高等学校教材

水文地质计算

河海大学 钱孝星 主编

高等学校教材

水文地质计算

河海大学 钱孝星 主编

水利电力出版社

(京)新登字115号

内 容 提 要

本书论述地下水运动的数值计算方法。全书共分五章。内容包括：线性代数方程组的解法，有限差分法，有限单元法，边界单元法和有限分析法等。书中还附有简单的计算程序，以利于实际应用。和以往的同类教材相比，本书增加了边界单元法和有限分析法，内容较新。

本书是水利高等院校"工程地质和水文地质"专业高年级学生的选修课教材，也可作为其他院校的同类专业的教材以及地下水科研人员及工程技术人员的参考书。

高 等 学 校 教 材

水 文 地 质 计 算

河海大学 钱孝星 主编

*

水利电力出版社出版

（北京三里河路6号）

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

北京市朝阳区小红门印刷厂印刷

*

787×1092毫米 16开本 9.5印张 214千字

1995年4月第一版 1995年4月北京第一次印刷

印数 0001—1170册

ISBN 7-120-02072-2/TV·783

定价5.50元

前　　言

《水文地质计算》是高等水利院校“工程地质及水文地质”专业的选修课教材，也可作为其他院校的水文地质及工程地质专业的选修课教材。它是《地下水动力学》的后续课程。学生在学习了地下水动力学以后，初步掌握了地下水运动的基本理论，相应地下水数学模型的建立，稳定流和非稳定流的解析解的原理和方法。而学习本课程的目的在于进一步掌握地下水计算的原理和方法，能够对于实际的水文地质问题进行计算和评价，培养和提高学生解决实际计算问题的能力。本书有如下特色。

(1)为了避免和《地下水动力学》教材重复，本书不涉及解析解，仅仅介绍数值方法。

(2)力求反映地下水计算的新成果。除了论述比较成熟而且最为常用的有限差分法和有限单元法外，对于近年发展起来并且开始应用到地下水计算中的方法，如边界单元法和有限分析法，书中也作了介绍。

(3)尽量符合教学规律，循序渐进。考虑到学生可能没有系统地学过《计算方法》，故对数值计算时用到的线性代数方程组的解法，先作介绍。

(4)考虑实际应用。书中附有若干个计算程序，可作为实际计算时的参考。

全书共分五章。第一章为矩阵运算及线性代数方程组的常用解法简介，第二章为有限差分法及其在水文地质计算中的应用，第三章为有限单元法及其在水文地质计算中的应用，第四章为边界单元法及其在水文地质计算中的应用，第五章，有限分析法及其在水文地质计算中的应用。

本教材由河海大学钱孝星，周志方二人编著。钱孝星担任主编并且执笔绪论及第一、二、三章，周志方编写第四、五章。最后由钱孝星统一修改，定稿，并编制符号，量纲表。图件由徐富林等人请绘。

全书由萧楠森教授主审。作者在编写本书时，曾引用了专著《地下水运移模型》和《地下水资源评价》的部分成果。在此一并深表谢意。因为本书的涉及面广，不足之处实所难免，敬请读者予以指正。

作　者

1993年7月10日

符号及量纲索引

符　号	代　表　意　义	量　纲
a	① 方程组或矩阵的系数	
	② 空间步长	[L]
	③ 混合边界条件中的系数	
	④ 矩形横向边长之半	
	⑤ 积分下限	
	⑥ 压力传导系数	$[LT^{-1}]$
a_i,a_j,a_m	有限单元法的几何形状参数	
a_{ij}	矩阵元素	
A	面积	$[L^2]$
A_{ij}	边界单元法水头 H 的系数	
b	① 方程组或矩阵的系数	
	② 承压含水层的厚度	[L]
	③ 矩形纵向边长之半	[L]
	④ 积分上限	
b_i,b_j,b_m	有限单元法的几何形状参数	
b_{ij}	强隐式法的系数	
B	① 越流因素	[L]
	② 边界单元法中未知量的系数矩阵	
c	① 方程组或矩阵的系数	
	② 混合边界条件中的系数	
c_i	有限分析法的系数	
c_i,c_j,c_m	有限单元法的几何形状参数	
C_i	① 系数	
	② 边界单元法左端 H_i 的系数	
d_{ij}	强隐式法的系数	
D_i	以 i 为公共顶点的三角形组成的拼块	
e	单元	
e_{ij}	强隐式法的系数	
E	① 泛函	
	② 评价函数	
E^e	单元泛函	
f	方程组或矩阵的右端项	
f_{ij}	强隐式法的系数	
F	右端项的列向量	
G	总渗透矩阵	

续表

符　号	代　表　意　义	量　纲
G_{ij}	边界单元法水头一阶导数的系数	
h	潜水含水层的厚度	[L]
h_0	潜水含水层的初始厚度	[L]
h_{ij}	强隐式法的系数	
H	水头	[L]
H_0	初始水头	[L]
H_b	边界上的已知水头	[L]
H_s	稳定态时的水头	[L]
H_i,H_j,H_m	三角形单元结点 i,j,m 上的水头	[L]
H_{ij}	有限差分法或有限分析法(i,j)结点上的水头	[L]
H_{ij}^k	结点(i,j)在 k 时刻的水头	[L]
H_{ij}^{k+1}	结点(i,j)在 $k+1$ 时刻的水头	[L]
$\hat{H}$	水头 H 的近似值	[L]
$\bar{H}$	水头 H 的拉普拉斯变换	
H^*	水头的权函数	
i	①　有限差分法或有限分析法的行号	
	②　有限单元法的结点号	
j	①　有限差分法或有限分析法的列号	
	②　有限单元法的结点号	
J	雅可比行列式	
k	①　时段号	
	②　代表某一水文地质参数	
K	渗透系数	$[LT^{-1}]$
K_x	x 轴方向的主渗透系数	$[LT^{-1}]$
K_y	y 轴方向的主渗透系数	$[LT^{-1}]$
K_v	第二类 v 阶修正的贝塞尔函数	
L	①　长度	[L]
	②　矩阵三角分解时的矩阵元素	
	③　拉普拉斯变换符号	
	④　边界结点	
L_1,L_2	边界结点 L 两侧的单元的边长	[L]
m	①　迭代次数	
	②　有限单元法的结点号	
M	边界元法的动点	
$M(i)$	对角线元素的编号	

续表

符　号	代　表　意　义	量　纲
MR	总带宽	
n	①　边界的外法线方向	
	②　空间的维数	
$nn(i)$	i 行的带宽	
N	垂向入渗补给量	$[LT^{-1}]$
N_i, N_j, N_m	有限单元法的基函数	
O	无穷小量	
p	中心点	
p_{ij}	有限差分法和有限分析法 i 行 j 列的点	
P	n 维空间中的点	
P_m	m 阶的多项式	
q	边界上水头的一阶导数值	无量纲
q_b	边界上的单宽流量	$[L^2T^{-1}]$
q^*	H^* 的一阶导数	
$\bar{q}$	q 的拉普拉斯变换	
q_{ij}	强隐式法的系数	
Q	①　水井开采量	$[L^3T^{-1}]$
	②　流入坑道的流量	$[L^3T^{-1}]$
Q_j	j 号井的开采量	$[L^3T^{-1}]$
Q_e	通过单元 e 的流量	$[L^3T^{-1}]$
r	①　边界单元法动点和固定点的距离	$[L]$
	②　半径	$[L]$
R	垂直方向的水交换量	$[LT^{-1}]$
s	边界曲线或边界曲面	
S	贮水系数	无量纲
S_s	贮水率	$[L^{-1}]$
t	时间	$[T]$
Δt	时间步长	$[T]$
T	导水系数	$[L^2T^{-1}]$
u	①　某一函数	
	②　边界元法的任意的连续二次可微函数	
U	上三角矩阵	
v	①　渗透速度	$[LT^{-1}]$
	②　边界元法的任意的连续二次可微函数	
V	体积	$[L^3]$

续表

符　号	代　表　意　义	量　纲
w_i	高斯求积公式中的权系数	
w_k	权值	
w_{ij}	权因子	
x	横向坐标	
Δx	x 方向的步长	[L]
y	纵向坐标	
Δy	y 方向的步长	[L]
α	① 求解三对角方程组的矩阵元素	
	② 权重	
	③ 时间权因子	
	④ 夹角	
	⑤ 空间平面方程的系数	
$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$	线性插值的系数	
α_i	① 线性插值的系数	
	② 参数下限	
	③ 边界单元的夹角	
α_{ij}	强隐式法矩阵分解后的矩阵元素	
β	① 求解三对角方程组的矩阵元素	
	② 空间平面方程的系数	
β_i	参数上限	
β_{ij}	强隐式矩阵分解后的矩阵元素	
γ	空间平面方程的系数	
γ_{ij}	强隐式法矩阵分解后的矩阵元素	
Γ	区域 Ω 的边界	
Γ_1	第一类边界	
Γ_2	第二类边界	
δ	狄拉克(Delta)函数	
δ_{ij}	强隐式法矩阵分解后的矩阵元素	
$\bigtriangledown$	拉普拉斯算子	
Δ^i	Delta 函数	
ε	① 圆的半径	[L]
	② 给定的误差	
η	纵向的局部坐标	
η_{ij}	强隐式法矩阵分解后的矩阵元素	
θ	夹角	

续表

符　号	代　表　意　义	量　纲
λ	①　拉普拉斯变换参数	
	②　迭代参数	
μ	给水度	无量纲
ξ	①　横向局部坐标	
	②　增量	
	③　边界点	
ξ_i	高斯求积公式中的高斯点	
Φ_1,Φ_2	插值函数	
ω	①　加速参数	
	②　松弛因子	
	③　边界元的基本解	
Ω	计算区域	
Ω_i	迦辽金法的权函数	

目　　录

绪　论

随着科学技术水平的不断提高，水文地质计算方法也不断发展。目前水文地质计算方法大致有：解析解法，物理模拟法，数值解法，系统分析方法，概率统计方法等等。

一、解析解法

60年代以前，解含水层地下水的水头和流量问题，多偏重于解析解法。如"地下水动力学"课程中所述，无论是以稳定流为基础的裘布衣公式，还是以非稳定流为基础的泰斯公式，它们的推导都有许多假设，在水文地质条件满足这些假设时，当然没有问题。但要解决大范围的地下水系统计算时，由于水文地质条件的复杂性，解析解法就无能为力了。

在求解水库或坝基渗漏量及计算地下水位时，过去常用的解析法公式有巴甫洛夫斯基、卡明斯基或其他人的计算公式，这些公式都是根据冲积层情况得出的，而裂隙岩体和岩溶岩体的情况则要复杂得多。因为裂隙和岩溶岩体的分布受地层和构造条件控制，边界形状很复杂，漏水岩体的分布和形状都很不规则，即使是同一岩体，由于构造条件的差异，裂隙和岩溶发育程度相差很大，因而渗透性也有很大的不同。所以非均质性比第四系冲积层明显得多，这些都增加了应用现有解析解的困难。因此，目前它多应用于简单条件下的水文地质计算以及确定水文地质试验参数。有时为了验证数值解的正确性，也需要用解析解进行对比计算。

二、物理模拟法

物理模拟有电模拟、水力模拟、粘滞流模拟、薄膜模拟等等，以电模拟应用较多。早在本世纪的20年代，苏联的巴甫洛夫斯基提出了电解液模拟（ЭГДА），它成为当时研究水工建筑物地区渗漏问题的重要手段。以后又发展到电阻网模拟，在50年代和60年代，R－C网络和R－R网络模拟也得到发展。60年代中期又出现了与计算机结合在一起的混合机。

模拟时边界形状可以根据实际情况来制作，因而可以处理复杂的边界形状以及非均质问题。电解液和R网络模拟只能解决稳定流问题，对于非稳定流问题，尤其是大系统的地下水资源评价问题，可用R－C网络和R－R网络进行计算。

电网络模拟，原理上和数值模拟相似，但制作的成本较高，操作也不如电子计算机方便，80年代以来有逐步被数值模拟代替的趋势。

三、数值解法

60年代后期随着电子计算机的发展，人们把数值模拟应用到水文地质计算中来。由于电模拟制作和参数调试都比数值法麻烦，所以目前应用更多的是数值解法。

目前在水文地质计算中应用的数值方法可大致归纳为5类。①有限差分法（简称有限差法）；②有限单元法（简称有限元法）；③边界单元法（简称边界元法）；④特征线法；⑤有限分析法。

有限差分法从60年代初就开始应用于水文地质计算。最初多用正规网格和松弛解法，1968年引入交替方向隐式差分法，以后又引入强隐式法，1973年被推广到变格距情况，兰马

特(Lemard)于1979年提出了上游加权有限差分法。

有限单元法从1968年开始应用于水文地质计算,1972年引入等参数有限单元法,1977年休延康(Huyakorn)和尼尔康卡(Nilkuka)等提出了上风有限单元法。

目前,有限差分法和有限单元法是水文地质计算中最常用的数值计算方法。

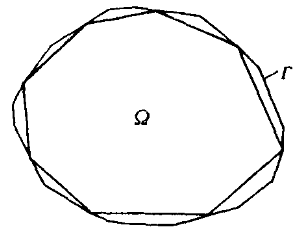

图1 边界单元剖分图

Ω—计算区域;Γ—计算区域的边界

边界单元法是70年代中期发展起来的一种新的数值方法,该方法不需要对整个计算区域进行网格剖分,而只要剖分区域边界(见图1)。在求出边界上的物理量以后,计算区域内部任一点的未知量可通过边界上的已知量求出。因此,所需准备的输入数据比有限差分法和有限单元法少,不易出错。

在水文地质计算中,常常会遇到无限边界的情况,该情况下若用有限差分或有限单元法计算,都需要人为地划出一条不受开采(或补给)影响的边界,但划出的这条边界常与实际情况有所差异,而且在地下水资源评价时要计算流量,有限单元法难以直接算出流量边界上的 $\partial H/\partial n$ 值,所算出的流量只是一个近似值,和实际值有一定的出入。边界单元法处理这些问题则比较容易,因而求得的流量也比较准确。

边界单元法对于求解均质区域的稳定流问题(拉普拉斯方程,泊松方程)比较快速,有效。但当非均质区很多时,尤其是非均质区域的非稳定流问题,计算会变得相当复杂,优越性就不明显了。

特征线法用来解双曲型偏微分方程比较有效。将特征线法和有限单元法相结合的特征有限元法以及和有限差分法相结合的特征有限差法是目前求解水质模型的一种有效方法,尤其是用来求解对流占优势的污染物运移问题极为方便。

所有上述的数值计算方法,都首先是把渗流区(解区域)进行离散化,然后认为每一单元内含水层是均质的,具有同一参数。同时,把原来的偏微分方程化为结点方程(组),这一方程组一般是线性的。求解这个线性方程组,即可得到每一结点的水头近似值,进而可算出流量或其他项目。

有限分析法是80年代发展起来的一种新的数值计算方法。它也是一种区域离散方法,它是通过某种解析途径进行离散化,得到一组方程,然后求得每一结点的水头近似值和进一步算出流量。

四、其它方法

系统分析方法,是结合数学模型及计算机技术来进行分析的一种方法,在地下水资源管理中得到迅速发展。目前,许多国家,正在用此方法实行大规模和大范围的河水调用,以达到地下水和河水资源互相调剂,统一运行。系统方法可以根据所在地区的气象、地质、地貌等自然地理条件与系统的关系以及经济、政治等社会环境条件,根据需要与可能,为该系统确定一个最优目标。

目前,随机模型也在地下水资源管理中广泛应用。如时间序列分析,也开始应用于地下水计算中。随着计算机科学的发展,将使更多更新的方法应用于实际生产中去。

第一章　矩阵运算及线性代数方程组的常用解法简介

第一节　与数值法有关的矩阵运算

一、矩阵定义

如绪论所述，本书重点介绍数值法中的有限差分法和有限单元法，这两种方法的最终结果都可以化为线性代数方程组的求解。

可以把任何一组线性代数方程组用矩阵的形式表示出来。设方程组为

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{aligned}\right\} \tag{1-1}$$

其左端的系数排列成一个数组，即

$$\left.\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix}\right\} \tag{1-2}$$

而 x,y 和 z 则可以当作一个三维向量的分量。为了便于研究像式(1-2)这样的数组，以及这种数组和向量之间的运算，我们把数组式(1-2)的整体当作一个抽象的量，用方括号把它括起来，记作

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \tag{1-3}$$

我们称式(1-3)为一个三阶方阵。如果是含有 n 个未知量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的线性方程组

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1m}x_m=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2m}x_m=b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nm}x_m=b_n \end{aligned}\right\}$$

左端的系数矩阵为

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \tag{1-4}$$

它是由 n 行 m 列组成的系数矩阵，记为$(a_{ij})_{nm}$。在上面的矩阵中，横排称行，纵排称列；而 a_{ij} 则表示矩阵中的 i 行 j 列的元素。我们称式(1-4)式为 $m\times n$ 阶矩阵。

(一)对称矩阵

若矩阵的对角线两侧的元素是对称的方阵称为对称矩阵。在对称矩阵中，$a_{ij}=a_{ji}$。例如

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

对称矩阵行和列互换则矩阵不变。

(二)对角矩阵

一个方阵,对角线上元素为非零元素,其余的元素都为零,即当 $i \neq j$ 时,$a_{ij}=0$,则为对角矩阵。

例如三阶对角线矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \tag{1-5}$$

(三)么矩阵(单位矩阵)

一个方阵,若对角线上的元素等于 1,其它元素均为零,即 $i \neq j$ 时,$a_{ij}=0$,$i=j$ 时,$a_{ij}=1$,则此矩阵为么矩阵(单位矩阵),如式(1-6)。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1-6}$$

(四)上三角矩阵

对角线以下元素均为零的方阵为上三角矩阵。

例如,上三角阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \tag{1-7}$$

(五)下三角矩阵

对角线以上元素均为零的方阵为下三角矩阵。

例如,下三角阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{1-8}$$

(六)转置矩阵

把矩阵$[A]$的行和列进行交换,即将 a_{ij}和 a_{ji}位置互换便得转置矩阵$[A]^T$。

例如

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{1-9}$$

$$[A]^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{1-10}$$

二、矩阵运算

矩阵不是一个数，而是按照一定的方式排列的一组数的集合。矩阵的运算不同于通常数的运算，具有特殊性质。

（一）矩阵的加减法

若两个矩阵的行、列数相同，则它们可以相加或相减。

设有二个同为 $m\times n$ 阶的矩阵〔A〕和〔B〕，把它每一个对应的元素进行加减，得到一个新的 $m\times n$ 阶矩阵，称为矩阵的加减。若〔c〕=〔A〕±〔B〕，则 $c_{ij}=a_{ij}\pm b_{ij}$。即下式

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (a_{11}+b_{11}) & (a_{12}+b_{12}) & (a_{13}+b_{13}) \\ (a_{21}+b_{21}) & (a_{22}+b_{22}) & (a_{23}+b_{23}) \end{bmatrix} \tag{1-11}$$

例如

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+4 & 2+8 \\ 4+2 & 3+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

（二）矩阵的数乘

矩阵与数相乘，就是将一个数 k 遍乘矩阵〔A〕中每一元素，记作 k〔A〕=〔c〕。

例如

$$5\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\times 1 & 5\times 3 \\ 5\times 2 & 5\times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 15 \\ 10 & 20 \end{bmatrix}$$

（三）矩阵的乘法

若矩阵〔A〕的列数等于矩阵〔B〕的行数，则它们可以相乘。设〔A〕有 n 行 m 列，〔B〕有 m 行 k 列，则〔A〕、〔B〕相乘可得

$$[A]_{n\times m}[B]_{m\times k} = [c]_{n\times k}$$

即

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}_{2\times 3} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} \end{bmatrix}_{2\times 2} \tag{1-12}$$

例如

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2} \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

$$= \begin{bmatrix} (1\times 5)+(2\times 8) & (1\times 6)+(2\times 9) & (1\times 7)+(2\times 0) \\ (3\times 5)+(4\times 8) & (3\times 6)+(4\times 9) & (3\times 7)+(4\times 0) \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

$$= \begin{bmatrix} 21 & 24 & 7 \\ 47 & 54 & 21 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

矩阵的乘法不满足交换律，即 $[A][B]\neq[B][A]$。

(四)矩阵的行列式

对于一个 2 阶方阵 $[A]=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$，其行列式为

$$\det[A]=|A|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{1-13}$$

对于一个 3 阶方阵

$$[A]=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}，其行列式为$$

$$\begin{aligned}\det[A]=&\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\\ =&a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}\end{aligned}$$

也可用 2 阶行列式确定

$$\begin{aligned}\det[A]=&\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\\ =&a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}\end{aligned}$$

上式右边的 3 个 2 阶行列式称为 3 阶行列式的子行列式，也分别称为 a_{11}，a_{12}，a_{13}的余子式(Cofactor)。

(五)伴随矩阵

矩阵$[A]$的余子矩阵的转置，叫做 A 的伴随(Adjoint)矩阵。

$$\mathrm{adj}[A]=[\mathrm{cof}A]^{T} \tag{1-14}$$

$$\mathrm{cof}[A]=\mathrm{cof}(a_{ij})=(-1)^{i+j}(\mathrm{minor}\,a_{ij}) \tag{1-15}$$

其中 minor 即从原矩阵中划去 i 行和 j 列后的子矩阵的行列式。以 3×3 的矩阵$[A]$为例，$[A]$的余子矩阵为

$$\mathrm{cof}[A]=\mathrm{cof}(a_{ij})=\begin{bmatrix}\mathrm{cof}(a_{11}) & \mathrm{cof}(a_{12}) & \mathrm{cof}(a_{13})\\ \mathrm{cof}(a_{21}) & \mathrm{cof}(a_{22}) & \mathrm{cof}(a_{23})\\ \mathrm{cof}(a_{31}) & \mathrm{cof}(a_{32}) & \mathrm{cof}(a_{33})\end{bmatrix}$$

由余子式的定义

$$\mathrm{cof}[A]=\begin{bmatrix}(a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23}) & -(a_{21}a_{33}-a_{31}a_{23}) & (a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22})\\ -(a_{12}a_{33}-a_{32}a_{13}) & (a_{11}a_{33}-a_{31}a_{13}) & -(a_{11}a_{32}-a_{31}a_{12})\\ (a_{12}a_{23}-a_{22}a_{13}) & -(a_{11}a_{23}-a_{21}a_{13}) & (a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})\end{bmatrix}$$

因 adj〔A〕=〔cof$A$〕^{T}

所以

$$\mathrm{adj}[A]=\begin{bmatrix} (a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23}) & -(a_{12}a_{33}-a_{32}a_{13}) & (a_{12}a_{23}-a_{22}a_{13}) \\ -(a_{21}a_{33}-a_{31}a_{23}) & (a_{11}a_{33}-a_{31}a_{13}) & -(a_{11}a_{23}-a_{21}a_{13}) \\ (a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22}) & -(a_{11}a_{32}-a_{31}a_{12}) & (a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}) \end{bmatrix}$$

（六）逆矩阵

设〔A〕为 n 阶方阵，并满足

$$[A][C]=[I]$$

则称矩阵〔C〕是矩阵〔A〕的逆矩阵。式中〔I〕为单位阵。记作

$$[C]=[A]^{-1}$$

于是

$$[A][A]^{-1}=[I]$$

对于线性代数方程组

$$[A]\{X\}=\{C\}$$

当 $n=m$ 时，未知的列矩阵为

$$\{X\}=[A]^{-1}\{C\} \tag{1-16}$$

由(1-16)式可知，可利用逆矩阵解线性代数方程组。

若〔A〕的行列式

$$\det[A]\neq 0$$

说明〔A〕是可逆的。设 A_{ij}是 A 中元素 a_{ij}的代数余子式，则〔A〕的逆矩阵为

$$[A]^{-1}=\frac{\mathrm{adj}[A]}{|A|} \tag{1-17}$$

且称〔A〕为非奇异方阵。如果行列式 $|A|=0$，方阵〔A〕没有逆阵，称为奇异方阵。

例如有一个二阶方阵

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

其行列式为

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

余子式为

$$A_{11}=a_{22}$$
$$A_{12}=-a_{21}$$
$$A_{21}=-a_{12}$$
$$A_{22}=a_{11}$$

其逆矩阵为

$$[A]^{-1}=\frac{1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$