

沈 瓏、孙 彤 編著

工厂常用数学

机械工業出版社

工厂常用数学

沈 瓏、孙 彤編著



机械工業出版社

1958

出版者的話

本書是一本結合实际工作的数学，它包括了工厂常用的一般簡單計算，無論在划綫、下料、机床調整和測量檢驗工作方面都列有計算公式。公式来源如果經簡單計算就可以証明的，都加以証明。全書共有 290 个公式，每个公式后面都附有計算例題和習題，并附有習題答案。可以供初中以上文化水平的初級技術員、工長和技工自修之用。書后并附有一些实用附表，可以作为工作中的参考。

NO. 1795

1958 年 7 月第一版 1958 年 7 月第一版第一次印刷

850×1168^{1/32} 字數 153 千字 印張 6^{1/8} 0,001—12,100 冊

機械工業出版社(北京东交民巷 27 号)出版

機械工業出版社印刷厂印刷 新华書店發行

北京市書刊出版業營業許可証出字第 008 号 定价(10) 1.20 元

編著者的話

本書为机器制造工厂中的技术工人和初級技術人員而編寫。

在国民經济每种企業的工厂中,不論那一部門的工作人員,都需要有一定的数学基础,用来解决日常工作中的計算問題。本書的目的在協助机械制造工厂的工人同志和初級技術人員熟悉在工作中时常碰到的数学計算,并适当地提供一些常用表格和数据。因此,本書內容以介紹常用計算公式和演算方法为主,除了把三角学和对数学的一般原理及使用法作一次复習外,还分別按各項工作分章介紹有关的常用数学計算法,而必要的表格和数值則集中列为附录以供参考。

本書以具有一些初中程度的代数和几何知識的讀者作为主要对象;为了帮助讀者領会書中內容和掌握計算起見,書中載有相当数量的例題和复習題,这也是本書的一个重要組成部分。

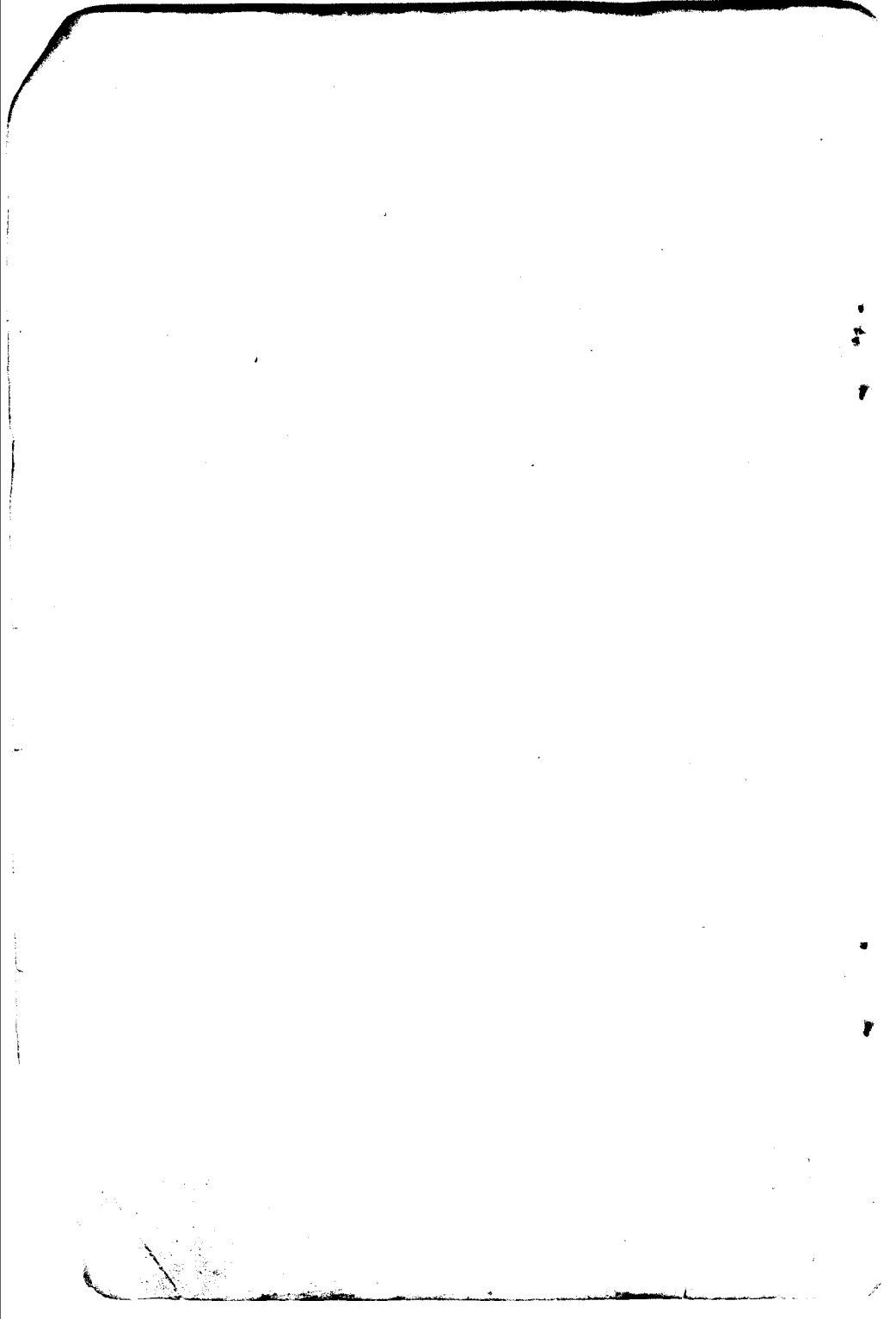
由于編著者学識經驗有限,本書的缺点在所难免,尚希讀者提出宝贵意見。

編著者 1957年9月

目 次

編著者的話	3
一 三角函数	7
二 对数	28
三 材料准备工作中的数学計算	38
1 長度的計算	38
2 面积的計算	49
3 体积和重量的計算	58
四 划綫和样板制造工作中的数学計算	69
1 角度計算	69
2 螺紋計算	72
3 正齿輪的計算	78
4 螺旋齿輪的計算	81
5 标准傘齿輪的計算	84
6 其他有关划綫和样板工作的計算	89
五 机床調整工作中的数学計算	101
1 皮帶傳动和摩擦輪傳动的計算	101
2 齿輪傳动的計算	106
3 分度头各种分度法的計算	113
4 刀具刃磨的計算	117
5 裝置刀具和工件的計算	121
6 切削長度的計算	129
7 銑刀号碼的選擇	132
六 測量檢驗工作中的数学計算	137
1 使用正弦棒測量的計算	137
2 使用鋼柱測量的計算	140
3 使用鋼珠測量的計算	147
4 使用卡尺測量的計算	152
附录	158

表 I 三角函数表	158
表 II 普通对数表	164
表 III 常用單位和換算用表	169
1 度量衡單位表 (169)——2 長度換算表 (169)——3 面積換算表 (169)——4 體積換算表 (170)——5 重量換算表 (170)——6 英吋換算公厘表 (170)——7 小數英吋值換算公厘表 (172)——8 各種硬度值的換算表 (173)	
表 IV 常用數值表	174
1 小數化分數表 (174)——2 數的平方、立方、平方根、立方根、圓周和圓面積表 (176)	
表 V 材料的比重和重量表	180
1 金屬材料的單位重量和比重表 (180)——2 常用金屬成型材料重量表 (181)	
表 VI 齒輪傳動計算用表	183
1 周節、徑節和模數的互換表 (183)——2 齒輪的齒速比數值表 (185)——3 25.4 的近似值 (190)——4 π 的近似值 (190)——5 $\frac{\pi}{25.4}$ 的近似值 (191)——6 $\pi \times 25.4$ 的近似值 (191)——7 從 1 到 1000 的分解因數表 (192)	



— 三角函数

1 銳角三角函数 按照几何学原理，在直角三角形中，銳角和边的大小有一定的关系。三角学就是从这种关系出發，發展为利用边和角的关系来解决边和角的計算問題。

例如，在直角三角形 ABC 中， C 是直角（即等于 90° ），其斜边为 c ，而銳角 A 的对边为 a ，鄰边为 b ，那么 A 角和各边有如下的关系：

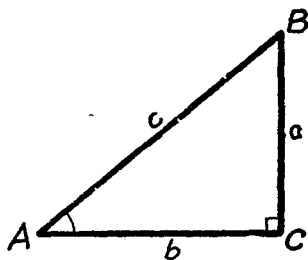


圖 1

$$A \text{ 的正弦} = \frac{\text{对边}}{\text{斜边}}, \quad \text{写作: } \sin A = \frac{a}{c}; \quad [1]$$

$$A \text{ 的余弦} = \frac{\text{鄰边}}{\text{斜边}}, \quad \cos A = \frac{b}{c}; \quad [2]$$

$$A \text{ 的正切} = \frac{\text{对边}}{\text{鄰边}}, \quad \tan A = \frac{a}{b}; \quad [3]$$

$$A \text{ 的余切} = \frac{\text{鄰边}}{\text{对边}}, \quad \cot A = \frac{b}{a}; \quad [4]$$

$$A \text{ 的正割} = \frac{\text{斜边}}{\text{鄰边}}, \quad \sec A = \frac{c}{b}; \quad [5]$$

$$A \text{ 的余割} = \frac{\text{斜边}}{\text{对边}}, \quad \csc A = \frac{c}{a}. \quad [6]$$

公式 [1] 到 [6] 指明了以不同的边的比例关系来表示 A 角，叫做 A 角的三角函数。

2 三角函数之間的基本关系 所謂三角函数之間的基本关系，即三角函数之間相互轉化替代的关系。

(1) 根据三角函数的定义，可知同一角的每两个函数之間有互成倒数的关系，即

$$\left. \begin{aligned}
 \sin A &= \frac{1}{\csc A}, \quad \text{或} \quad \csc A = \frac{1}{\sin A}, \\
 \cos A &= \frac{1}{\sec A}, \quad \sec A = \frac{1}{\cos A}, \\
 \tan A &= \frac{1}{\cot A}, \quad \cot A = \frac{1}{\tan A};
 \end{aligned} \right\} \quad [7]$$

亦即:

$$\sin A \times \csc A = 1,$$

$$\cos A \times \sec A = 1,$$

$$\tan A \times \cot A = 1.$$

(2) 在同一直角三角形 ABC 中 (見圖 1), 如將三角函数来表示 B 角, 則得

$$\sin B = \frac{b}{c}, \quad \cos B = \frac{a}{c}, \quad \tan B = \frac{b}{a},$$

$$\csc B = \frac{c}{b}, \quad \sec B = \frac{c}{a}, \quad \cot B = \frac{a}{b}.$$

如將这些結果与公式 [1] 到 [6] 比較, 可知

$$\sin A = \cos B, \quad \cos A = \sin B, \quad \tan A = \cot B,$$

$$\csc A = \sec B, \quad \sec A = \csc B, \quad \cot A = \tan B.$$

但由于 $A + B = 90^\circ$, 即 $B = 90^\circ - A$, 上列各式可写成:

$$\left. \begin{aligned}
 \sin A &= \cos(90^\circ - A), & \csc A &= \sec(90^\circ - A), \\
 \cos A &= \sin(90^\circ - A), & \sec A &= \csc(90^\circ - A), \\
 \tan A &= \cot(90^\circ - A), & \cot A &= \tan(90^\circ - A).
 \end{aligned} \right\} \quad [8]$$

因为 $A + B = 90^\circ$, A 和 B 互为余角, 所以上述关系可以表述为: 銳角的正函数等于其余角的余函数, 而余函数則等于其余角的正函数。

(3) 如將公式 [3] 及 [4] 左边分式的分子、分母各除以 c , 則

$$\tan A = \frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}},$$

$$\cot A = \frac{b}{a} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}},$$

根据公式〔1〕及〔2〕, $\frac{a}{c} = \sin A$, $\frac{b}{c} = \cos A$, 代入得

$$\left. \begin{aligned} \tan A &= \frac{\sin A}{\cos A}, \\ \cot A &= \frac{\cos A}{\sin A}. \end{aligned} \right\} \quad [9]$$

(4) 在直角三角形 ABC 中, 根据几何学的勾股弦定理

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

如將此式左右兩边分別以 a^2 , b^2 及 c^2 相除, 則得

$$\frac{a^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2}, \quad \text{即 } 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{c}{a}\right)^2;$$

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{b^2} = \frac{c^2}{b^2}, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1 = \left(\frac{c}{b}\right)^2;$$

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2}, \quad \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1.$$

以公式〔1〕到〔6〕代入, 上列三式即成为

$$\left. \begin{aligned} 1 + \cot^2 A &= \csc^2 A, \\ \tan^2 A + 1 &= \sec^2 A, \\ \sin^2 A + \cos^2 A &= 1. \end{aligned} \right\} \quad [10]$$

注 在三角学中, $\sin^2 A$ 即 $(\sin A) \times (\sin A) = (\sin A)^2$ 。

例1 在直角三角形 ABC 中, $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$, 求 A 角的諸三角函数。

〔解〕 用公式〔1〕至〔6〕,

$$\sin A = \frac{a}{c} = \frac{3}{5} = 0.6, \quad \csc A = \frac{c}{a} = \frac{5}{3} = 1.6667,$$

$$\cos A = \frac{b}{c} = \frac{4}{5} = 0.8, \quad \sec A = \frac{c}{b} = \frac{5}{4} = 1.25,$$

$$\tan A = \frac{a}{b} = \frac{3}{4} = 0.75, \quad \cot A = \frac{b}{a} = \frac{4}{3} = 1.3333.$$

例2 在直角三角形中, 已知 $\cos A = 0.8$, 求 $\sec A$ 和 $\csc B$ 。

〔解〕 用公式〔7〕, $\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{1}{0.8} = 1.25$,

因为 $B = 90^\circ - A$, 根据公式〔8〕, $\csc(90^\circ - A) = \sec A$,

所以 $\csc B = \csc(90^\circ - A) = \sec A = 1.25$ 。

例3 在直角三角形中, 已知 $\sin A = \frac{4}{5}$, $A = 80^\circ$, 求 c 。

[解] 据公式 [1], $\sin A = \frac{a}{c}$,

代入, 得 $\frac{4}{5} = \frac{80}{c}$,

$$\therefore c = \frac{5 \times 80}{4} = 100.$$

3 銳角 45° 、 30° 和 60° 的函数值 在等腰直角三角形中 (圖 2), $a = b$, $A = B = 45^\circ$ 。

如以 a 和 b 作为 1, 那么根据勾股弦定理, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$ 。

因此,

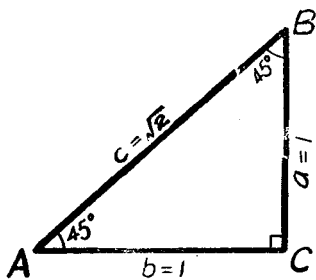


圖 2

$$\left. \begin{aligned} \sin 45^\circ &= \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.7071, \\ \cos 45^\circ &= \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.7071, \\ \tan 45^\circ &= \frac{1}{1} = 1.0000, \\ \cot 45^\circ &= \frac{1}{1} = 1.0000, \\ \sec 45^\circ &= \frac{\sqrt{2}}{1} = 1.4142, \\ \csc 45^\circ &= \frac{\sqrt{2}}{1} = 1.4142. \end{aligned} \right\} [11]$$

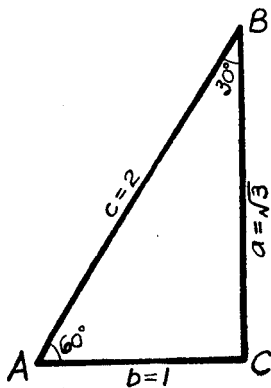


圖 3

如果在直角三角形中, $A = 60^\circ$, 則 $B = 30^\circ$, 如圖 3。假定 $b = 1$, 則根据几何学証明, $c = 2$, $a = \sqrt{3}$ 。因此,

$$\left. \begin{aligned} \sin 60^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.8660 = \cos 30^\circ, \\ \cos 60^\circ &= \frac{1}{2} = 0.5000 = \sin 30^\circ, \\ \tan 60^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{1} = 1.7320 = \cot 30^\circ, \\ \cot 60^\circ &= \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.5774 = \tan 30^\circ, \\ \sec 60^\circ &= \frac{2}{\sqrt{3}} = 1.1547 = \csc 30^\circ, \\ \csc 60^\circ &= \frac{2}{1} = 2.0000 = \sec 30^\circ. \end{aligned} \right\} [12]$$

4 三角函数表 如果將公式〔11〕和〔12〕中的 45° 、 30° 和 60° 角的諸函数值用表式排列，可得如下的結果：

角	sin	cos	tan	cot	sec	csc
30°	0.5000	0.8660	0.5774	1.7320	2.0000	1.1547
45°	0.7071	0.7071	1.0000	1.0000	1.4142	1.4142
60°	0.8660	0.5000	1.7320	0.5774	1.1547	2.0000

30° 、 45° 和 60° 是計算中最常遇到的角度，因此这些函数值最好記得很熟。

除 30° 、 45° 及 60° 以外，进一步的分析計算可以得到从 0° 到 90° 的所有角度的三角函数值。把这些函数值制成表式，即成为三角函数表。表 1 是以度为單位的三角函数表；但实际計算时，仅有整度的函数值是不够的，附录表 I 就提供了精确到十分之一度的三角函数表，并附有修正值以使用补插法获得十分之一度超余部分的函数（近似值）。

三角函数表的使用法，如下例所示。补插法的应用，參見附录表 I 的說明。

例4 利用表 1，求 $\sin 27^\circ$ 和 $\csc 73^\circ$ 的值。

〔解〕 在表 1 中，首先在最左边的直欄中找出角的 27° ；从这个数字按水平方向向右，在表眉印着 [sin] 的直欄中找到的一個数字，即 0.4540，就是 $\sin 27^\circ$ 的值。所以 $\sin 27^\circ = 0.4540$ 。

在求 $\csc 73^\circ$ 的值时，在最右边角度欄中找出 73° ，由此按水平方向向左在表底印着 [csc] 的直欄中，找到数字 1.0457，即 $\csc 73^\circ = 1.0457$ 。

例5 利用附录表 I，求 $\tan 24^\circ 30'$ 和 $\cos 61^\circ 48'$ 的值。

〔解〕 附录表 I 的編排方式跟表 1 不同，它是按正弦和余弦、正切和余切分別組成的表式，除左边和右边印着 [角] 的兩直欄跟表 1 一样指明正函数和余函数的角度外，中間的各欄已改为标明分数。因此，欲求 $\tan 24^\circ 30'$ 时，应在表的正切和余切部分中，先从最左直欄中找得 24° ，由此向右在表眉印着 [30'] 的直

表1 三角函数表

角	sin	cos	tan	cot	sec	csc	
0°	.0000	1.0000	.0000	∞	1.0000	∞	90°
1°	.0175	.9998	.0175	57.290	1.0002	57.299	89°
2°	.0349	.9994	.0349	28.636	1.0006	28.654	88°
3°	.0523	.9986	.0524	19.081	1.0014	19.107	87°
4°	.0698	.9976	.0699	14.300	1.0024	14.336	86°
5°	.0872	.9962	.0875	11.430	1.0038	11.474	85°
6°	.1045	.9945	.1051	9.5144	1.0055	9.5668	84°
7°	.1219	.9925	.1228	8.1443	1.0075	8.2055	83°
8°	.1392	.9903	.1405	7.1154	1.0098	7.1853	82°
9°	.1564	.9877	.1584	6.3138	1.0125	6.3925	81°
10°	.1736	.9848	.1763	5.6713	1.0154	5.7588	80°
11°	.1908	.9816	.1944	5.1446	1.0187	5.2408	79°
12°	.2079	.9781	.2126	4.7046	1.0223	4.8097	78°
13°	.2250	.9744	.2309	4.3315	1.0263	4.4454	77°
14°	.2419	.9703	.2493	4.0108	1.0306	4.1336	76°
15°	.2588	.9659	.2679	3.7321	1.0353	3.8637	75°
16°	.2756	.9613	.2867	3.4874	1.0403	3.6280	74°
17°	.2924	.9563	.3057	3.2709	1.0457	3.4203	73°
18°	.3090	.9511	.3249	3.0777	1.0515	3.2361	72°
19°	.3256	.9455	.3443	2.9042	1.0576	3.0716	71°
20°	.3420	.9397	.3640	2.7475	1.0642	2.9238	70°
21°	.3584	.9336	.3839	2.6051	1.0711	2.7904	69°
22°	.3746	.9272	.4040	2.4751	1.0785	2.6695	68°
23°	.3907	.9205	.4245	2.3559	1.0864	2.5593	67°
24°	.4067	.9135	.4452	2.2460	1.0946	2.4586	66°
25°	.4226	.9063	.4663	2.1445	1.1034	2.3662	65°
26°	.4384	.8988	.4877	2.0503	1.1126	2.2812	64°
27°	.4540	.8910	.5095	1.9626	1.1223	2.2027	63°
28°	.4695	.8829	.5317	1.8807	1.1326	2.1301	62°
29°	.4848	.8746	.5543	1.8040	1.1434	2.0627	61°
30°	.5000	.8660	.5774	1.7321	1.1547	2.0000	60°
31°	.5150	.8572	.6009	1.6643	1.1666	1.9416	59°
32°	.5299	.8480	.6249	1.6003	1.1792	1.8871	58°
33°	.5446	.8387	.6494	1.5399	1.1924	1.8361	57°
34°	.5592	.8290	.6745	1.4826	1.2062	1.7883	56°
35°	.5736	.8192	.7002	1.4281	1.2208	1.7434	55°
36°	.5878	.8090	.7265	1.3764	1.2361	1.7013	54°
37°	.6018	.7986	.7536	1.3270	1.2521	1.6616	53°
38°	.6157	.7880	.7813	1.2799	1.2690	1.6243	52°
39°	.6293	.7771	.8098	1.2349	1.2868	1.5890	51°
40°	.6428	.7660	.8391	1.1918	1.3054	1.5557	50°
41°	.6561	.7547	.8693	1.1504	1.3250	1.5243	49°
42°	.6691	.7431	.9004	1.1106	1.3456	1.4945	48°
43°	.6820	.7314	.9325	1.0724	1.3673	1.4663	47°
44°	.6947	.7193	.9657	1.0355	1.3902	1.4396	46°
45°	.7071	.7071	1.0000	1.0000	1.4142	1.4142	45°
	cos	sin	cot	tan	csc	sec	角

欄中找到数字 0.4557, 即为 $\tan 24^\circ 30'$ 的值。

同样, 求 $\cos 61^\circ 48'$ 时, 应在表的正弦和余弦部分中, 从右

边的〔角〕欄中先找得 61° ，由此向左在表底印着 $[48']$ 的直欄內找到数字 0.4726，即得 $\cos 61^\circ 48'$ 的值。

例6 用附录表 I，求 $\sin 47^\circ 39'$ 和 $\csc 47^\circ 39'$ 的值。

〔解〕 求 $\sin 47^\circ 39'$ 的值必須用补插法，其步骤如下：

(1) 先求 $\sin 47^\circ 36'$ 。按上例方法，得 $\sin 47^\circ 36' = 0.7385$ 。

(2) 由于 $47^\circ 36'$ 与 $47^\circ 39'$ 相差 $3'$ ，按表 I 說明中所提出的办法，在修正值的最右欄（即印着 $[3']$ 的）內，找到跟数字 0.7385 同一行的数字，即 6，得出 $\sin 47^\circ 36'$ 的超余部分的修正值为 0.0006。

(3) 將所得的兩項結果綜合起来，得到答案为

$$\sin 47^\circ 39' = 0.7385 + 0.0006 = 0.7391.$$

附录表 I 不包括 $\sec$ 及 $\csc$ 的函数值。因此欲求 $\csc 47^\circ 39'$ 的值，須利用三角函数的基本关系，即根据公式〔7〕：

$$\csc 47^\circ 39' = \frac{1}{\sin 47^\circ 39'} = \frac{1}{0.7391} = 1.3529.$$

5 任意角的三角函数 銳角的三角函数已如前述。由于实际計算問題不一定限于銳角，因而需要解释任意角的三角函数。为了分析說明，这里引用了圖象的方法。

如圖 4，在圖象上有一点 P ，它跟原点 O 的距离为 r ； r 跟水平軸綫 OX 形成 XOP 角。 XOP 角的大小，由 P 的位置决定：如 P 在第一象限內， XOP 角是小于 90° 的；如 P 位于第二、第三或第四象限內，則 XOP 角分別处于 $90^\circ \sim 180^\circ$ 、 $180^\circ \sim 270^\circ$ 或 $270^\circ \sim 360^\circ$ 之間。

在这种情况下， XOP 角的三角函数为：

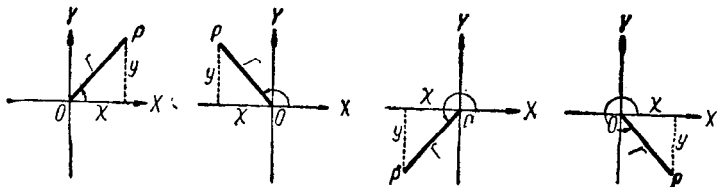


圖 4

$$\left. \begin{aligned} \sin XOP &= \frac{\text{縱座標}}{\text{距離}} = \frac{y}{r}, & \csc XOP &= \frac{\text{距離}}{\text{縱座標}} = \frac{r}{y}, \\ \cos XOP &= \frac{\text{橫座標}}{\text{距離}} = \frac{x}{r}, & \sec XOP &= \frac{\text{距離}}{\text{橫座標}} = \frac{r}{x}, \\ \tan XOP &= \frac{\text{縱座標}}{\text{橫座標}} = \frac{y}{x}, & \cot XOP &= \frac{\text{橫座標}}{\text{縱座標}} = \frac{x}{y}. \end{aligned} \right\} [13]$$

但必須注意，由于縱橫座標在不同的象限內有不同的代數符號（+或-），因而 XOP 角的函數也要看它處在那一象限而有不同的代數符號，如下表所列：

函 數	第一象限	第二象限	第三象限	第四象限
sin	+	+	-	-
csc	+	+	-	-
cos	+	-	-	+
sec	+	-	-	+
tan	+	-	+	-
cot	+	-	+	-

第一象限角的所有函數值都是正的，而且它的情況跟前述銳角三角函數大致相同。因此，對於第一象限角，第1~4節所列的銳角三角函數的定義和公式都同樣適用，只不過須以 x 、 y 及 r 分別代替 b 、 a 及 c 而已。

6 第二象限角($90^\circ \sim 180^\circ$)的函數 設 XOP 角處於第二象限（即圖5中的 C 角），它的縱座標為 a ，橫座標為 $-b$ ，距離為 r ，則根據公式〔13〕， C 角的三角函數如下：

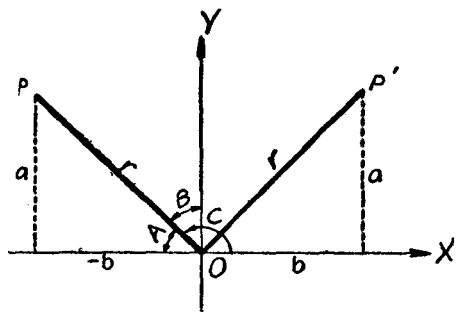


圖 5

$$\sin C = \frac{a}{r}, \quad \csc C = \frac{r}{a},$$

$$\cos C = \frac{-b}{r}, \quad \sec C = \frac{r}{-b},$$

$$\tan C = \frac{a}{-b}, \quad \cot C = \frac{-b}{a}.$$

如果在第一象限內作角 XOP' 使等于 A , 并使 $P'O = PO = r$, 那么 P' 的縱座标为 a , 横座标为 b , 因此

$$\sin A = \frac{a}{r}, \quad \csc A = \frac{r}{a},$$

$$\cos A = \frac{b}{r}, \quad \sec A = \frac{r}{b},$$

$$\tan A = \frac{a}{b}, \quad \cot A = \frac{b}{a}.$$

綜合兩組結果, 并以 $(180^\circ - A)$ 代 C , 則得

$$\left. \begin{aligned} \sin(180^\circ - A) &= \sin A, & \csc(180^\circ - A) &= \csc A, \\ \cos(180^\circ - A) &= -\cos A, & \sec(180^\circ - A) &= -\sec A, \\ \tan(180^\circ - A) &= -\tan A, & \cot(180^\circ - A) &= -\cot A. \end{aligned} \right\} [14]$$

但是, 从圖上可以看出, $180^\circ - A = 90^\circ + B$, $A = 90^\circ - B$, 以之分別代入公式 [14] 的正弦函数式的左右兩边, 即得

$$\sin(90^\circ + B) = \sin(90^\circ - B),$$

因为 B 是銳角, 根据公式 [8], $\sin(90^\circ - B) = \cos B$

所以

$$\sin(90^\circ + B) = \cos B.$$

同理可求得其他函数, 將結果綜列起来:

$$\left. \begin{aligned} \sin(90^\circ + B) &= \cos B, & \csc(90^\circ + B) &= \sec B, \\ \cos(90^\circ + B) &= -\sin B, & \sec(90^\circ + B) &= -\csc B, \\ \tan(90^\circ + B) &= -\cot B, & \cot(90^\circ + B) &= -\tan B. \end{aligned} \right\} [15]$$

7 第三象限角 ($180^\circ \sim 270^\circ$) 的函数 設 XOP 角处于第三象限, 則 $\angle XOP = 180^\circ + A$ 如圖 6 所示。根据公式 [13],

$$\sin(180^\circ + A) = -\frac{a}{r}, \quad \csc(180^\circ + A) = -\frac{r}{a},$$

$$\cos(180^\circ + A) = -\frac{b}{r}, \quad \sec(180^\circ + A) = -\frac{r}{b},$$

$$\tan(180^\circ + A) = \frac{a}{b}, \quad \cot(180^\circ + A) = \frac{b}{a}.$$

如將圖上的 OP 綫
延長, 使 $P'O = PO$, 則
 $\angle XOP' = A$, 并且

$$\sin A = \frac{a}{r}, \quad \csc A = \frac{r}{a},$$

$$\cos A = \frac{b}{r}, \quad \sec A = \frac{r}{b},$$

$$\tan A = \frac{a}{b}, \quad \cot A = \frac{b}{a}.$$

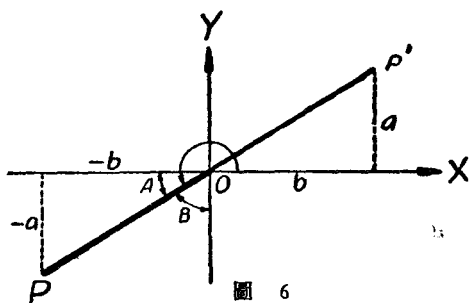


圖 6

將兩組結果互相比較, 可得

$$\left. \begin{aligned} \sin(180^\circ + A) &= -\sin A, & \csc(180^\circ + A) &= -\csc A, \\ \cos(180^\circ + A) &= -\cos A, & \sec(180^\circ + A) &= -\sec A, \\ \tan(180^\circ + A) &= \tan A, & \cot(180^\circ + A) &= \cot A. \end{aligned} \right\} [16]$$

但是, 因为 $\angle XOP = 270^\circ - B$, 所以 $180^\circ + A = 270^\circ - B$;
而 $A = 90^\circ - B$ 。如以此項結果代入公式[16]并且应用公式[8],
得

$$\left. \begin{aligned} \sin(270^\circ - B) &= -\cos B, & \csc(270^\circ - B) &= -\sec B, \\ \cos(270^\circ - B) &= -\sin B, & \sec(270^\circ - B) &= -\csc B, \\ \tan(270^\circ - B) &= \cot B, & \cot(270^\circ - B) &= \tan B. \end{aligned} \right\} [17]$$

8 第四象限角 ($270^\circ \sim 360^\circ$) 的函数 設 XOP 角处于第四象
限如圖 7, 則 $\angle XOP = 360^\circ - A$ 。根据公式 [13] 得

$$\sin(360^\circ - A) = -\frac{a}{r}, \quad \csc(360^\circ - A) = -\frac{r}{a},$$

$$\cos(360^\circ - A) = \frac{b}{r}, \quad \sec(360^\circ - A) = \frac{r}{b},$$

$$\tan(360^\circ - A) = -\frac{a}{b}, \quad \cot(360^\circ - A) = -\frac{b}{a}.$$

如在第一象限內, 作 XOP' 角使等于 A , 并使 $OP' = OP = r$,

則

$$\sin A = \frac{a}{r}, \quad \csc A = \frac{r}{a},$$

$$\cos A = \frac{b}{r}, \quad \sec A = \frac{r}{b},$$

$$\tan A = \frac{a}{b}, \quad \cot A = \frac{b}{a}.$$