内 容 简 介

本书旨在重建应用力学的教学、研究体系.

哈密顿经典分析力学是力学中最根本的体系,也是统计力学、电动力学和量子力学等的基础.以往在应用力学中体现不够.应用力学应自觉地、系统地运用对偶变量体系于其各学科分支.根据结构力学与控制理论模拟关系,将对偶变量理论体系引入弹性力学,改变了以往弹性力学半逆法凑合求解的传统.运用对偶体系亦使振动理论、波的传播和控制论得到重要推进.

本书亦特别强调算法,一套精细积分算法和辛本征问题算法是本书的另一特色.

本书适合于应用力学相关专业的高年级大学生、研究生、青年教师及科技人员阅读、参考.

图书在版编目(CIP)数据

应用力学对偶体系/钟万勰著.—北京:科学出版社,2002

ISBN 7-03-009774-2

Ⅰ.应… Ⅱ.钟… Ⅲ.应用力学-对偶-体系 Ⅳ.O39

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 064038 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

中国科学院印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2002年3月第 一 版 开本:850×1168 1/32

2002年3月第一次印刷 印张:18 3/8

印数:1—1 500 字数:482 000

定价:42.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈科印〉)

中行独复，以从道也.

《易经·复卦六四》

序　言

应用力学作为工程的基础学科有力地推动了诸如航空航天、机械、土木、化工、能源、材料等方面的飞跃.值此中国的复兴与崛起之际，面对世界的发展与挑战，应用力学是不可缺少的基本环节之一.从多个专业的基础课程设置来看，力学都占有重要的地位.科技先进国家经过长期积累，应用力学的教材与教育参考资料已形成一个体系，其中 Timoshenco 的一套教材影响很大.我国在学习外国与前苏联力学教育的基础上，力图进行教育改革以使力学课程容易学习、容易理解.然而要想在力学教材与教育体系方面取得突破谈何容易.虽然也取得了许多进展，例如计算力学等方面，但总还是跟在外国后面.

回顾我们自己教过的应用力学，可以发现一些问题.分析力学应当是力学中最基础的部分，但在课程中讲得不多.因为弹性力学、结构力学、流体力学、振动与稳定等课程与其关联不多.控制理论虽然源于力学却已很少在工程力学课程中讲授了.这些课程的理论体系与方法各有一套，学科交错还应加强.例如以往弹性力学著作就与分析力学看不出有多少密切关系.现在世界正在走向灵巧(smart)，而力学如不与控制理论相连接，又如何更为灵巧.

结构力学与控制理论相互模拟的理论表明，它们的数学基础是相同的.这说明力学中多门学科相互间是密切关联的.它们应当有一个**公共的理论体系**，学懂了一门课，以此类推，就容易学懂另一门课.只要换成**对偶变量体系**，就可建立起这个公共的理论体系.这本书的目的也就在于：为了方便应用力学的教学和科研.

经典分析力学是力学最根本的体系.拉格朗日方程、最小作用量原理、哈密顿正则方程、正则变换、哈密顿-雅可比理论等等，是非常优美的理论体系.并且也是统计力学、电动力学、量子力学等

基本学科的基础;而它们反而在应用力学课程中体现得还不够充分.现代控制论所奠基的状态空间法的起点至少也应当回溯到哈密顿正则方程体系.哈密顿正则方程体系也正是对偶变量、对偶方程的体系.线性规划、二次规划以及非线性规划的基本方法也是奠基于对偶变量基础上的.应用数学的教学、科研也在走向对偶体系[35].基于以上的观察,应用力学也应当自觉地、系统地运用对偶变量体系于其各个学科分支.

根据结构力学与控制理论的模拟关系,将对偶变量理论体系引入到弹性力学,就改变了以往弹性力学求解中大量运用半逆凑合法的传统,而导向了**理性**的求解方法.这样就可以求得许多以往半逆凑合法无法导出的结果.对于波的传播、振动理论,引入对偶变量系统,也使问题的求解范围得以扩大,表述更加清楚.现代控制论本来就是奠基于对偶变量体系上的,而将应用力学的方法引入到控制理论,可以使一些基本问题的求解得到重要推进.因此对应用力学的一些学科分支引入对偶变量体系,有利于向不同学科领域渗透,相信这是有发展前途的,对于教改也是有利的.

计算力学已经是力学中最活跃的部分之一,是应用力学通向工程的桥梁,因此本书特别强调算法.**精细积分法**既用于初值问题的积分,又用于两端边值问题的积分.对于动力方程以及控制理论中的黎卡提(Riccati)方程,精细积分都给出了几乎是**计算机上的精确解**.各种**精细积分算法与辛本征问题的算法**,是本书的另一个特点.

本书第一章介绍分析力学初步.哈密顿体系、对偶变量、正则变换、辛体系、勒让德变换、哈密顿-雅可比方程等内容,体现出后面许多进展的根底就在分析力学.

第二章讲述振动理论,其中对于本征值问题作了较多介绍,尤其是陀螺系统辛本征值问题算法,以及本征值计数,还有将正则变换用于非线性振动的方法等.

第三章介绍随机过程初步.应用力学的分析对象,从结构参数、作用外力到仪器量测结果都是有随机性的.考虑随机因素是应

用力学的一个发展方向.

第四章介绍随机振动.这对于结构抗震、运载器振动等非常重要.虽然线性随机振动的基本理论已经建立,但对实际工程应用还有困难,主要是计算问题.我国在此方面作出了突出成果,使得我国的随机振动计算与工程应用走在世界最前列.

第五章讲述单连续坐标下的弹性波传播分析.其方程求解也需要状态向量,并导向对偶空间与辛本征值问题.这方面的内容与控制理论是并行的.

第六章讲述线性控制系统的理论与计算.虽然是控制理论的内容,但在数学与计算方面与力学是并行的.将子结构消元的精细积分法用于黎卡提微分方程的求解,以及用于卡尔曼-布西(Kalman-Bucy)滤波方程的求解是非常有效的.而鲁棒控制 H_∞ 理论的参数 γ_{cr}^2 正相应于结构振动本征值的瑞利(Rayleigh)商等.这些内容表明控制理论与应用力学关系密切,学懂力学的对偶变量体系就比较容易进入控制理论的领域.

第七章介绍弹性力学.在前面几章讲的都是有限维体系,弹性力学则各向都是连续体,是无限维的体系.弹性力学引入了对偶变量辛体系后,分离变量法的理性推导就可实施.对问题的理解更加深入,能求解的课题也扩大了.通过以上内容的介绍,期望能推动对偶变量体系更多地进入应用力学的教学、科研中,做出有中国特色的成果来.

1999 年 5 月,教育部委托上海大学在钱伟长教授主持下召开了一次应用力学教改的会议[158].该会议使我下决心写出这本书,为此花费了大量的精力.这是一套新(辛)体系,覆盖了许多领域,谈不到成熟.然而这些课题都是自己与同事们做过的,这一点还有些底.书中错误、缺点在所难免,希望广大读者予以批评指正.

本书的撰写承蒙许多同事帮助.钱令希、林家浩教授审阅了初稿,姚伟岸副教授给了许多帮助,刘靖华、王承强、苏滨等同学在文字录入、作图等方面做了许多工作.本书是国家自然科学基金重大项目“大规模科学与工程计算”的一部分,同时也包含国家自然科

学基金重点项目“工程力学中的哈密顿体系”以及教育部博士点基金项目的成果.特此对上述同事以及基金的帮助和支持一并表示感谢.

钟万勰

2000.11.2

目　　录

绪　论

数学力学在很长一段历史时期,曾是科学的带头学科.几个世纪的发展百花纷呈,成就辉煌.力学作为工程的基础学科有力地推动了诸如航空航天、机械、土木、化工、能源、材料等方面的飞跃.应用力学也受到了应用的多方面促进.从而发展了许多理论与方法.从应用数学的角度看,只要将其基本微分方程建立起来,就已表达清楚,以下就是如何去求解.实际应用当然要求提供数据,决不能只是停留在理论上.经常见到的情况是,基本方程虽已建立,但其求解却非常困难.以弹性力学来说,其基本方程体系早在19世纪初便已臻完善,然而其求解却费了一个多世纪,还远不能说已臻完善了.

工程需要以及严格求解的困难促使各种应用理论得以发展,如结构力学、薄壁结构、板壳理论、再加上结构动力与稳定性、土力学、流体力学等问题,就构成了工程力学的一个体系.这些力学应用理论虽使方程得以简化,但解析求解仍有很大困难.数学家与力学家通力合作,既丰富了数理方法又发展了工程力学.这个时代的代表著作为R.柯朗与D.希尔伯特的《数学物理方法》[1],以及S.P.铁木辛柯的一套教材《弹性力学》,《弹性稳定理论》,《板与壳学》,《工程振动问题》,《高等材料力学》[2~6]……当然还有其他一批著作.这一整套解析求解体系可谓一整套的经典理论体系,涵盖了当时的高水平成就,也影响并指引着随后的进展.

20世纪50年代后,计算机及高级语言问世,有限元首先在工程力学中出现[7~9],迅速改变了局面.在工程力学体系的理论基础上,以强大的计算能力为后盾,对于用线性方程描述的结构力学、固体力学等很快就发展出通用灵活的有限元数值方法,并系统化为大规模有限元程序系统,成为工程师手中强大的分析工具,确

立了计算力学的地位.有限元法在结构分析中成功的基础上迅即扩展到了力学、工程与科学计算的各个方面,取得了极大的成功.

有限元分析的成功并未减低解析法的意义.原因是:首先,有限元法本是一类数值近似,其理论基础脱离不了解析法;其次,有许多问题,例如断裂力学中的裂尖奇点元、无限域的元等,其本性是解析的;再如壳体问题的边缘效应;复合材料的自由边界及其边缘效应分析等,带有局部效应的课题,采用有限元数值计算有刚性问题,因而解析法仍有很大的兴趣,一套精细积分算法就是解析法在数值方法上的映射.再说,边界元分析也要用到解析解等.

以铁木辛柯的《弹性力学》来看,其求解占了大半部篇幅,而方法则以半逆法为主.然而半逆法事实上是某种凑合解法,它依赖于具体问题而缺乏一般性;半逆法往往只能找到某些解而不能证明已找到其全部解.使读者感到难于措手之点是怎么凑合才能使手中问题得以求解呢?

采用半逆法的原因在于方程组的复杂性.传统偏微分方程组求解总是用各种方法对未知函数予以消元,得到一个高阶偏微分方程再对一个未知函数来求解.然而由于方程太复杂,偏微分方程的有效解法,即分离变量法及本征函数展开等却无法实施.

至此就有一疑问,非要采用这种传统的消元过程不可吗?事实上,这种传统方法论不是惟一的,**对偶理论、状态空间**就是其回答.

在分析力学中,在拉格朗日方程之后,哈密顿提出了其正则方程体系[10~12],这就是状态空间法的开始.常微分方程组的基本理论也是奠基于一阶微分的方程组的.但是在以往自动控制的经典理论中,采用的也是尽量消元而成为单输入-单输出的高阶常微分方程的表述.控制论在计算技术的冲击下,出现了**现代控制论**[13~15].现代控制论并不只是在原有经典控制论的理论体系上加以延伸而已,而是使控制论的基本理论体系也发生了根本性的更迭:采用**状态空间的描述**,达到了新的境界.应用力学可由此汲取到其成功经验.

控制论既已按其自身的发展而做出了体系换代，粗略想来在理论体系上离开应用力学更远了.然而情况并非如此，现代控制论的数学问题与结构力学的某类问题是一一对应地**互相模拟**的[16~18]，本书正是在这种模拟关系基础上写成的.从数学角度看，模拟关系是建筑在**哈密顿体系**理论基础上的.既然控制论以状态空间法为基础发展出整套新的理论体系，则应用力学也理应有对偶变量状态空间法应用的前景.

从弹性力学的求解体系来看，以铁木辛柯的《弹性力学》为代表，历来的求解方法都是在一类变量的范围之内进行的.从数学的角度来看一类变量求解属拉格朗日体系的方法，因此必然导致高阶偏微分方程，以至于分离变量等有效的方法未能对此实施，结果是半逆法求解这个环节长期未能突破.然而当转变方法论，将原变量与对偶变量组成的状态空间引入弹性力学，弹性柱体的圣维南问题就可导出新的一套基本方程.于是分离变量法就可顺利实施了.过去一套半逆法的解，在状态空间中都可用直接法求解出来，而过去因端部条件方面的困难，只能用圣维南原理予以覆盖的一大批解，现在也可以予以求解了[19].直接法通过理性的推导，逐步进行下去可以使读者便于理解.

当代科技的信息化发展，体现在智能化材料、智能化结构、智能化系统、精确制导武器……充分表现出控制、遥感的多方渗透.结构的控制正日益受到关注[20,21].在工程力学教学中不应忽视这种发展趋势.美国已感到结构与控制工程师在设计中互相分离，因此不利于整体的合理设计，正在呼唤“控制-结构整体设计”.当前这本书力图将力学的多个方面与控制论加以汇合，**采用一个统一的理论体系加以阐述**，使读者从理论与方法上对控制与力学看清楚其内在联系.这对于培养新一代工程师是很有利的.

从拉格朗日体系向哈密顿体系的过渡，其意义还在于**从传统的欧几里得型几何形态进入到了辛的几何形态之中**，突破了传统观念，从而使对偶的混合变量进入到应用力学的广大领域.书中给出了振动、波传播、弹性力学，以及多变量单连续坐标弹性体系求

解体系，再讲述最优控制的 LQG 与 H_∞ 理论及其精细求解等.采用的是**同一套理论体系**，只要读懂一个方面，就可方便地理解其他方面.这对于教学也有很大好处.面对课时的限制，而欲使学生尽量掌握现代的科技发展，一套横贯的方法论是很有利的.

应用力学求解是数学物理方法很重要的一个方面.从柯朗-希尔伯特的《数学物理方法》来看，其背景也是以一类变量的偏微分方程与变分法、对称矩阵、对称核积分方程、自伴算子的本征问题为其主线的.换句话说，其体系也是处于拉格朗日框架中的，而其几何形态则为欧几里得型的(其度量有如泛函分析那样，有“正定”、“对称”、“三角形不等式”所规定).它也面临着体系更迭的前景，但这已不是本书的论题了.

本书的宗旨是将工程力学多个方面与控制理论**用统一的一套方法论**加以表述，以期扩大领域、加强理解，以便用于教学参考.但书中也只能选择某些专题讲述.这是对工程力学教改的一个大胆尝试，抛砖引玉，不妥之处还望批评指正.

“科学计算已经同理论与实验共同构成当代科学研究的三大支柱”[22].说明了只是从理论上对问题加以理解是不够的，重要的是还要进一步改造世界，不进行科学计算得出数值结果是不行的.数据是工程师的依据.因此在本书中特别强调算法，尤其是对于微分方程的数值求解.**精细积分算法**不论对于时间历程的发展性方程，而且对于两端边值问题及派生出来的黎卡提(Riccati)微分方程，都可以求得在计算机上的“精确解”.这套精细积分法完全不像传统的数值积分法，全都是有限差分法近似，这容易偏离真实解.让读者及早掌握一些有特色的有效算法对于将来的发展也是有利的.由于数值计算的重要性，尤其是当系统描述采用状态空间法时，微分方程组推导成为一阶微商后，如何对一阶微分方程组进行数值积分，尽可能精细的计算，已经成为一个基本环节.为了以后讲述方便，这里先将常微分方程的精细积分做一初步介绍.

精细积分法[18,23]宜于处理一阶常微分方程组.其实常微分方程组的理论也是以一阶方程为其标准型的.状态空间法哈密顿体

系都将方程组化归一阶.常微分方程组的数值积分可以分为如下两类问题:

1）初值问题积分:动力学问题,发展型方程常需作初值给定条件下的积分;

2）两点边值问题的积分:对弹性力学、结构力学、波导、控制、滤波问题等有广泛应用.这里先介绍常系数常微分方程组初值问题的精细积分.

设有微分方程组的矩阵-向量表达为

$$\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{f}, \quad \boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{v}_0 = \text{已知} \tag{0.0.1}$$

式中$(\cdot)$代表对时间 t 的微商,$\boldsymbol{v}(t)$是待求的 $\boldsymbol{n}$ 维向量函数,$\boldsymbol{A}$ 为$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}$ 给定常矩阵,$\boldsymbol{f}(t)$是给定外力 $\boldsymbol{n}$ 维向量函数.

0.1 齐次方程与指数矩阵的算法

按常微分方程求解理论,应当首先求解其齐次方程

$$\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v} \tag{0.1.1}$$

因为 $\boldsymbol{A}$ 是定常矩阵,其通解可写成为

$$\boldsymbol{v} = \exp(\boldsymbol{A}t)\cdot\boldsymbol{v}_0 \tag{0.1.2}$$

这里出现了矩阵的指数函数,其意义与普通的表达一样,即

$$\exp(\boldsymbol{A}t) = \boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{A}t + \frac{(\boldsymbol{A}t)^2}{2} + \frac{(\boldsymbol{A}t)^3}{3!} + \cdots \tag{0.1.3}$$

现在要在数值上计算出来,尽可能的精确.数值积分总得要有一个时间步长,记为 η.于是一系列等步长的时刻为

$$t_0 = 0, \quad t_1 = \eta, \cdots, \quad t_k = k\eta, \cdots \tag{0.1.4}$$

于是有

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}(\eta) = \boldsymbol{T}\boldsymbol{v}_0, \quad \boldsymbol{T} = \exp(\boldsymbol{A}\eta) \tag{0.1.5}$$

有了矩阵 $\boldsymbol{T}$,逐步积分公式就成为以下的递推:

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{T}\boldsymbol{v}_0, \quad \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{T}\boldsymbol{v}_1, \cdots, \quad \boldsymbol{v}_{k+1} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{v}_k, \cdots \tag{0.1.6}$$

一系列的矩阵-向量乘法.于是问题归结到了(0.1.5)式矩阵 $\boldsymbol{T}$ 的数值计算,要求尽可能精确.指数矩阵的精细计算有两个要点:1)

运用指数函数的加法定理,即运用 2^N 类的算法[24]; 2)将注意力放在增量上,而不是其全量.指数矩阵函数的加法定理给出

$$\exp(\boldsymbol{A}\eta) \equiv [\exp(\boldsymbol{A}\eta/m)]^m \tag{0.1.7}$$

其中 m 为任意正整数,当前可选用

$$m = 2^N,\text{例如选 } N = 20,\text{则 } m = 1048576 \tag{0.1.8}$$

由于 η 本来是不大的时间区段,则 $\tau = \eta/m$ 将是非常小的一个时间区段了.因此对于 τ 的区段,有

$$\exp(\boldsymbol{A}\tau) \approx \boldsymbol{I}_n + (\boldsymbol{A}\tau) + \frac{(\boldsymbol{A}\tau)^2}{2} + \frac{(\boldsymbol{A}\tau)^3}{3!} + \frac{(\boldsymbol{A}\tau)^4}{4!} \tag{0.1.9}$$

由于 τ 很小,幂级数的 5 项展开式应已足够.此时指数矩阵 $\boldsymbol{T}$ 与单位阵 $\boldsymbol{I}_n$ 相差不远,因此写为

$$\begin{aligned} &\exp(\boldsymbol{A}\tau) \approx \boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{T}_a \\ &\boldsymbol{T}_a = (\boldsymbol{A}\tau) + (\boldsymbol{A}\tau)^2[\boldsymbol{I}_n + (\boldsymbol{A}\tau)/3 + (\boldsymbol{A}\tau)^2/12]/2 \end{aligned} \tag{0.1.10}$$

其中 $\boldsymbol{T}_a$ 阵是一个小量的矩阵.

在计算中至关重要的一点是指数矩阵的存储只能是(0.1.10)式中的 $\boldsymbol{T}_a$,而不是$(\boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{T}_a)$.因为 $\boldsymbol{T}_a$ 很小,当它与单位阵 $\boldsymbol{I}_n$ 相加时,就会成为其尾数,在计算机的舍入操作中,其精度将丧失殆尽. $\boldsymbol{T}_a$ 是增量.这就是以上所说的第二个要点.

为了计算 $\boldsymbol{T}$ 阵,应先将(0.1.7)式作分解

$$\boldsymbol{T} = (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{T}_a)^{2^N} = (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{T}_a)^{2^{(N-1)}} \times (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{T}_a)^{2^{(N-1)}} \tag{0.1.11}$$

这种分解一直做下去,共 N 次.其次应注意,对任意矩阵 $\boldsymbol{T}_b, \boldsymbol{T}_c$ 有

$$(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{T}_b) \times (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{T}_c) \equiv \boldsymbol{I} + \boldsymbol{T}_b + \boldsymbol{T}_c + \boldsymbol{T}_b \times \boldsymbol{T}_c \tag{0.1.12}$$

当 $\boldsymbol{T}_b, \boldsymbol{T}_c$ 小时,不应加上 $\boldsymbol{I}$ 后再执行乘法.将 $\boldsymbol{T}_b, \boldsymbol{T}_c$ 都看成为$\boldsymbol{T}_a$,因此(0.1.11)式的 N 次乘法在计算机中相当于以下语句: