高等学校教材

理论力学

湖南大学 唐驾时 黎大志 赵跃宇 主编

机械工业出版社

高等学校教材

理论力学

湖南大学 唐驾时 黎大志 赵跃宇 主编

机械工业出版社

本书是按照高等学校工科理论力学教学指导小组1993年修订的"高等工业学校理论力学课程教学基本要求"编写的，适合工科各类专业使用，不同的学时可根据教学要求进行取舍。主要内容包括静力学、运动学、动力学三大部分。同以往的教材相比，在体系和内容上做了一些改变，并增加了用计算机解理论力学问题的内容，在教学过程中取得了较好的效果，本书与配套教材《理论力学练习册》一起使用。

理 论 力 学

湖南大学 唐驾时 黎大志 赵跃宇 主编

•

责任编辑：周性贤、林松 版式设计：冉晓华

封面设计：郭景云 责任校对：姚培新

责任印制：王国光

•

机械工业出版社出版（北京阜成门外百万庄南街一号）

邮政编码：100037

（北京市书刊出版业营业许可证出字第117号）

机械工业出版社京丰印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

•

开本 787×1092 1/16·印张15.75·字数384千字

1996年5月第1版第1次印刷

印数 0 001—5 000定价：16.80元

•

ISBN 7-111-04874-1/O·117（课）

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

ISBN 7-111-04874-1

9 787111 048749 >

前　言

本教材是按照高等学校工科理论力学教学指导小组1993年修订的“高等工业学校理论力学课程教学基本要求”编写的，适合工科各类专业使用，不同的学时可根据教学要求进行取舍。

本教材与同类“理论力学”教材相比，在体系和内容上有一些改变。书中附有思考题，以加强基本概念的训练。

参加本教材编写的有：黎大志（绪论、第一、二、三、四章），唐驾时（第五、六、七、八、十八章），赵跃宇（第九、十、十一、十二、十三章），何祥铁(第十四、十五章)，彭献(第十六章),许文喜(第十七章)。

本教材由唐驾时、黎大志、赵跃宇主编,黎邦隆、宋福磐主审。湖南大学理论力学教研室的其他同志给予了大力支持与帮助。

由于编者水平有限，本教材存在的不足之处，殷切希望读者给予指正。

编者　1995年4月

目　录

第三篇 动 力 学

绪　论

第一节　理论力学的研究内容

力学是研究物体机械运动规律的科学，而理论力学则是研究物体机械运动最普遍和最基本的规律的一门科学。所谓机械运动，是指物体的空间位置随时间的变化。它是物质运动最简单、最基本、最常见的运动形式。固体的移动、旋转和变形，气体和液体的流动等都属于机械运动。因此理论力学既是各门力学学科的基础，又与工程技术密切相关。

理论力学研究的内容是以牛顿定律为基础的，属于经典力学的范畴。它仅适用于运动速度远小于光速的宏观物体的运动。绝大多数工程实际问题都属这个范围。至于速度接近于光速的宏观物体和微观粒子的运动，则是相对论力学和量子力学研究的范围。

理论力学通常分为三部分，即静力学、运动学和动力学。静力学研究力系的简化和物体在力系作用下平衡的规律；运动学从几何的观点研究物体（点和刚体）的运动，而不涉及作用于物体上的力；动力学则研究物体的运动与作用于物体上的力之间的关系。静力学可视为动力学的一种特殊情况，但由于历史发展的原因和工程技术的需要，静力学积累了丰富的内容而单独形成一个相对独立的部分。

第二节　理论力学发展简史

力学的发展和其他学科一样始终是和人类的生产活动紧密联系的。在古代，人类就在农田耕作、建筑、运输等方面的实践中逐渐积累了一些初步的力学知识。我国的墨翟（约公元前468～382年）及其弟子在《墨经》里就有了关于力、重心等概念以及杠杆平衡原理的最早叙述，提出了“力，刑㊀之所以奋也”（即力是物体获得加速度的原因）的正确见解。而在古代的欧洲，却一直认为力是物体保持速度的原因，直到伽利略和牛顿时代，人们对此才有正确的认识。古希腊阿基米德（公元前287～212年）明确表述了杠杆平衡规律，认识了平行力的分解与合成规则，建立了重心的概念，奠定了静力学的基础。

在此之后，西方进入了中世纪（5～15世纪）的黑夜时期，长期受到封建、神权的统治，生产力停滞不前，力学及其他学科也得不到发展。而在我国，在秦代以后，力学知识有了很快发展。如汉朝张衡（78～139年）创造了“浑天仪”和“候风地动仪”，三国时代马钧（235年左右）发明“指南车”，隋朝李春（581～681年）主持修建敞肩圆弧拱式的赵州桥（今河北赵县安济桥）等等，都是当时领先于世界的杰出成就。15世纪后期西方进入文艺复兴时期，工场手工业生产发展很快，推动了力学的迅速发展，而我国却一直仍停留在封建制度时期。这时意大利著名科学家伽利略（1564～1642年）通过实验确定了自由落体运动规律，并明确提出了惯性定律及加速度的概念。德国学者开普勒（1571～1630年）在对大量天文观测资料的

㊀ 刑与形通，指形体。

分析中总结出行星运动三定律。在他们的认识基础上，英国伟大科学家牛顿(1643～1727年)于1687年出版了名著《自然哲学的数学原理》，提出了动力学中著名的牛顿三定律和万有引力定律，奠定了力学作为一门科学的坚实基础。

18～19世纪是理论力学发展成熟的时期。瑞士数学家J·伯努利（1667～1748年）对虚位移原理作了一般表述；瑞士数学力学家欧拉（1707～1783年）建立了刚体的运动微分方程；法国科学家达朗伯（1717～1785年）提出了与牛顿第二定律等效的达朗伯原理；法国数学力学家拉格朗日（1736～1813年）建立了虚位移原理，并将它和达朗伯原理结合起来，导出了著名的拉格朗日方程，从而产生了与牛顿力学（又称矢量力学）不同的新力学体系——分析力学。18世纪下半叶和19世纪，由于拉普拉斯、高斯、泊松和哈密尔顿等的工作，分析力学得到了很大发展。

随着生产的发展和科学技术的进步，理论力学一方面向着纵深方向发展而分成许多专门学科如振动理论、运动稳定理论、陀螺力学、变质量力学等，还由于工程技术的需要，发展了一系列应用方面的力学分支如材料力学、结构力学、弹性力学、塑性力学、土力学、流体力学等；另一方面越来越多地横向渗入到其他学科而形成新的边缘学科如地质力学、生物力学、化学流体力学、物理力学、爆炸力学等。可以预料，理论力学这门既古老又年轻的科学将在未来人类的生产活动中继续扮演重要的角色，而我国的力学工作者将在我国现代化建设和力学发展史上取得更大的成就。

第三节　理论力学的研究方法

通过实践而发现真理，又通过实践而证实真理和发展真理，这是任何一门科学研究和发展所遵循的客观规律。理论力学也是如此。在长期的实践活动中，人们对力学现象逐渐形成一些力学概念，积累了一些经验知识。积累到一定程度，就能逐渐构成体系，建立若干基本定律，用数学演绎和逻辑推理建立严密的理论体系，然后再通过实践来证实并发展这些理论。

观察和实验是理论力学发展的基础。例如力和力矩的概念、杠杆原理、二力平衡等一些力学的基本规律都是人类在对自然现象和生产活动的直接观察的基础上，经过分析、归纳和综合而逐渐形成的。实验是理论力学研究的必要基础。通过实验，人们可以从复杂的自然现象中，人为地创造一些条件来突出影响事物发展的主要因素，并且能够定量地测定各个因素间的关系。伽利略著名的比萨斜塔实验，得到了自由落体的正确规律，彻底推翻了多年的错误观点，并引出了加速度的概念。此外，如库仑摩擦定律、牛顿三定律等都是建立在大量实验的基础上的。

理论力学不仅要求建立有关的一些基本概念和理论，而且要求能运用理论知识对从实际问题中抽象出来的力学模型进行分析和计算。抽象化的方法是理论力学研究中普遍采用的方法，这就是在研究复杂的客观事物时，抓住事物带本质性的主要因素，而撇开一些影响不大的次要因素。所谓力学模型就是对自然界和工程技术中复杂的实际研究对象的合理简化。当所研究物体的运动范围比它本身的几何尺寸大得多时，它的大小和形状对运动的影响很小而可忽略不计，就可将物体简化为只有质量而没有大小的几何点，即质点。一般情况下任何物体都可看作是由许多质点组成的系统，称为质点系。对于那些在运动中变形极小，或虽有变形但不影响研究其整体运动的物体，就可不考虑或暂时不考虑其变形，而认为组成物体的各个

质点之间保持距离不变。这种不变形的特殊质点系称为刚体。对于一个真实的物体采用什么样的力学模型，这取决于问题的性质。以地球为例，在考虑地球在太阳系中的运行时，地球的大小（半径约为6370km）比起其运动范围（轨道半径约1.5×10^8km）来要小得多，因而可视为一个质点。在研究人造地球卫星的运动轨迹时，地球的大小就不能不考虑了，但可忽略它的变形，而把地球当作一个刚体。至于在研究地震的起因或地壳的运动时，就必须考虑地球本身的变形和内部的流动，采用另一个力学模型——连续介质（物质在空间连续分布）。

在理论力学中，数学这一有效的科学工具不仅广泛地用来推演、揭示各力学量之间的内在联系，而且也运用于量的具体计算。现代电子计算机的出现，为数学在力学中的应用提供了更好的工具，使得许多复杂的力学问题得到满意解决。当然，并不是一切力学问题都可以用数学演绎法来解决。实验方法仍然是它的一个基本方法。现代力学的研究需要理论、实验、计算三方面的配合。我们在学习理论力学时，不仅要掌握数学推演和计算，同时不能忽视对力学规律本质的理解，牢记实践是检验真理的唯一标准。

第四节　学习目的与方法

对于工科专业来说，理论力学是一门理论性较强的重要技术基础课。因为工科专业一般都要接触机械运动的问题，其中有些可以直接应用理论力学的基本理论去解决，有些较复杂的问题则需要理论力学和其他专门知识共同解决。同时，理论力学研究的是质点、刚体和任意质点系运动的基本规律，很多工科专业的后续课程，如材料力学、机械原理、机械零件、结构力学、弹塑性力学、流体力学、飞行力学和振动理论等技术基础课和专业课，都需要以理论力学为基础。此外，理论力学的研究方法在科学研究中有一定的典型性，学习它有助于学习其他科学技术理论，有助于培养辩证唯物主义世界观和分析问题、解决问题的能力，为以后解决生产实际问题和从事科学研究工作打下基础。

学习理论力学要达到以下三个方面的要求：准确地理解和掌握基本概念；熟悉各个基本定理和公式，并能正确、灵活应用；学会一些力学问题的基本处理方法。深刻、准确地理解基本概念和基本理论是学好理论力学的关键。为了学好理论力学，还需要明确学习目的，在钻研理论方面和解算例题、习题之间反复交替，使认识逐步深化。通过解题练习，可以提高和深化对理论力学理论的认识，而反过来又提高了解题能力。如果只是学习一般概念和理论，而不去解题，必将不能达到应有的学习效果。

第一篇　静　力　学

静力学主要研究物体在力系作用下的平衡规律，即研究物体平衡时作用在其上的力系应满足什么条件。所谓力系，是指作用在物体上的一组力。静力学中的平衡是指物体相对于地面保持静止或匀速直线运动（严格地说是匀速直线平动，平动的概念见运动学）的状态。而这里的物体是指刚体，因此这一部分内容也称为刚体静力学。刚体是研究力的外效应时，对一般变形不大的物体的一种抽象。

静力学主要讨论以下两个基本问题：

1）力系的等效替换和简化；

2）力系的平衡条件及应用。

若作用于同一刚体的两个不同力系能使该刚体的运动状态产生完全相同的变化，则称这两个力系互相等效。一个力系用其等效力系来代替，称为力系的等效替换。用一个简单力系等效替换一个复杂力系。称为力系的简化。研究力系的简化，不仅可导出力系的平衡条件，同时也用于动力学的研究中。

刚体在力系的作用下处于平衡时力系应满足的条件，称为力系的平衡条件。而满足平衡条件的力系称为平衡力系。力系的平衡条件在工程中有着广泛的应用。工程中有许多机器的零件和结构构件，它们在工作时处于平衡状态或可近似地看作处于平衡状态。为了合理地设计这些零件和构件的形状、尺寸，选用恰当的材料，需要对它们进行强度、刚度和稳定性的分析计算，而这些计算都以力系的平衡条件为基础。

第一章　静力学基本概念和物体受力分析

第一节　力 的 概 念

人们对力的认识是在长期的生活和生产实践中逐步形成和深化，最后通过归纳、概括和科学的抽象而得到的科学概念：力是物体之间的相互机械作用，这种作用使物体的运动状态发生变化或使物体变形。

力使物体运动状态发生改变的效应称为力的运动效应或外效应，使物体变形的效应称为力的变形效应或内效应。理论力学只研究力的运动效应，力的变形效应在材料力学等后续课程中考虑。

实践证明，力对物体的作用效果取决于三个要素：力的大小、方向和作用点。这三个要素称为力的三要素。力的大小表示物体之间相互机械作用的强弱程度，我国法定计量单位制（国际单位制SI）中以牛顿（N）为力的单位，简称为“牛”。它的一千倍为千牛顿（kN），简称千牛。本书采用这种单位制。国际单位制中与力学有关的基本单位有三个，即长度，以米（m）为单位；质量，以千克（kg）为单位；时间，以秒（s）为单位。而力的单位为导出单位。在力学计算中我们要充分注意各力学量的单位及其换算关系。目前有些工程技术部门还采用工程单位制，力的单位用公斤力（kgf）或吨力（tf）表示㊀。

力的方向通常用方位和指向一起表示。例如，说重力的方向是“铅垂向下”，“铅垂”是力的方位，“向下”是力的指向。力的作用点表示力的作用位置。实际上物体相互作用的位置一般并不是一个点，而是物体的一部分面积或体积。只是当作用面积或体积很小时可抽象为点，称为力的作用点。而作用于一点的力称为集中力。过力的作用点且沿力的方位的直线称为力的作用线。如果力的作用范围不能简化为点时则称此力为分布力。

力不仅具有三要素，而且满足矢量的加法规则（见第一章第二节公理3），因此力是矢量。力矢量可以用一有向线段表示，如图1-1所示。线段的长度按一定比例尺表示力的大小，线段的方位和箭头表示力的方向，线段的起点或终点表示力的作用点，而与此线段重合的直线表示力的作用线。

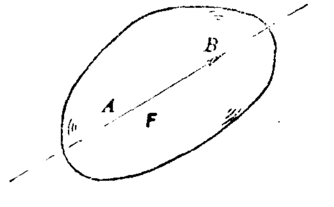

图　1-1

为区别于标量，矢量常用黑体字母或普通字母上加箭头来表示，如$\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{R}$或$\vec{F}$、$\vec{R}$等。本

㊀ 换算关系为

$$1\,\text{kgf}=9.8\text{N},\ \ 1\,\text{tf}=9.8\text{kN}=9800\text{N}$$

书采用前者，而后者则是手写时的常用表示方法。矢量的大小则用与矢量字母相同的普通字母表示，如$\boldsymbol{F}$矢量的大小用F表示。

第二节 静力学公理

静力学公理是人们关于力的基本性质的概括和总结，是人们经过长期的观察和实验后总结出来的客观规律，已经过实践的反复检验，无需证明而为大家所公认。它们是静力学全部理论的基础。

公理 1（两力平衡公理） 受两力作用的刚体平衡的必要与充分条件是：两力的大小相等，方向相反，且沿同一直线作用（简称等值、反向、共线）。

公理 1 揭示了作用于刚体上最简单的力系的平衡条件，它是研究力系平衡条件的基础。图 1-2 表示了满足公理 1 的两种情况。由公理 1 知，等值、反向、共线的一对力为平衡力系。但注意对于变形体，这只是平衡的必要条件。

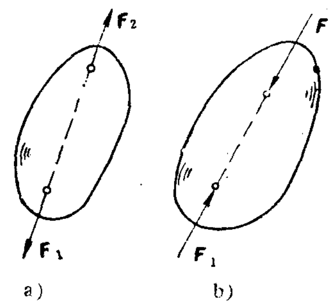

图 1-2

工程上常遇到只受两个力作用而平衡的构件，这种构件称为二力构件。若为直杆，则常称为二力杆。根据公理 1，该两力必沿两作用点的连线。

公理 2（加减平衡力系公理） 在给定力系上加入或除去任何平衡力系，不会改变原力系对刚体的作用。

公理 2 是力系简化的理论基础。但它不适用于变形体，因为加减平衡力系一般会使物体产生变形效应。

应用公理 1 和公理 2 可得到一个重要推论：

推论 1 可把作用于刚体上任一点的力沿着它的作用线移到刚体内其他点上，而不改变该力的作用。（力的可传性原理）

证明：设力$\boldsymbol{F}$作用在刚体的A点，如图1-3a所示。在力$\boldsymbol{F}$的作用线上任取一点B，并加上两个等值、反向、共线的力$\boldsymbol{F}_1$和$\boldsymbol{F}_2$，且$\boldsymbol{F}_1=-\boldsymbol{F}_2=\boldsymbol{F}$，如图1-3b。由公理 1 知$\boldsymbol{F}_1$,$\boldsymbol{F}_2$为一平衡力系；由公理 2，知原力$\boldsymbol{F}$与力系（$\boldsymbol{F}$,$\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$）等效。又由公理 1，$\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{F}_2$亦为一平衡力系，再由公理 2，从力系（$\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$）中减去平衡力系（$\boldsymbol{F}$,$\boldsymbol{F}_2$），剩下力$\boldsymbol{F}_1$与原力$\boldsymbol{F}$等效。而力$\boldsymbol{F}_1$就是原力$\boldsymbol{F}$，只是作用点沿其作用线移到了点$B$，从而得证。

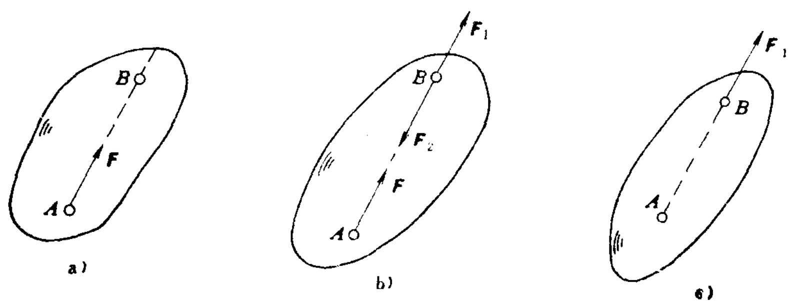

图 1-3

基于这一性质，作用于刚体的力的三要素可改为：力的大小、方向和作用线。沿作用线可任意滑动的矢量称为滑动矢量。因此，作用于刚体的力是滑动矢量。但此结论不适用于变形体。对变形体，力的作用效果与作用点密切相关。作用点不能任意改变的矢量称为定位矢量。作用于变形体的力是定位矢量。

公理 3 （力的平行四边形公理） 作用于物体上同一点的两个力，其合力的大小与方向由以这两力为邻边所构成的平行四边形的对角线确定，且具有相同的作用点。

公理 3 表明力的合成符合矢量求和规则，它是力系合成和分解的基础。力的这一性质具有普遍性，对任何物体均适用。

设在物体上A点作用有力$\boldsymbol{F}_1$和$\boldsymbol{F}_2$，如图1-4a。若以$\boldsymbol{R}$表示它们的合力，则可以写成如下矢量表达式

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2$$

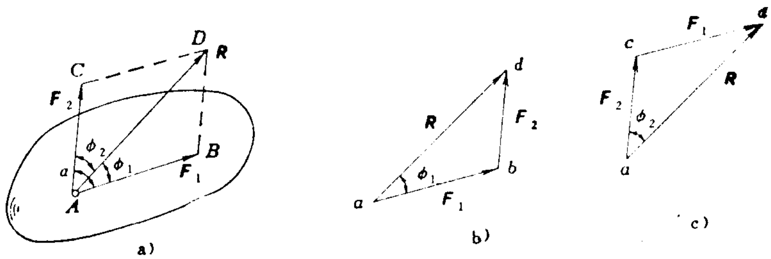

图 1-4

求合力$\boldsymbol{R}$的大小和方向可用几何作图法或解析计算法。用几何法求解时，可不必作出整个平形四边形，只要从任意点a作力矢F_1，再从F_1的末端b作力矢$\boldsymbol{F}_2$(即两力首尾相接)，其矢量$\overrightarrow{ad}$即表示合力矢$\boldsymbol{R}$，如图1-4b。这样构成的三角形称为力三角形，而这种求合力矢的作图方法称为力的三角形法则。不难看出，合力矢$\boldsymbol{R}$的大小和方向与分力矢作图先后次序无关，如图1-4c。由图可见，若已知两力大小F_1、F_2和它们的夹角α，则可由余弦定理和正弦定理求得合力$\boldsymbol{R}$的大小及角ϕ_1或ϕ_2之值（见图1-4）。

反之，根据这一公理也可将作用在物体上的一个力分解为与合力作用于同一点的两个分力。由于用同一条对角线可以作出无穷多个不同的平行四边形，因此如不附加其他条件，力的分解可以有无穷多个答案。但在工程问题中，通常遇到的是将一个力分解为两个特定方向的分力，特别是分解为两个互相垂直的分力，这种分解称为正交分解，所得的两个分力称为正交分力。

推论 2 （三力平衡汇交定理） 当刚体受三力作用而处于平衡，且其中二力的作用线相交于一点时，此三力必在同一平面内，且它们的作用线必汇交于此点。

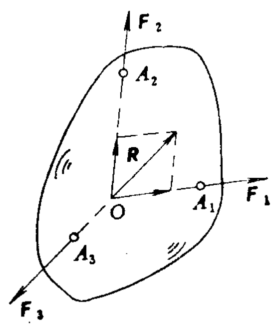

图 1-5

证明：设在刚体上A_1、A_2、A_3处作用着三个力$\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_3$，已知$\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$的作用线汇交于O点，且刚体处于平衡状态，如图1-5所示。按力的可传性，将$\boldsymbol{F}_1$和$\boldsymbol{F}_2$沿作用线移至O点，并由公理 3 求得它们的合力$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2$，则原力系（$\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\boldsymbol{F}_3$）与力系（$\boldsymbol{R},\boldsymbol{F}_3$）等效。根据已知条件，$\boldsymbol{R}$应与$\boldsymbol{F}_3$平衡，而由公理 1 知，力$\boldsymbol{F}_3$的作用线必与合力$\boldsymbol{R}$的作用线重合。因

此，力F_3的作用线必在力F_1和F_2所构成的平面上，且通过交点O。定理得证。

应当注意，这个定理只说明了刚体受三个不平行力作用而平衡的必要条件，但并非充分条件。但据此定理，常可利用已知的两力作用线的交点来确定第三力作用线的方位。

请读者思考：若刚体受三力作用平衡，且已知二力平行，能否得出类似结论？当刚体受n个力（$n>3$）作用而平衡时，结论又如何？

公理 4（作用与反作用公理） 两物体间的作用力与反作用力同时存在，且大小相等、方向相反，沿同一作用线分别作用于这两个物体上。

公理 4 实际上就是牛顿第三定律，它概括了自然界中物体间相互机械作用的关系，是研究由一个物体过渡到多个物体组成的物体系统问题的桥梁，且并不受物体是否刚体以及物体作何运动的限制。又根据这个公理知，一切力都是成对出现的，有受力物体就必有施力物体。

应当指出，作用力与反作用力虽然等值、反向、共线，但它们并不互相平衡，与公理 1 根本不同：公理 1 说明的是一个刚体在二力作用下平衡的充要条件，而公理 4 中的二力却是分别作用于不同物体，且与物体是否平衡和变形无关。

公理 5（刚化公理） 在力系作用下处于平衡状态的变形体若刚化成刚体，则其平衡状态不变。

刚化公理建立了刚体静力学和变形体静力学之间的联系。它告诉我们，刚体的平衡条件可以应用到变形体的平衡问题中去，因为变形体平衡时作用的力系必须满足刚体平衡时所需满足的平衡条件。但应注意，满足了刚体平衡条件的力系，作用于变形体时并不一定平衡。例如，绳索在两个等值、反向、共线的拉力作用下处于平衡，如将绳索刚化成刚杆，则平衡状态保持不变。而刚杆在两个等值、反向、共线的压力作用下是平衡的，但绳索在这种情况下则不能平衡。这说明对于变形体的平衡来说，刚体的平衡条件只是必要的而非充分的，变形体平衡时还须满足与变形体的物理性质有关的其他附加条件。以上述绳子为例，这个条件是：这两力必须是拉力。这个问题将在材料力学等后续课程中研究。

第三节 力在直角坐标轴上的投影与分解

设空间直角坐标系$Oxyz$的三个坐标轴如图1-6所示，已知力F与三轴间的夹角分别为α、β、γ。此力在某轴上的投影等于该力的大小乘以它与该轴夹角的余弦。若以X、Y、Z分别表示力F在x、y、z轴上的投影，$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$为x、y、z轴的单位矢量，则

$$\left.\begin{aligned} X&=F\cos\alpha=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{i}\\ Y&=F\cos\beta=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{j}\\ Z&=F\cos\gamma=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{k}\end{aligned}\right\} \tag{1-1}$$

投影是代数量。例如当$\cos\alpha$为负值时，X为负值。在实际问题中，往往不是事先同时知道以上α、β、γ三个角度，而是知道力与坐标轴z的夹角γ（图1-7）以及图中的夹角ϕ，此时可先将力F投影到z轴上和xy平面上，然后再将分力F_{xy}投影到x、y轴上。这种投影方法称为二次投影法。由图1-7可见

$$\left.\begin{aligned} X&=F\sin\gamma\cos\phi\\ Y&=F\sin\gamma\sin\phi\\ Z&=F\cos\gamma\end{aligned}\right\} \tag{1-2}$$

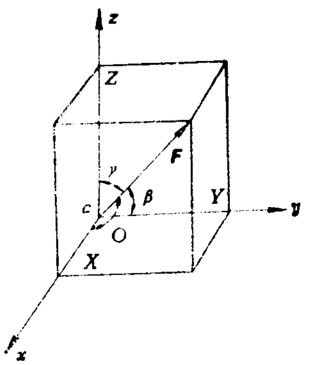

图 1-6

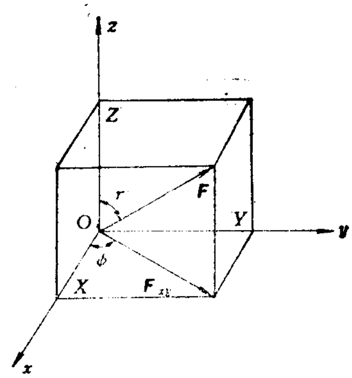

图 1-7

若以F_x、F_y、F_z分别表力F沿直角坐标轴x、y、z的三个正交分量(图1-8)，则

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= \boldsymbol{F}_x+\boldsymbol{F}_y+\boldsymbol{F}_z \\
&= X\boldsymbol{i}+Y\boldsymbol{j}+Z\boldsymbol{k}
\end{aligned}
$$

如已知投影X、Y、Z之值，力F的大小与方向即可由式（1-1）确定：

$$
\left.
\begin{aligned}
&F=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2} \\
&\alpha=\arccos\frac{X}{F},\quad \beta=\arccos\frac{Y}{F},\quad \gamma=\arccos\frac{Z}{F}
\end{aligned}
\right\} \tag{1-3}
$$

式（1-3）表明，在正交坐标系中，力矢量在某轴上的分量的大小等于该力在该轴上投影的绝对值，即

$$
F_x=|X|,\quad F_y=|Y|,\quad F_z=|Z|
$$

应当指出，上述结论在非正交坐标系中不成立。以平面情况为例（图1-9），设有一非正交的坐标系Oxy，力F沿Ox，Oy轴的分量大小是OB和OC，而对应投影的大小是OD和OE，显然它们是不相同的。

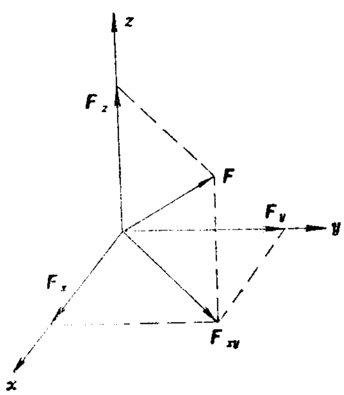

图 1-8

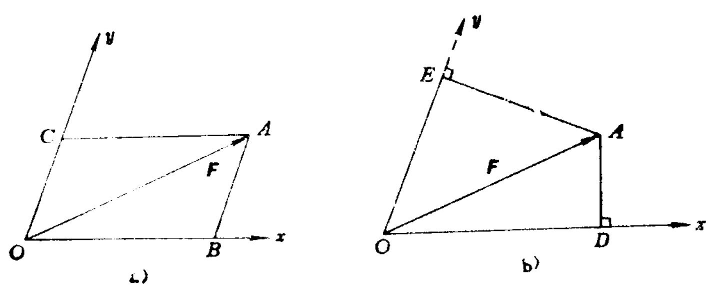

图 1-9

第四节 力对点之矩与力对轴之矩及其关系

力矩是度量力对物体的转动效应的物理量。在物理中，我们已经知道力矩等于力的大小与力臂的乘积。在空间力系的情形下，我们须建立如下力对点之矩的抽象概念。

设O点为空间的任意确定点，自O点至力$\boldsymbol{F}$的作用点A引矢径$\boldsymbol{r}$(图1-10)，则$\boldsymbol{r}$和$\boldsymbol{F}$的矢积(叉积)称为力$\boldsymbol{F}$对O点之矩，记作$\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F})$，它是一矢量，$O$点称为矩心。即

$$\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F})=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} \qquad (1\text{-}4)$$

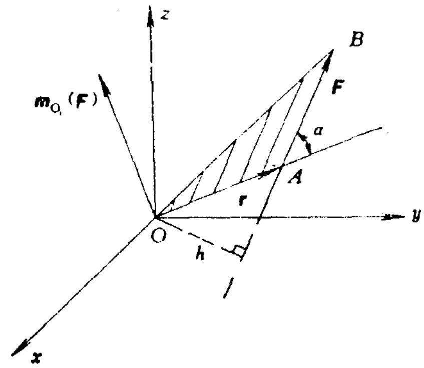

图 1-10

在不致引起混淆的前提下，$\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F})$ 也可简记作$\boldsymbol{m}_O$。力矩矢量$\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F})$的模(大小)为

$$|\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F})|=|\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}|=Fr\sin a=Fh$$

即其大小等于力的大小和力臂的乘积，也等于三角形OAB面积的2倍。矢量$\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F})$的方向即$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$的方向，由右手定则确定。习惯上规定把力矩矢量$m_O$的起点画在矩心$O$处。由于$\boldsymbol{m}_O$与矩心$O$的位置有关，因此力矩是一个定位矢量。也可将大小、方向和矩心看作是力矩的三要素。根据以上定义，当力$\boldsymbol{F}$沿其作用线滑动时，对矩心O点之矩$\boldsymbol{m}_O$不变。可以证明：矩心相同的两个力矩矢量可按平行四边形法则合成。

将$\boldsymbol{r}$和$\boldsymbol{F}$分别用各自坐标轴上的投影表示，即

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{F}=X\boldsymbol{i}+Y\boldsymbol{j}+Z\boldsymbol{k}$$

式中 x、y、z即为力$\boldsymbol{F}$作用点A的坐标。以m_{Ox}、m_{Oy}、m_{Oz}分别表示力矩矢$\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F})$在$x$、$y$、$z$轴上的投影，则根据矢积的运算规则，可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F})&=m_{Ox}\boldsymbol{i}+m_{Oy}\boldsymbol{j}+m_{Oz}\boldsymbol{k}\\&=(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})\times(X\boldsymbol{i}+Y\boldsymbol{j}+Z\boldsymbol{k})\\&=(yZ-zY)\boldsymbol{i}+(yX-xZ)\boldsymbol{j}+(xY-yX)\boldsymbol{k}\\&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\x&y&z\\X&Y&Z\end{vmatrix}\end{aligned} \qquad (1\text{-}5)$$

于是

$$\left.\begin{aligned}m_{Ox}&=yZ-zY\\m_{Oy}&=zX-xZ\\m_{Oz}&=xY-yX\end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}6)$$

在平面问题里，力矩可视为一代数量，规定力使物体绕矩心逆时针方向转动的力矩为正值，反之为负值。

力矩在下列两种情况下等于零：①力大小等于零；②力的作用线通过矩心，即力臂等于零。

力矩的量纲是〔力〕·〔长度〕，在法定计量单位(国际单位制)中用牛顿·米(N·m)或千牛·米(kN·m)为单位。