图论与网络流

GRAPHTHEORY AND NETWORKS FLOW

蒋长浩　编

中国林业出版社

图论与网络流

蒋长浩　编

中国林业出版社

图书在版编目（CIP）数据

图论与网络流/蒋长浩编. —北京：中国林业出版社，2001.7
ISBN 7-5038-2822-6

Ⅰ.图… Ⅱ.蒋… Ⅲ.①图论②网络流 Ⅳ.0157.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2001）第 038399 号

出版：中国林业出版社（100009 北京西城区刘海胡同 7 号）
E-mail：cfphz@public.bta.net.cn 电话：66184477
发行：新华书店北京发行所
印刷：北京地质印刷厂
版次：2001 年 7 月第 1 版
印次：2001 年 7 月第 1 次
开本：787mm×960mm 1/16
印张：14.5
字数：268 千字
印数：1～5000 册
定价：22.80 元

前 言

图论是组合数学的一个主要组成部分，近几十年里，它已经发展成为数学的一个重要分支。由于图论的本身魅力和其在信息社会中一些学科领域诸如计算机、运筹学、系统工程以及物理学、电子学、生物学、化学等方面的广泛应用，因此，越来越受科学界尤其是数学界的重视和关注。

本书作为图论教材，主要强调的还是图的基础理论，内容主要包括图的基本概念，图的连通性，树，Euler 图和 Hamilton 图，图的嵌入，独立集、覆盖和支配集，图的染色，极图理论和 Ramsey 理论，有向图，最后简单地介绍了网络流理论。

本书选择的内容还是比较丰富的，但作为每周 3～4 课时的一学期教程也是很容易设计的，只要挑选一些重要的和学生们所喜爱的内容，例如：某些冗长乏味的定理证明可以省略，又如第二章图的连通性对于 n-连通，n-边连通，Menger 定理可用 1～2 个课时作一些一般介绍，对某些应用和算法也可以根据不同专业少讲或不讲。

近十年来，我曾多次讲授数学系的图论课，也参阅了不少国内外的优秀教材，书中写进了自己的一些研究成果和教学体会，包括教材内容的编排顺序。但由于水平有限，经验不足，相信一定也有不少错误，恳请读者批评指正。

在本书即将出版的时候，我要非常感谢一直关注着这本书的华东师范大学的洪渊教授和束金龙副教授，以及湖州师院方坤夫副教授。洪渊老师审阅了初稿并提出了修改意见。我尤其要感谢张建勋教授，他来宁波大学工作也使得这本书得以早日定稿，他同骆建宁副教授、臧运华副教授一起对初稿进行了认真的校对并就有关内容同编者一起进行了仔细的讨论。

这本书从初稿到定稿的全部打印都是由周彩莲老师完成的，我对她的辛勤工作怀着深深的感激之情。我还要感谢浙江省师范院校的系主任们，是他们的关心促使我下决心来完成这项工作。

编 者

2000 年 12 月

目　录

1 图

在现实世界的许多场合中，经常会遇到在有限个元素之间是否存在某种联系或它们有怎样的联系。如果这有限个元素有联系且联系是对称的，我们就能用图来模拟这种情况，所以图实际上是经常碰到的。现在就从这个概念出发，来开始我们的研究。

1.1 图的概念

在给图下确切定义以前，我们先举几个例子。

假设某航空公司要为国内几个重要城市提供服务。该航空公司有一张航空线路图，如果两个城市之间有该航空公司的直达航班，那么航空线路图中应该有一条线来连接这两个城市。现在我们取消具体城市的名称，这个模型就是我们要研究的图，代表城市的小圈就是我们所说的图的顶点，而连接两个城市的航线就是我们所说的图的边。我们乘坐该航空公司的航班能否从一个城市到达另一个城市，这就是图论中所谓图的连通问题。如果我们再在图的边上标上一个正实数来表示两个相应城市之间机票的票价，这样的图就被称为赋权图。我们要从一个城市乘该航空公司的班机到另外一个城市，怎样乘坐飞机使所花的票价最小?实际上这就是图论中求最短路的问题。

作为第二个例子，假设一个公司要扩充业务，需要招聘几个新的职员，这几个职员分别是绘图员，工程师，计算机程序设计员，数据分析员和助理私人秘书各一名。有七个人前来应聘，这些人中每一个人都能胜任一个以上的职务。这种情况能够用图 1.1 所示的图来表示。图中下面的五个点(DRA，ENG，PRO，ANL 和 PER) 用来表示职务，而上面七个点(1，2，…，7) 用来表示应聘的人。如果一个人有能力胜任某个职务，那么在对应的两点之间就画上一条线。值得公司感兴趣的问题为：是否能从这七个人中挑选出五个人来，分别承担这五项工作?用图论的术语，就是我们要问职位集能否“匹配”到应聘的人集。

作为最后一个例子，我们假设有八种供实验用的化学药品(A，B，…，H)

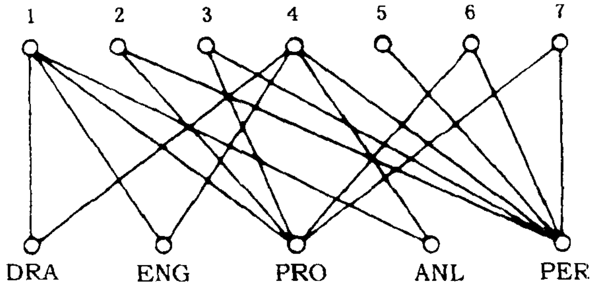


图 1.1　岗位应聘图

需要存放在一个大仓库里，而这些化学药品中某些药品彼此要引起化学反应，当然我们不能把它们存放在同一间房子里。我们用图 1.2 所示的图来模拟这种情况，用一个点来表示一种化学药品，如果两个点之间有线相连，那么就表示相应的化学药品不能被存放在同一个房间里。我们要问为了安全存放八种化学药品需要的最少存放房间是多少？这类问题在图论中尤其感兴趣。到目前为止，解决这类问题的唯一已知算法是很无效的，而且许多数学家也相信对这类问题没有有效的解决方法。

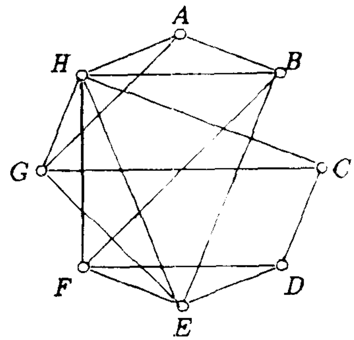


图 1.2　化学药品反应图

我们还能举出很多类似的例子，不过在上面的三个例子中已经不难抽象出图的概念。图 $G=(V(G),E(G))$ 是由元素被称为顶点的一个有限非空集连同被称为边的不同顶点有限无序对集（可能是空集）组成。$V(G)$ 称为 G 的顶点集，而 $E(G)$ 称为 G 的边集。

$e=(u,v)$ 称为连接顶点 u 和 v 的边。如果 $e=(u,v)$ 是图的一条边，那么顶点 u 和 v 被称为是邻接的，v 和 e 称为是相关联的，u 和 e 也是相关联的，且 u 和 v 分别称为 e 的端点。如果 e_1 和 e_2 是 G 中具有一个公共端点的二条不同边，那么 e_1 和 e_2 被称为邻接边。为了方便起见我们通常用 uv 或 vu 来表示边而不用 (u,v)。

一个图 G 的顶点集的顶点个数称为 G 的阶，用 $p(G)$ 或简单地用 p 来表示，而它的边集的基数通常称为 G 的大小，用 $q(G)$ 或 q 表示。一个 (p,q) 图就是阶为 p 和大小为 q 的图。

通常用图形来定义或描述一个图，在所画的图形中一个点（通常画一个小圈）来表示图的一个顶点，而边 $e=uv$ 用一条线段或者曲线来连接相应于 u 和

v 的点。

具有顶点集 $V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_p\}$ 和边集 $E(G)=\{e_1,e_2,\cdots,e_q\}$ 的图 G 也能用矩阵的方法来表示。图 G 的邻接矩阵 $A(G)=[a_{ij}]_{p\times p}$ 定义为

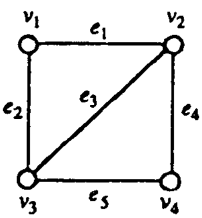
$$a_{ij}=\begin{cases}1 & v_iv_j\in E(G)\\ 0 & v_iv_j\notin E(G)\end{cases}$$

这样，一个图 G 的邻接矩阵是一个对称(0,1) 矩阵且主对角线上元素是零。图 G 的关联矩阵 $B(G)=[b_{ij}]_{p\times q}$ 定义为

$$b_{ij}=\begin{cases}1 & \text{如果顶点 } v_i \text{ 和边 } e_j \text{ 相关联}\\ 0 & \text{否则}\end{cases}$$

例如：由顶点集 $V(G)=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ 和边集 $E(G)=\{v_1v_2,v_1v_3,v_2v_3,v_2v_4,v_3v_4\}$ 所定义的图，用画图的方法，邻接矩阵和关联矩阵方法来表示就如图 1.3 所示。

G:



$$A=\begin{bmatrix}0&1&1&0\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\0&1&1&0\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}1&1&0&0&0\\1&0&1&1&0\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}$$

图 1.3 一个图的邻接矩阵和它的关联矩阵

如果人们用计算机想得到某种信息或者解决一个与图有关的问题。图的邻接矩阵和它的关联矩阵表示法常常是相当方便的。另一方面，图的邻接矩阵和关联矩阵中也包含了大量多余数据，如大量的 0 和重复出现的 1。正是由于邻接矩阵和关联矩阵的这一不能令人满意的特性，在将图输入计算机的时候，我们也可以采取其它的方式。例如：可以采用输入图的所有边和它的阶；也可以采用输入邻接数组(即对于图中每一个给定的顶点，所有与它邻接的顶点的点列) 等等。当然，还存在其它一些输入方式，具体采用什么方式，可根据需要计算机解决的问题和选择的算法来确定。

两个图常常有同样的结构，只是它们的顶点和边标号不同或者画的方式不一样。为了使这种想法更确切，我们引进图同构的概念。设 G_1 和 G_2 为两个图。若 $V(G_1)=V(G_2)$ 且 $E(G_1)=E(G_2)$，则称 G_1 和 G_2 恒等，记为 $G_1=G_2$。若存在一一映射 $\varphi:V(G_1)\to V(G_2)$ 使得 φ 保持邻接性，即 $uv\in E(G_1)$ 当且仅当 $\varphi(u)\varphi(v)\in E(G_2)$，则称为 G_1 和 G_2 是同构的，记为 $G_1\cong G_2$ 而且一一映射 φ 称为 G_1 到 G_2 的同构映射或简称为同构。容易看出“同构”是图上的一个等价关系，这种关系把全部图集分成等价类。两个图是不同构的，如果它们属于不

同的等价类。

在图 1.4 中，每个图 $G_i(i=1,2,3)$ 都是一个 $(6,9)$ 图，而且 G_1 和 G_2 是同构的。

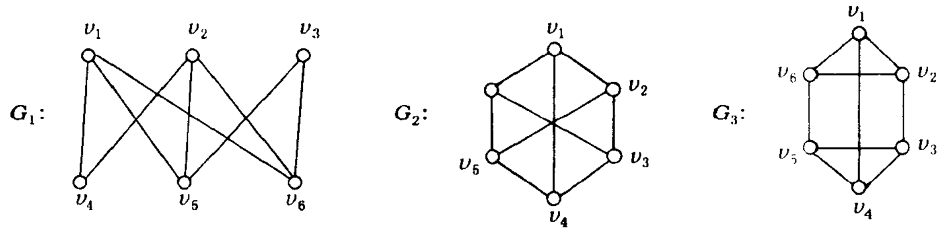


图 1.4　同构和不同构图

例如由：$\varphi(v_1)=v_1,\varphi(v_2)=v_3,\varphi(v_3)=v_5,\varphi(v_4)=v_2,\varphi(v_5)=v_4$ 和 $\varphi(v_6)=v_6$ 定义的映射 $\varphi:V(G_1)\to V(G_2)$ 是一个同构映射。另一方面，$G_1\not\cong G_3$，因为 G_3 包含了三个互相邻接的顶点而 G_1 没有三个互相邻接的顶点，当然 $G_2\not\cong G_3$。

如果 G 是一个 (p,q) 图，那么 $p\geq 1$ 且 $0\leq q\leq p(p-1)/2$。如果 (p,q) 图 G 的阶为 1，则称 G 为平凡图，否则称为非平凡图。显然，$(1,0)$ 图是唯一的一个平凡图，且每个非平凡图必有阶 $p\geq 2$。

除了图的阶和大小以外，在对图研究中，人们最经常碰到的数是它的顶点度。图 G 的顶点 v 的度是在 G 中与 v 关联的边数，G 的一个顶点 v 的度用 $\deg_G(v)$ 表示或者简写为 $\deg(v)$。如果用 $N_G(v)$（或者简记为 $N(v)$）表示 G 中所有与 v 相邻接的顶点集，那么 $\deg_G(v)=|N_G(v)|$。设 G 为任意一个图，G 的所有顶点度的最大值称为 G 的最大度，记为 $\Delta(G)$；G 的所有顶点度的最小值称为 G 的最小度，记为 $\delta(G)$。一个顶点被称为奇顶点或偶顶点取决于它的度是奇数还是偶数。图 G 中度为 0 的顶点称为孤立点，而度为 1 的顶点称为悬挂点。在图 1.5 中表示了一个图 G 及它的顶点的度。

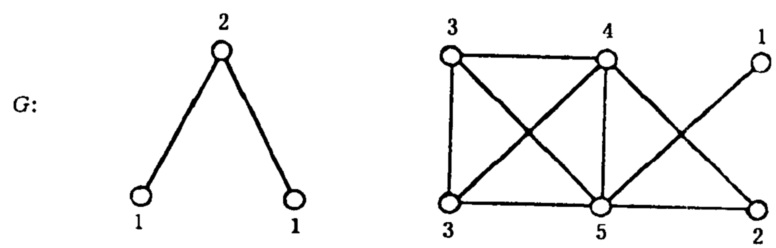


图 1.5　一个图的顶点的度

注意到图 1.5 所示的图 G 的阶 $p=9$，大小 $q=11$，而它的 9 个顶点的度之和为 22，恰好为图 G 边数的 2 倍，即 $2q$。这个事实不仅仅是巧合，事实上每条

边与两个顶点关联，所以当对图G的全部顶点的度求和时，每条边重复计算两次。这是我们要碰到的第一个定理，有时我们确实就把它称为“图论第一定理”。

定理 1.1 设G是一个具有顶点集$V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_p\}$的$(p,q)$图，那么

$$\sum_{i=1}^{p}\deg(v_i)=2q。$$

这个结果有一个称为“握手引理”的有趣的推论。

推论 1.1 任意一个图总有偶数个奇顶点。

证明 设G是任意一个大小为q的图，W是G的奇顶点的集，且U为偶顶点的集。由定理 1.1 可得

$$\sum_{v\in V(G)}\deg(v)=\sum_{v\in W}\deg(v)+\sum_{v\in U}\deg(v)=2q。$$

显然$\sum_{v\in U}\deg(v)$是偶数，所以$\sum_{v\in W}\deg(v)$也是偶数，这意味着$|W|$是偶数。从而证明了这个推论。■

推论 1.1 之所以被称为“握手引理”是因为推论 1.1 可形象地陈述为在一次集会中进行了奇数次握手的人数为偶数。

我们把在一次集会中的人作为图的顶点，两个顶点之间有边相连当且仅当相应于这两个顶点的人在这次集会中握过手，那么与一个顶点关联的边数（即顶点的度）为与这个人握过手的人数。如果这个顶点是奇顶点，则说明这个人与奇数个人握过手，即进行了奇数次握手。由推论 1.1，奇顶点的个数为偶数，故进行了奇数次握手的人数为偶数。

通常在研究一个图时，需要考虑一个包含它的某个更大的图或者一个包含在它中的更小的图。设H和G为两个图。如果$V(H)\subseteq V(G)$且$E(H)\subseteq E(G)$，则称H是G的一个子图，称G是H的一个母图。如果G和H是两个图，且均包含未标号的顶点，那么H也可称为G的子图，如果存在一种所有未标号顶点的标号方式使得：$V(H)\subseteq V(G)$且$E(H)\subseteq E(G)$。如果H是G的子图，那么记为$H\subseteq G$。如果$H\subseteq G$且$H\neq G$，则称H为G的一个真子图，记为$H\subset G$。

图G的最简单的一类子图，可通过删去顶点或边来得到。如果$v\in V(G)$且$|V(G)|\geq 2$，那么从G中删去顶点v以及所有与v关联的边后得到的G的子图记为$G-v$。如果$e\in E(G)$，那么从G中删去边e得到的G的子图记为$G-e$。类似地，可定义从G中删去一个顶点子集或边子集。图 1.6 描述了这些概念。

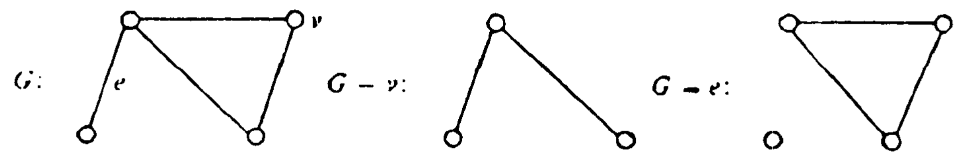


图 1.6 删去图的一个元素

如果 u 和 v 是图 G 的不邻接顶点，那么 $G+f$(其中：$f=uv$) 表示向 G 中添加一条边 f 后得到的图，显然，$G\subset G+f$。

我们看到 $G-e$ 与 G 有同样的顶点集，且 G 与 $G+f$ 也有同样的顶点集。若图 G 的一个子图 H 和 G 有同样的阶，那么 H 被称为 G 的生成子图。

我们将碰到的最重要一类子图是所谓“导出子图”。如果 U 是图 G 顶点集 $V(G)$ 的一个非空子集，那么 G 的以 U 为顶点集，以 G 的所有两个端点都属于 U 的边为边集的子图称为 G 的由 U 导出的子图或者称为 G 的导出子图或者称为由 U 导出的，记为 $\langle U\rangle$。如果 H 是 G 的子图，且存在 $V(G)$ 的非空子集 U 使得 $H=\langle U\rangle$，那么称子图 H 是顶点导出的，记作 $H<G$。类似地，如果 F 是 $E(G)$ 的一个非空子集，那么由 F 导出的子图 $\langle F\rangle$ 满足顶点集是所有与 F 中至少一条边相关联的顶点组成的集且边集是 F。图 G 的一个子图 H 是边导出的，如果存在 $E(G)$ 的一个非空子集 F 使得 $H=\langle F\rangle$。这些定义的一些简单结果是：图 G 的每一个导出子图能够通过从 G 中删去若干个顶点得到，而图 G 的每个子图都能够通过从 G 中删去若干个顶点和若干条边得到。图 1.7 说明了关于图 G 的这些概念。这里 $V(G)=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\}$，$U=\{v_1,v_2,v_5\}$ 且 $F=\{v_1v_4,v_2v_5\}$。

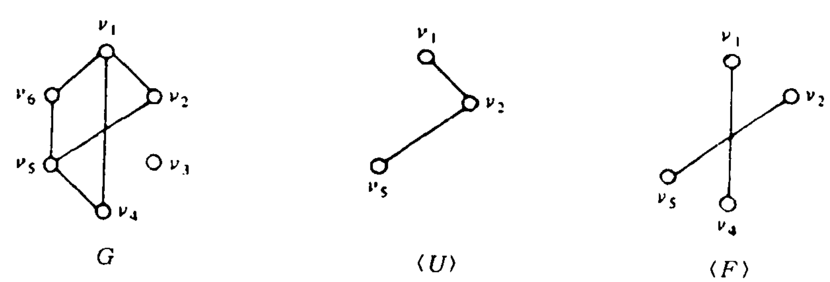


图 1.7 顶点导出子图和边导出子图

有几类图经常出现值得特别指出，且在某些情况下有特殊的记法。在这一节里，我们将给出最常见的几种。

如果一个图的每个顶点 v 都有 $\deg(v)=r$，那么称这个图是 r- 度正则的，也称该图为 r- 正则图。称 3- 正则图为三次图。如果一个图的任意两个顶点都

是邻接的，则该图称为完全图，用 K_p 来表示。因此，一个 (p,q) 图是完全图当且仅当它为 $(p-1)$- 正则图，即 $q=p(p-1)/2$。图 1.8 给出了所有不同构的 4 阶正则图，其中 G_3 是完全图，即 $G_3 \cong K_4$。

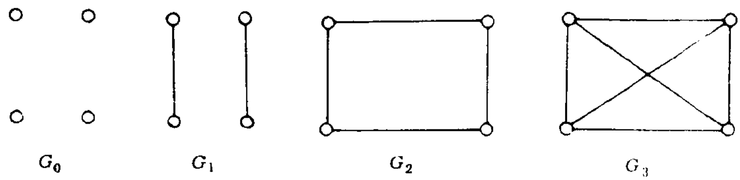


图 1.8 4 阶正则图

如果两个具有相同顶点集 V 的图 G 和 H 满足 $uv \in E(G)$ 当且仅当 $uv \notin E(H)$，则称图 G 和图 H 是互补的，称图 H 为图 G 的补图，记为 $H=\overline{G}$。由补图的定义可知：如果 G 是一个 (p,q) 图，那么 $\overline{G}$ 是一个 $(p,\overline{q})$ 图（其中：$q+\overline{q}=p(p-1)/2$）。在图 1.8 中，G_0 和 G_3 是互补的，G_1 和 G_2 也是互补的。完全图 K_p 的补图 $\overline{K}_p$ 是仅有 p 个顶点而没有边的图，称 $\overline{K}_p$ 为 p 阶空图。如果图 G 的补图 $\overline{G}$ 与 G 是同构的，则称 G 是自补图。

如果图 G 的顶点集 $V(G)$ 能够被分成 $n(n\geq 1)$ 个不交子集 $V_1,V_2,\cdots,V_n$ 的并，且 $E(G)$ 中每一条边的两个端点分别属于不同子集，那么称图 G 为 n- 部图，且称 $V_i(1\leq i\leq n)$ 为 G 的部分集。如果 G 是一个 p 阶 1- 部图，那么 $G\cong\overline{K}_p$，为 p 阶空图。2- 部图也称为二部图。二部图是一个非常重要的图类，将会经常碰到。图 1.9 给出了一个二部图 G_1，而另一个图 G_2 实际上恒等于 G_1，且 G_2 的画法刻划了 G_1 作为二部图的特征。如果 G 是一个具有顶点集的划分 V_1 和 V_2 的正则二部图，那么 $|V_1|=|V_2|$（见练习 6）。

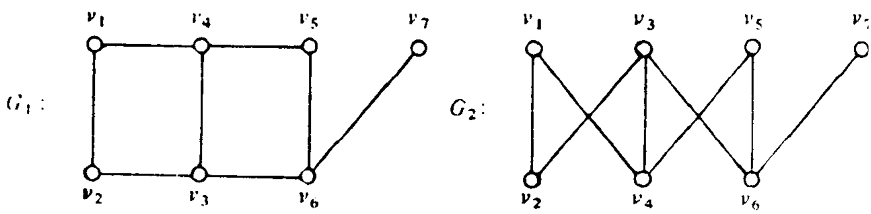


图 1.9 一个二部图

如果一个 n- 部图的 n 个部分集为 $V_1,V_2,\cdots,V_n$，且对于任意 $1\leq i<j\leq n$，及任意 $u\in V_i$ 和任意 $v\in V_j$，都有 $uv\in E(G)$，那么称这个 n- 部图为完全 n- 部图。由完全 n- 部图的定义可得：一个 n- 部图是完全 n- 部图当且仅当除同一个部分集的两个顶点以外，该图中任意两个顶点都是邻接的。如果 $|V_i|=p_i(1\leq i\leq n)$，则完全 n- 部图可记为 $K_{p_1,p_2,\cdots,p_n}$。注意：在图同构的意义下，p_1，

$p_2,\cdots,p_n$ 的排列顺序并不重要。若 $p_i=1(1\leq i\leq n)$，则完全 n- 部图就是完全图 K_n；若 $p_i=t(1\leq i\leq n)$，那么该完全 n- 部图为正则图，记为 $K_n(t)$；具有部分集 V_1 和 V_2 的完全二部图用 $K_{m,n}$ 来表示(其中：$|V_1|=m$，$|V_2|=n$)。图 $K_{1,n}$ 称为星。

为了产生新的图可以有许多种组合图的方式。接下去我们来定义几种图的两元运算。在下列定义中，我们总假设 G_1 和 G_2 是具有不交顶点集的两个图。

两个图 G_1 和 G_2 的并 $G=G_1\cup G_2$ 为满足 $V(G)=V(G_1)\cup V(G_2)$ 且 $E(G)=E(G_1)\cup E(G_2)$ 的图。如果图 G 是图 H 的 n 个不交拷贝的并，那么记 G 为 nH。图 1.10 表示了图 $2K_1\cup 3K_2\cup K_{1,3}$。

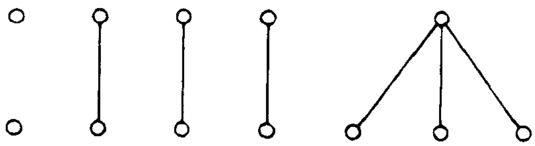


图 1.10　图的并

两个图 G_1 和 G_2 的联 $G=G_1+G_2$ 为满足 $V(G)=V(G_1)\cup V(G_2)$ 且 $E(G)=E(G_1)\cup E(G_2)\cup\{uv|u\in V(G_1),v\in V(G_2)\}$ 的图。根据联运算的定义可得：$K_{m,n}\cong\overline{K}_m+\overline{K}_n$。图 1.11 对此作了说明。

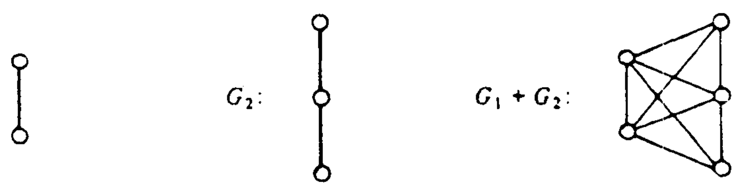


图 1.11　两个图的联

两个图 G_1 和 G_2 的笛卡儿积 $G=G_1\times G_2$ 为满足 $V(G)=V(G_1)\times V(G_2)$，且 G 的两个顶点 (u_1,u_2) 和 (v_1,v_2) 是邻接的当且仅当或者 $u_1=v_1$ 且 $u_2v_2\in E(G_2)$ 或者 $u_2=v_2$ 且 $u_1v_1\in E(G_1)$ 的图。图 1.12 给出了这种运算的例子。

通过笛卡儿积，可归纳地定义一个重要的图类 —n- 方体 $Q_n(n\geq 1)$。当 $n=1$，$Q_n=K_2$；当 $n>1$，$Q_n=Q_{n-1}\times K_2$。n- 方体 Q_n 也可以视为顶点用二元 n- 数组 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$(即对于任意 $1\leq i\leq n$，$a_i=0$ 或 1)进行标号，使得两个顶点是邻接的当且仅当它们对应的 n- 数组恰好在一个位置上不同，即 Q_n 为空间 R^n 中单位方体的棱图。Q_3 称为立方体图。显然 Q_n 是阶为 2^n 的 n- 正则图。图 1.13 给出了 $n=1,2,3$ 的方体 Q_n 及顶点标号。

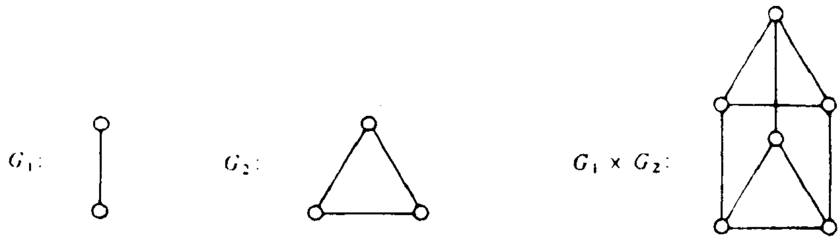


图 1.12 两个图的笛卡儿积

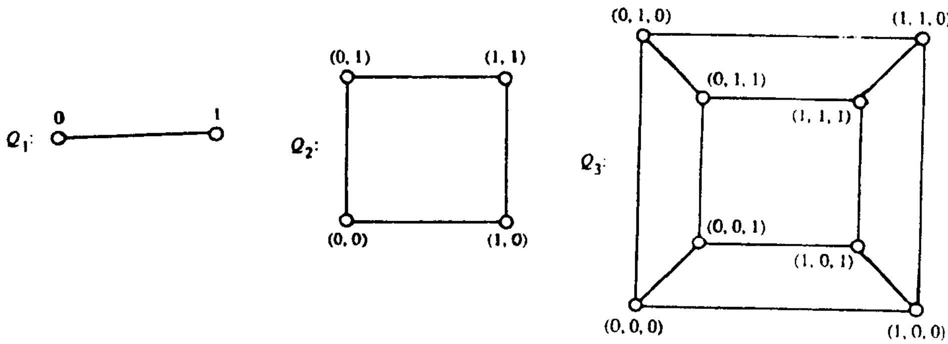


图 1.13 立方图

练习

1. 图 1.4 给出了两个不同构的(6,9)图。给出另外两个不同构的图 H_1 和 H_2 满足 $p(H_1)=p(H_2)$ 和 $q(H_1)=q(H_2)$。

2. 确定全部不同构的 5 阶图。

3. 设 p 是给定的正整数，m 和 n 是非负整数使得 $m+n=p$，且 n 是偶数。证明：存在有 m 个偶顶点和 n 个奇顶点的 p 阶图。

4. 确定图 1.6 所示的图 G 的全部不同构子图；G 有多少个导出子图？G 有多少个边导出子图？

5. 说明：并非每一个图 G 的所有边导出子图可通过删去 G 的若干条边得到。

6. 证明：如果 G 是一个具有部份集 V_1 和 V_2 的正则二部图，那么 $|V_1|=|V_2|$。

7. 设 G 是一个图，且最大度 $\Delta(G)=n$。证明：存在 G 的母图 H 使 $G\prec H$，且 H 是 n- 正则的。

8. 如果 $H\prec G$，能得到 $\overline{H}\prec\overline{G}$ 吗？

9. 证明：存在 p 阶自补图当且仅当 $p\equiv 0(\mathrm{mod}4)$ 或 $p\equiv 1(\mathrm{mod}4)$。

10. 确定全部阶小于等于 5 的自补图。

11. 设 G 是 p 阶自补图，且 $p\equiv 1(\mathrm{mod}4)$。证明：G 至少包含一个度为 $(p-1)/2$ 的顶点。

12. p 阶图 G_1 的特征值是它的邻接矩阵的特征值（即，如果 G 的邻接矩阵为 A，那么 G 的特征值是 p 个（不必不同）满足行列式方程 $\det(\lambda I_p - A) = 0$ 的数。其中 I_p 是 $p\times p$ 单位矩阵）。确定：(a)K_3，(b)$K_{1,2}$ 和 (c)$K_{1,3}$ 的特征值。

1.2 路和圈

设 u 和 v（不必不同）是图 G 的顶点，图 G 的一条 u—v 途径是有限的顶点和边交替序列 $u_0e_1u_1e_2\cdots u_{n-1}e_nu_n(u = u_0, v = u_n)$，满足对于任意的 $i(1\le i\le n)$，$e_i = u_{i-1}u_i$。数 n（途径中出现的边数）称为途径的长度。不含边（即 $n = 0$）的途径称为平凡途径。注意，在一条途径中顶点和边可重复出现。实际上，代表途径的顶点和边的交替序列通常只用顶点序列来代替即可。两条 u—v 途径 $u_0u_1\cdots u_n$ 和 $v_0v_1\cdots v_m(u_0 = v_0 = u, u_n = v_m = v)$ 是相同的当且仅当 $n = m$，且 $u_i = v_i(0\le i\le n)$，否则称它们是不同的。注意，G 的两条不同 u—v 途径完全可能导出 G 的相同子图。一条 u—v 途径，当 $u\ne v$ 时，称为是开的；当 $u = v$ 时，就称为是闭的。一条边不重复的 u—v 途径称为 u—v 迹，而顶点不重复的 u—v 途径称为 u—v 路。由路和迹的定义可知，任意一条路都是一条迹。在图 1.14 所示的图 G 中，$W_1 = v_1v_2v_3v_2v_5v_3v_4$ 是一条 v_1—v_4 途径，但不是迹；$W_2 = v_1v_2v_5v_1v_3v_4$ 是一条 v_1—v_4 迹，但不是路；而 $W_3 = v_1v_3v_4$ 是一条 v_1-v_4 路。途径 W 包含途径 W' 是指 W' 是 W 的子列。

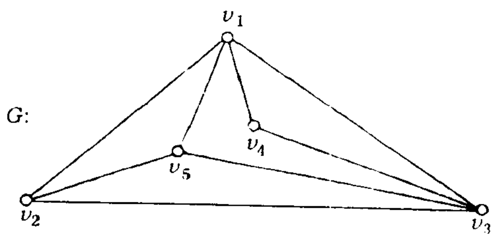


图 1.14 途径，迹和路

根据定义，每一条路是一条途径，一般来说这个命题的逆命题是不正确的。另一方面，我们的确有下面的定理。

定理 1.2 图 G 中每一条 u—v 途径包含一条 u—v 路。

证明 设 W 是 G 中一条 u—v 途径。如果 W 是闭的，结果是显然的。设 $W = u_0u_1u_2\cdots u_n$ 是 G 的一条开途径（其中：$u_0 = u, u_n = v$）。如果 W 中顶点不重复，那么 W 是一条 u—v 路，否则 W 中存在一个顶点至少重复两次。设 i 和 j 是不同正整数 $(i < j)$，且 $u_i = u_j$。从 W 中删去子列 $u_{i+1}u_{i+2}\cdots u_j$ 得到一条长度比

W 小的 u—v 途径 W_1。如果 W_1 中没有重复顶点，那么 W_1 是一条 u—v 路。如果不是这种情况，我们继续上述程序，直到最后得到一条是 u—v 路的 u—v 途径。■

正像下面定理指出的那样，一个图的邻接矩阵的 n 次幂能够用来计算图中各种长度的途径数目。

定理 1.3 设 G 为一个图，G 的顶点集 $V(G)=\{v_i \mid 1\leq i\leq p\}$ 且 A 是图 G 的邻接矩阵。那么 $A^n(n\geq 1)$ 的 (i,j) 项是 G 中长为 n 的不同 v_i—v_j 途径的条数。

证明 对 n 进行归纳。当 $n=1$ 时，由存在一条长为 1 的 v_i—v_j 途径当且仅当 $v_iv_j\in E(G)$，故结果显然成立。设 $A^{n-1}=[a_{ij}^{(n-1)}]$，$a_{ij}^{(n-1)}$ 是 G 中长为 $n-1$ 的不同 v_i—v_j 途径的条数，$A^n=[a_{ij}^{(n)}]$。由 $A^n=A^{n-1}\cdot A$ 可得

$$a_{ij}^{(n)}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}^{(n-1)}a_{kj}。\tag{1.1}$$

G 中每条长为 n 的 v_i—v_j 途径是可由长为 $n-1$ 的 v_i—v_k 途径（其中：v_k 与 v_j 邻接）加上边 v_kv_j 和顶点 v_j 组成，因此根据归纳假设，等式(1.1)成立。由归纳原理可知，定理结论成立。■

一个图的非平凡闭迹称为 G 的一条回路。若一条回路 $v_1v_2\cdots v_nv_1(n\geq 3)$ 的 n 个顶点互不相同，那么该回路称为圈。没有圈的图称为无圈图。由迹、路、回路和圈的边导出的图 G 的子图也分别称为 G 的迹、路、回路和圈。如果一个圈的长度为偶数，则称该圈为偶圈，否则称为奇圈。长为 n 的圈称为 n-圈。一个 3-圈称为三角形。如果图 G 的阶为 n，且是一条路或一个圈，则 G 分别用 P_n 或 C_n 表示。

我们现在考虑图论中一个最基本的概念，即连通图和不连通图。在图 G 中，如果两个顶点 u 和 v 之间存在一条 u—v 路，则称两个顶点 u 和 v 是连通的。如果 G 中任何两个顶点都是连通的，则称图 G 是连通的或 G 为连通图，否则就称 G 是不连通的或 G 为不连通图。"连通"关系是图 G 顶点集上的等价关系，由每个等价类导出的子图称为 G 的连通分支或简称为 G 的分支。换句话说，图 G 的一个分支是 G 的一个连通子图，且不会作为 G 的其它连通子图的真子图，即 G 的一个分支对连通性来说是一个最大的子图。显然，图 G 的一个连通子图 F 是 G 的一个分支，如果对于 G 的任意一个连通子图 H，由 $V(F)\subseteq V(H)$ 及 $E(F)\subseteq E(H)$ 可得 $F=H$。图 G 的不同连通分支个数称为 G 的分支数，用 $k(G)$ 表示。显然 $k(G)=1$ 当且仅当 G 是连通的。如果连通图 G 是无圈的，则称 G 为树。容易验证，树是边数最少的连通图。对于图 1.15 所示的图 G，有 $k(G)=6$。