为

$$\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{\tau}^0, \qquad (2.11)$$

式中$\boldsymbol{\tau}^0$为质点所在处，沿轨道切线并指向运动方向的单位矢量，如图2.2所示。将式(2.11)对时间求微商，得到

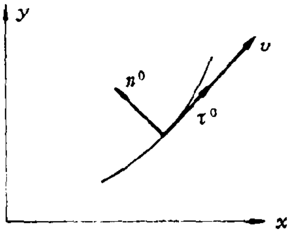

图2.2

$$\boldsymbol{a} = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau}^0 + v\frac{d\boldsymbol{\tau}^0}{dt}.$$

和得到式(2.4)的过程相似，可以得到$\frac{d\boldsymbol{\tau}^0}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{n}^0$。而$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{\rho}$，$\rho$为轨道在该点的曲率半径。于是得到加速度在自然坐标系中的表达式：

$$\boldsymbol{a} = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau}^0 + \frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n}^0, \qquad (2.12)$$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}, \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}. \qquad (2.13)$$

由上式可见，在一般情况下，$a = \left|\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right| \neq \frac{dv}{dt}$。只有在直线运动的情况下($\rho = \infty$)，才有$a = \left|\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right| = \frac{dv}{dt}$。

对于圆周运动，式(2.12)和(2.13)中的曲率半径$\rho$代之以轨道半径$R$；对于等速率圆周运动，式(2.12)中第一项等于零，加速度即向心加速度$a_n = \frac{v^2}{R}$。

**4 运动方程** 如果对于任意给定的时刻$t$，我们都能确定

质点的位置$\boldsymbol{r}$，我们就掌握了质点的运动规律。因此，质点的运动规律即由函数关系

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t) \tag{2.14}$$

确定。上式叫作质点的运动方程，在狄卡儿坐标系选定了之后，它可写成分量形式：

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t). \tag{2.15}$$

由式(2.15)消去时间$t$，便得质点的轨道方程：

$$\begin{cases} F_1(x,\ y,\ z)=0, \\ F_2(x,\ y,\ z)=0, \end{cases} \tag{2.16}$$

所以，知道了运动方程，立即可求出轨道方程。

5 **相对运动** 任意三个相对运动的物体$A$，$B$和$C$，它们间的相对速度和相对加速度一定满足下面的关系式：

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_{AC}=\boldsymbol{v}_{AB}+\boldsymbol{v}_{BC}, \\ \boldsymbol{a}_{AC}=\boldsymbol{a}_{AB}+\boldsymbol{a}_{BC}. \end{cases} \tag{2.17}$$

## 二 习题解法分析

质点运动学的问题可分为两类。第一类，已知运动方程$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$，求速度$\boldsymbol{v}(t)$和加速度$\boldsymbol{a}(t)$。这类问题只要逐次求导便可得到答案。有些问题，在已知条件中不明显地给出关系式$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$，这就需要先分析清楚运动过程，找出关系式$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$，再求导。还有些问题，在一种坐标系中给出了运动方程，要求出另一种坐标系中的速度和加速度。这就要求掌握不同种坐标系中$\boldsymbol{v}$和$\boldsymbol{a}$的表示式，如式(2.4)和(2.6)，式(2.12)和(2.9)等。

第二类问题是已知质点的加速度，要求出运动方程或轨道方程。这类问题要用积分的方法解。

质点运动学中还有更复杂的问题，但往往都可以分解为上述两类问题.

**例2.1** 以初速度 $\boldsymbol{v}_0$ 水平抛出一物体. 试求$t$秒末物体所在处轨道的曲率半径.

**分析** 欲求曲率半径，先要求出质点的速率和法向加速度〔由式(2.12)自然会想到〕. 对于平抛运动，在狄卡儿坐标系中，速度的分量式是已知的，故立即可得速率的表示式；由速率对时间求微商便得到切向加速度. 剩下的问题是如何由切向加速度求法向加速度. 只要想到质点的加速度等于重力加速度，问题就解决了.

首先建立坐标系，以抛出点为原点，沿$\boldsymbol{v}_0$的水平方向为$x$轴方向，$y$轴方向竖直向下（如图2.3所示），抛出时刻$t=0$. $t$秒末有

$$v_x=v_0,\ v_y=gt,$$

$$v=\sqrt{v_0^2+g^2t^2}.$$

切向加速度为

$$a_\tau=\frac{dv}{dt}=\frac{g^2t}{\sqrt{v_0^2+g^2t^2}},$$

法向加速度为：

$$a_n=\sqrt{g^2-a_\tau^2}=\frac{v_0g}{\sqrt{v_0^2+g^2t^2}},$$

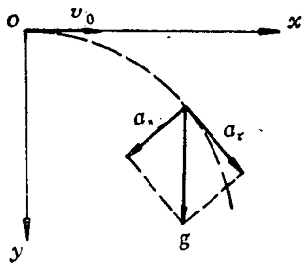

图2.3

所以对应的曲率半径为：

$$\rho=\frac{v^2}{a_n}=\frac{1}{v_0g}(v_0^2+g^2t^2)^{3/2}. \tag{2.18}$$

**例2.2** 节日晚上放焰火，焰火弹爆炸时形成许多火花点. 假设爆炸时焰火弹对地的速度已很小，并且爆炸具有球对称性，试证明诸火花点构成一膨胀着的球面，球心加速下移.

**分析** 首先考虑如何选择参考系. 由于问题中涉及到一个

特定的方向：重力加速度的方向，而且爆炸时焰火弹可视为静止的，所以应选择狄卡儿坐标系，原点即爆炸时的位置，$X$、$Y$轴水平，$Z$轴竖直向下．由于爆炸时具有球对称性，我们可以追踪任意一个火花点，将其坐标表示式中任意的因素消掉，便可得到各个火花点的整体形象了．

任意一个火花点的运动都是熟知的抛体运动．由于爆炸具有球对称性，它们初速度的大小应该是相同的，而方向却是任意的。设共同的初速度为$v_0$，对于任意一个火花点，$\boldsymbol{v}_0$的方向角为$\alpha$，$\beta$，$\gamma$，则由$a_x=0$，$a_y=0$和$a_z=g$积分($t=0$时$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0$)得到

$$v_x=v_0\cos\alpha,\quad v_y=v_0\cos\beta,\quad v_z=v_0\cos\gamma+gt.$$

再积分一次($t=0$时 $x=y=z=0$)，得到

$$\begin{aligned}
x&=v_0t\cos\alpha,\\
y&=v_0t\cos\beta,\\
z&=v_0t\cos\gamma+\frac{1}{2}gt^2.
\end{aligned}\tag{2.19}$$

消去任意的因素$\alpha$，$\beta$和$\gamma$，可以借助于下式：

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.\tag{2.20}$$

将式(2.19)代入(2.20)，得到

$$x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}gt^2\right)^2=(v_0t)^2.\tag{2.21}$$

式(2.21)表明，许多火花点构成一个球面．球半径为$v_0t$，在匀速膨胀；球心坐标为$(0,0,\frac{1}{2}gt^2)$，在以加速度$g$竖直下落．这正是节日晚上所看到的形象(图2.4)．

图2.4

**例2.3** 一质点沿圆锥曲线$y^2-2ax-bx^2=0$运动，速率为$c$，试求质点位于任一点$(x,y)$

时的两个分速度$v_x$和$v_y$。已知$a$,$b$和$c$均为常量。

**分析** 解决这类问题的关键是由坐标分量之间的关系求出速度分量之间的关系。题目给出了两个条件：

$$y^2-2ax-bx^2=0, \tag{2.22}$$

$$v_x{}^2+v_y{}^2=c^2. \tag{2.23}$$

如果能由关系式(2.22)再找出一个$v_x$和$v_y$的关系式，问题便可解决。

将式(2.22)对$t$求导，得到

$$yv_y=(a+bx)v_x. \tag{2.24}$$

将(2.24)代入(2.23)，立刻得到答案：

$$v_x=\frac{cy}{\sqrt{y^2+(a+bx)^2}},$$

$$v_y=\frac{c(a+bx)}{\sqrt{y^2+(a+bx)^2}}.$$

**例2.4** 椭圆规的规尺$AB$，一端$A$沿直线槽$OY$滑动，另一端$B$沿$OX$滑动(如图2.5所示)。设$B$作匀速运动，速率为$v_0$，求$AB$上任一点$M$的速度和加速度的大小。已知$AM=a$，$MB=b$。

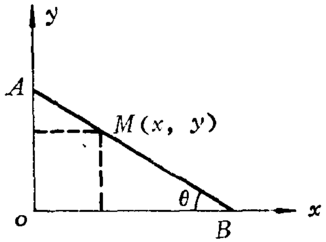

图2.5

**分析** 问题中没给出运动方程$x=x(t)$，$y=y(t)$的具体形式，却要求速度和加速度，这就必须首先分析规尺$AB$的运动过程，找到$x=x(t)$和$y=y(t)$的具体形式。

不难看出，$x$，$y$和$t$之间可以通过角$\theta$联系起来：

$$x=a\cos\theta, \qquad y=b\sin\theta, \tag{2.25}$$

$$\frac{d}{dt}[(a+b)\cos\theta]=v_0. \tag{2.26}$$