

2003年 3+X

全国教育先进省市 **高考**

模拟试卷与解题指导

北京市海淀区高级教师试题研究组 编

数学

语文

数学

英语

物理

化学

生物

历史

地理

政治

文科综合

理科综合

文理综合

 **北京理工大学出版社**
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

全国教育先进省市 高考模拟试卷与解题指导

数 学

北京市海淀区高级教师试题研究组 编

 **北京理工大学出版社**
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

版权专有 侵权必究

图书在版编目(CIP)数据

全国教育先进省市高考模拟试卷与解题指导:数学/北京市海淀区高级教师试题研究组编. —5版. —北京:北京理工大学出版社, 2002.9

ISBN 7-81045-469-2

I. 全… II. 北… III. 数学课—高中—试卷—升学参考资料
IV. G632.479

中国版本图书馆CIP数据核字(98)第18937号

出版发行 北京理工大学出版社
社 址 北京市海淀区中关村南大街5号
邮 编 100081
电 话 (010)68914775(办公室) 68912824(发行部)
网 址 <http://www.bitpress.com.cn>
电子邮箱 cniefede@bitpress.com.cn
经 销 全国各地新华书店
印 刷 北京房山先锋印刷厂
开 本 787毫米、1092毫米 1/8
印 张 6.75
字 数 206千字
版 次 2002年9月第5版 2002年9月第8次印刷
定 价 8.00元

图书出现印装质量问题,本社负责调换



出版前言

众所周知,在高考总复习阶段,考生迫切需要一套既能夯实基础,以不变应万变;又能在基础上有所拔高,掌握解题技巧并提高应试能力;同时还能与高考新形势、新变化、新理论保持同步的参考书籍。为此,我们编写了这套《全国教育先进省市高考模拟试卷与解题指导》丛书(12本)。该丛书有如下特点:

1. **具有极强的权威性和前瞻性。**本套丛书中的高考模拟试卷精选于北京、江苏、上海、广东、湖北等全国教育先进的省市,其势必体现了最新的高考动态。

2. **具有极强的针对性和极高的参考价值。**本丛书中的高考模拟试卷都已经在各学校学生中试用过,而且复习效果良好,经受住了实践的检验。

3. **具有极高的可读性和实用性。**由于我们了解到大多数考生都特别希望有一本不但有好考题而且还要有好题解的复习参考书,所以,我们就聘请了知名中学的、具有指导学生进行高考复习丰富经验的特级优秀教师为考卷配上了题解,旨在以题为载体,以题引路,借题发挥,激活考生的思维,打开他们的思路,点拨解法,培养他们的能力,提高他们的整体素质。

4. **门类齐全,适应性强。**本套丛书分为语文、数学、英语、物理、化学、生物、政治、历史、地理、文科综合、理科综合和文理综合等共12分册。数学分册由赫秀辉、杜荣贞老师做出题解。无论考生所在省市实行什么样的高考制度,本套书总能满足他的需要,且在很大程度上提高考生的应试能力。

5. **具有双重使用价值。**我们在编排此套丛书时想做到既有利于考生自测,又方便于教师上课测试学生以达到摸底目的之用,为此,我们将本套丛书的每套题都控制在4页、8页或12页,以便教师随时都可以撕下一套题来测试学生。这样,一方面教师可以了解学生复习掌握知识的情况,以便对症下药,提高教学质量;另一方面,考生也可以自测,以便专攻自己的弱点,提高复习效率。

需要说明的是,为照顾广大考生的实际购买能力,使他们能在相同价位、相同篇幅内能汲取到比其他书籍更多的营养,本套丛书采用了小五号字排版,如有阅读上的不便,请谅解!

另外,由于高考英语考听力,我们还为英语分册配上了由地道外教朗读的,语音清晰、纯正,语速适中的英语磁带,以供考生训练或考前热身之用。虽然我们在编写本丛书过程中本着对考生认真负责的态度,点点把关,力求能够帮助考生提高应试能力及解题技巧、方法,但书中也难免有疏漏之处,恳请人家批评、指正,并敬请原谅!

预祝大家取得好成绩,金榜题名!

目 录

第一部分 试卷精粹	(1)	
		[模拟试卷] [答案与解析]
北京市	(1)	(45)
上海市	(5)	(49)
天津市	(9)	(54)
广州市	(13)	(58)
福建省	(17)	(63)
南京市	(21)	(69)
苏锡常镇四市	(25)	(73)
杭州市	(29)	(78)
济南市	(33)	(82)
成都市	(37)	(86)
武汉市	(41)	(91)
第二部分 参考答案与解析	(45)	
附：2002 年普通高等学校招生全国统一考试数学试卷	(96)	
2002 年普通高等学校招生全国统一考试数学试卷参考答案	(99)	

第一部分 试卷精粹

北京市 模拟试卷

参考公式:

三角函数的积化和差公式

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$$

正棱台、圆台的侧面积公式

$$S_{\text{台侧}} = \frac{1}{2} (c' + c) l$$

其中 c' 、 c 分别表示上、下底面周长, l 表示斜高或母线长

台体的体积公式

$$V_{\text{台体}} = \frac{1}{3} (S' + \sqrt{S'S} + S) h$$

其中 S' 、 S 分别表示上、下底面积, h 表示高

一、选择题:(本大题共 12 个小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。)

1. 设全集 $I = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, 集合 $A = \{1, |a - 5|, 9\}$, $\bar{A} = \{5, 7\}$, 则 a 的值是 ()

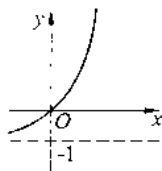
A. 2

B. 8

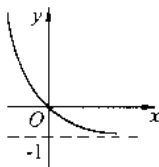
C. -2 或 8

D. 2 或 8

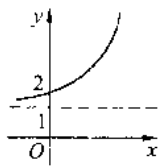
2. 函数 $y = \log_2(x-1)$ 的反函数的图象是 ()



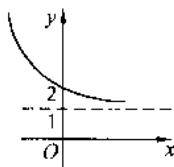
(A)



(B)



(C)



(D)

3. (理)若点 $P(x, y)$ 在曲线 $\begin{cases} x = 3 + 5\cos\theta \\ y = -4 + 5\sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数)上, 则使 $x^2 + y^2$ 取得最大值的点 P 的坐标是 ()

A. (6, -8)

B. (-6, 8)

C. (3, -4)

D. (-3, 4)

(文)若直线 $3x - 4y - 12 = 0$ 与两坐标轴交点为 A 、 B , 则以线段 AB 为直径的圆的方程是 ()

A. $x^2 + y^2 + 4x - 3y = 0$

B. $x^2 + y^2 - 4x - 3y = 0$

C. $x^2 + y^2 + 4x + 3y - 4 = 0$

D. $x^2 + y^2 - 4x - 3y + 8 = 0$

4. $\left(x - \frac{1}{x}\right)^n$ 展开式的第四项等于 7, 则 x 等于 ()

A. -5

B. $-\frac{1}{5}$

C. $\frac{1}{5}$

D. 5

5. (理)下列命题中,使命题 M 是命题 N 成立的充要条件的一组命题是 ()

A. $M: a > b, N: ac^2 > bc^2$

B. $M: a > b, c > d, N: a - d > b - c$

C. $M: a > b > 0, c > d > 0, N: ac > bd$

D. $M: |a - b| = |a| + |b|, N: ab \leq 0$

(文)若 a, b 是任意实数,且 $a > b$,则 ()

- A. $a^2 > b^2$ B. $\left(\frac{1}{2}\right)^a < \left(\frac{1}{2}\right)^b$ C. $\lg(a - b) > 0$ D. $\frac{b}{a} < 1$

6. (理)已知复数 $z = x + yi (x, y \in \mathbb{R}, i = \frac{1}{2})$, 满足 $|z - 1| = x$, 那么 z 在复平面上对应点 (x, y) 的轨迹是 ()

- A. 圆 B. 椭圆 C. 双曲线 D. 抛物线

(文)复数 $\frac{-1 + \sqrt{3}i}{(1 + i)^2}$ 的辐角主值是 ()

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{5}{6}\pi$ C. $\frac{7}{6}\pi$ D. $\frac{11}{6}\pi$

7. 用半径为 48cm 的半圆形铁皮制作上口半径为 8cm, 下口半径为 2cm, 且母线长为 36cm 的漏斗 (不考虑接缝损耗), 则最多可作 ()

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

8. 某科技小组有 6 名同学, 现从中选出 3 人去参观展览, 至少有 1 名女生入选时的不同选法有 16 种, 则小组中的女生数目为 ()

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

9. (理)已知 F_1, F_2 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(10 - a)^2} = 1 (5 < a < 10)$ 的两个焦点, B 是短轴的一个端点, 则 $\triangle F_1BF_2$ 的面积的最大值为 ()

- A. $\frac{100\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{100\sqrt{3}}{9}$ C. $100(3 - 2\sqrt{2})$ D. $\frac{1}{2}a^2$

(文)已知 F_1, F_2 是椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (0 < b < 2)$ 的两个焦点, B 是短轴的一个端点, 则 $\triangle F_1BF_2$ 的面积的最大值为 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

10. $\triangle ABC$ 边上的高线为 AD , $BD = a, CD = b$, 且 $a < b$. 将 $\triangle ABC$ 沿 AD 折成大小为 θ 的二面角 $B - AD - C$. 若 $\cos \theta = \frac{a}{b}$, 则三棱锥 $A - BDC$ 的侧面 $\triangle ABC$ 是 ()

- A. 锐角三角形 B. 钝角三角形
C. 直角三角形 D. 形状与 a, b 的值有关的三角形

11. 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, S_n$ 是前 n 项和. 当 $n \geq 2$ 时, $a_n = 3S_{n-1}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n + 1}{S_{n+1} - 3}$ 的值是 ()

- A. $-\frac{1}{3}$ B. 2 C. 1 D. $-\frac{4}{5}$

12. 对于抛物线 $C: y^2 = 4x$, 我们称满足 $y_0^2 < 4x_0$ 的点 $M(x_0, y_0)$ 在抛物线的内部. 若点 $M(x_0, y_0)$ 在抛物线的内部, 则直线 $l: y_0y = 2(x + x_0)$ 与 C ()

- A. 恰有一个公共点 B. 恰有两个公共点
C. 可能一个公共点也可能两个公共点 D. 没有公共点

二、填空题: (本大题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分. 把答案填在题中横线上.)

13. 如果 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{2}{5}, \tan(\beta - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{4}$, 那么 $\tan(\alpha - \frac{\pi}{4})$ 的值是 _____.

14. 圆锥与圆柱的底面半径都是 r , 高都是 h . 已知它们的侧面积相等, 则 $r:h =$ _____.

15. 双曲线与椭圆 $9x^2 + 25y^2 = 225$ 有相同的焦点又过点 $(3, -1)$, 则双曲线的渐近线方程是 _____.

16. 无穷数列 $\{a_n\}$ 同时满足条件: ① 对于任意自然数 n , 都是 $-2 < a_n < 4$; ② 当 n 为正偶数时, $a_n - 1 < a_{n-1}$ 且 $a_n > a_{n+1}$; ③ 当 $n > 3$ 时, $a_n > 0$. 请写出一个满足条件的数列 $\{a_n\}$ 的通项公式: _____.

三、解答题: (本大题共 6 个小题, 共 74 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

17. (本小题满分 12 分)

(理科作)解不等式: $\sqrt{\log_2 x} - 1 + \frac{1}{2} \log_2 x^3 + 2 > 0$.

(文科作)解不等式: $2\log_2 5 - 3\log_2 x > 1$.

18. (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A, \angle B, \angle C$ 的对边分别为 a, b, c . 若 $\cos^2\left(\frac{\pi}{2} + A\right) + \cos A = \frac{5}{4}$, $b + c = \sqrt{3}a$.

(I) 求 $\cos(B + C)$ 的值;

(II) 设复数 $z = \sin(B + C) - i\cos(B + C)$, 求 $z^2 + \frac{1}{z^2} - 1$ 的值.

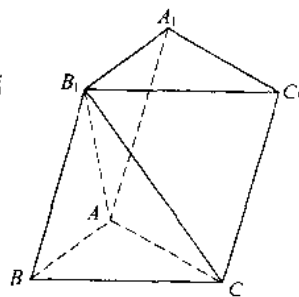
19. (本小题满分 12 分)

如图所示, 已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的各棱长均为 2, 侧棱 B_1B 与底面 ABC 所成的角为 $\frac{\pi}{3}$, 且侧面 ABB_1A_1 垂直于底面 ABC .

(I) 证明 $AB \perp CB_1$;

(II) 求三棱锥 B_1-ABC 的体积;

(III) 求二面角 $C-AB_1-B$ 的大小 (文科求其正切值).



20. (本小题满分 12 分)

某地区预计从明年初开始的前 x 个月内, 对某种商品的需求总量 $f(x)$ (万件) 与月份数 x 的近似关系

$$\text{为 } f(x) = \frac{1}{150} x(x+1)(35-2x) \quad (x \in \mathbb{N}, x \leq 12)$$

(I) 写出明年第 x 个月的需求量 $g(x)$ (万件) 与月份数 x 的函数关系;

(II) 求出哪个月份的需求量超过 1.4 万件, 并求出这个月的需求量.

21. (本小题满分 12 分)

设二次函数 $f(x) = x^2 + bx + c$ ($b, c \in \mathbb{R}$), 已知不论 α, β 为何实数, 恒有 $f(\sin \alpha) \geq 0$ 和 $f(2 + \alpha \cos \beta) \leq 0$

(I) 求证: $b + c = -1$;

(II) 求证: $c \geq 3$;

(III) 若函数 $f(\sin \alpha)$ 的最大值为 8, 求 b, c 值

22. (本小题满分 14 分)

(文科学生只作(I)(II)小题)

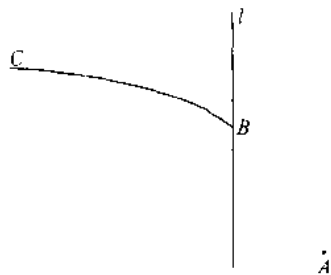
如图所示, BC 是一条曲线段, 点 B 在直线 l 上, 点 C 到 l 的距离等于 5, l 外一点 A 到 l 的距离为 2.

对于曲线段 BC 上的任意一点 P , 总满足 $|PA| = d + 3$, 其中 d 是点 P 到直线 l 的距离

(I) 建立适当的坐标系, 写出 l 的方程及点 A 的坐标, 并求出点 B 、点 C 的坐标;

(II) 求出曲线段 BC 的方程;

(III) 设另有一定点 D , $AD \perp l$, A, D 位于 l 两侧, 且点 D 到 l 的距离为 a ($a > 0$), 求曲线段 BC 上的点到点 D 的最近距离



上海市 模拟试卷

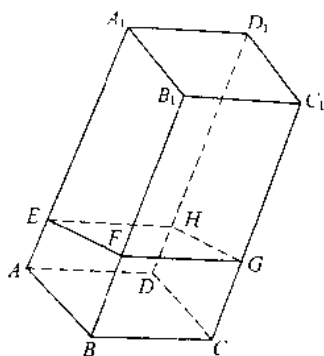
(120 分钟完卷, 满分 150 分)

注意: 本卷 12、16、18 题标有(理)的, 报考理科的学生做; 标有(文)的, 报考文科的学生做。

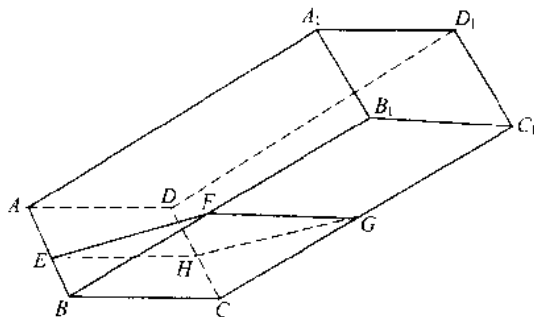
一、填空题: (本题满分 48 分, 每小题 4 分)

1. 函数 $y = \lg(x+2)$ 的值域是 _____.
2. 对集合 A, B , 定义 $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$, 若 $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{2, 3, 5\}$, 则 $A \cap B =$ _____.
3. 若自然数 M 满足等式 $M = C_n^0 + C_n^1 2^1 + C_n^2 2^2 + \dots + C_n^n 2^n$ ($n \in \mathbb{N}$), 则 M 的个位数是 _____.
4. 某债券市场发行两种债券, A 种面值为 100 元, 一年到期本息和为 103 元, B 种面值也为 100 元, 但买入价为 97 元, 一年到期本息和为 100 元, 作为购买者, 分析这两种债券的收益, 则有 A _____ B (填 $>$, $=$, $<$).
5. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{2n+1}\right)^n$ 是否存在, 若存在, 求出极限值; 若不存在, 请适当改动(只能改一个数字)使其极限值存在, 并求出极限值 _____.
6. 若 $\triangle ABC$ 三边 a, b, c 成等比数列, 则 b 边所对角 B 的取值范围是 _____.
7. 若函数 $y = \frac{x}{x-a}$ 的反函数图象的对称中心是 $P(1, 3)$, 则实数 a 的值为 _____.
8. 若 $f(x)$ 是偶函数, 且在 $(-\infty, 0)$ 上是增函数, 又 $f(-3) = 0$, 则 $\frac{f(x)}{x} < 0$ 的解集是 _____ (用区间表示).
9. 如图(a)在透明塑料制成的长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 密封容器内有一些水, 固定容器底面一边 BC 于地面上, 再将容器倾斜, 随倾斜度不同有下列四个命题:
 - ① 水的部分始终呈棱柱形
 - ② 水面四边形 $EFGH$ 的面积始终不变
 - ③ 棱 A_1D_1 始终与水面 $EFGH$ 平行
 - ④ 当容器倾斜到如图(b)的位置时, $BE \cdot BF$ 是定值, 其中所有正确命题的序号是 _____.

(把你认为正确的序号都填上)



(a)



(b)

10. (理) 以直线 $y = x - 2$ 与 x 轴的交点为极点, 直线向上方向的射线为极轴, 单位与直角坐标系单位相同建立极坐标系, 若点 p 的极坐标为 $\left(4, \frac{\pi}{12}\right)$, 则点 p 在原直角坐标系中的坐标为 _____.
- (文) 若组成某工程的各工序, 它们的紧前工序与工时数由下表表示:

工序	a	b	c	d	e	f	g
紧前工序	/	/	a	c	b, c	d	e, f
工时数(天)	5	7	1	4	3	2	3

则该工程的总工时数为 _____ 天。

11. “渐升数”是指每个数字比其左边的数字大的正整数(如 24789), 在三位“渐升数”中, 任取一数, 则该数比 56 大的概率是 _____。(结果用数值表示)

12. 若数列 $\{a_n\} (n \in \mathbb{N})$ 是等差数列, 则有数列 $b_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} (n \in \mathbb{N})$ 也为等差数列, 类比上述性质, 相应地, 若数列 $\{c_n\}$ 是等比数列, 且 $c_n > 0, (n \in \mathbb{N})$, 则有 $d_n =$ _____, $(n \in \mathbb{N})$ 也是等比数列

二、选择题:(本题满分 16 分, 每小题 4 分)

13. 对函数 $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 作 $x = h(t)$ 的代换, 则总不改变函数 $f(x)$ 值域的代换是 ()

- A. $h(t) = 10^t$ B. $h(t) = t^2$ C. $h(t) = \sin t$ D. $h(t) = \log_2 t$

14. 搬场公司想把长 2.5m, 宽 0.5m, 高 2m 的长方体家具从正方形窗口穿过, 若正方形窗口的边长为 a , 则 a 至少是 ()

- A. 1.6m B. 1.8m C. 2.0m D. 2.5m

15. 设 $f(x, y) = 0$ 是平面直角坐标系中一个面积有限的图形 D 的边界的方程, 则 $f(2x, 2y) = 0$ 围成的图形面积是 D 的面积 ()

- A. $\frac{1}{4}$ 倍 B. 1 倍 C. $\frac{1}{2}$ 倍 D. 4 倍

16. (理) 设 $z \in \mathbb{C}$, 且 $|z+2| - |z-2| = 2$, 则 $\arg z$ 的范围是 ()

- A. $[0, \frac{\pi}{3}) \cup (\frac{5\pi}{3}, 2\pi)$ B. $(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) \cup (\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$
C. $[0, \frac{\pi}{4}) \cup (\frac{7\pi}{4}, 2\pi)$ D. $(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}) \cup (\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3})$

(文) “ $a=0$ ”是复数 $Z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$ 为纯虚数的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分又不必要条件

三、解答题:

17. (本题满分 10 分)

抛物线 $y = x^2$ 与过点 $M(0, 1)$ 的直线 l 相交于 A, B 两点, O 为坐标原点, 若直线 OA 与 OB 的斜率之和为 2, 求直线 l 的方程

18. (本题满分 12 分)

(理) 定义: 若对任意 $x_1, x_2 \in (a, b)$

恒有 $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$ 成立, 则称函数 $f(x)$ 在 (a, b) 上为“上凸函数”, 已知“上凸函数”有如下性

质: 对任意的 $x_i \in (a, b) (i = 1, 2, \dots, n)$ 必有 $f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}$ 成立。

(1) 求证: $y = \sin x$ 在 $(0, \pi)$ 内是“上凸函数”(6 分)。

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 求 $\sin A + \sin B + \sin C$ 的最大值(6 分)

(参考公式: $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$)

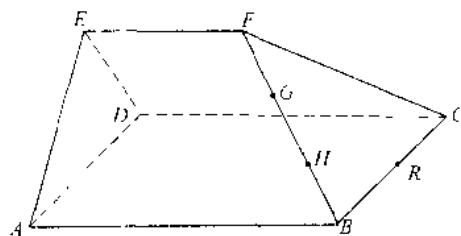
(文)已知函数 $f(x) = 2a \sin x \cos x + 2b \cos^2 x$, $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 6 + \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $f(0) = 8$. 求 a, b 的值及 $f(x)$ 的最大值.

19. (本题满分 14 分)

如图所示的几何体中,底面 $ABCD$ 是边长为 6 的正方形, $\triangle EAD$ 是以 $\angle E$ 为顶角的等腰直角三角形,且垂直底面, $EF \perp$ 平面 EAD , 且 $EF = 3$.

(1)若 G, H 为 FB 边上的三等分点,试建立适当坐标系,并求出 G 点, H 点的坐标. (6 分)

(2)若 R 为 BC 边中点,求证: $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{FB}$, $\overrightarrow{RH} \perp \overrightarrow{FB}$, 并用向量法求二面角 $A - FB - C$ 的大小. (8 分)



20. (本题满分 16 分)

一般情况下,产品进入市场,价格越高,销量越少,某种产品的价格为每吨 p 万元,销售量为 q 吨,可认为 p 与 q 满足关系: $q = 40 - p$ ($10 \leq p \leq 40$)

(1)若该产品在某地市场上由一家公司独家经营,问价格定为多少时,这家公司的收入最高 (5 分)

(2)若该产品由甲、乙两家公司经销,它们的销售量分别记作 $q_{\text{甲}}$ 、 $q_{\text{乙}}$,于是 $p = 40 - (q_{\text{甲}} + q_{\text{乙}})$,若乙公司的销售量为 10 吨,请问甲公司销售价格定为多少时,其收入最高 (5 分)

(3)同样在乙公司销售量为 10 吨的前提下,若甲、乙两公司组成价格联盟,则为了使甲、乙两公司总收入最高,市场定价应为多少? 此举对消费者产生何种影响,说明什么道理? (6 分)

21. (本题满分 16 分)

已知函数 $g(x) = e^x - 1, x \in R$, 函数 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 的图象关于直线 $x = 1$ 对称, 数列 $\{a_n\}$ 中, S_n 为其前 n 项和, 且 $S_n = f(n) (n \in N)$.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式和数列 $\{a_n\}$ 的通项公式. (6 分)

(2) 设 $b_n = 2^{1/(2^n - 1)}$, 记号 $\sum_{i=1}^n t_i$ 表示为 $t_1 + t_2 + \dots + t_n$, 试求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{b_i b_{i+1}}$ 的值. (6 分)

(3) 从 (2) 的数列 $\{b_n\}$ 中取出部分项的倒数按原来的前后顺序组成一个无穷等比数列 $\{c_n\}$, 且满足它的各项和等于 $\frac{1}{15}$, 试求出 $\{c_n\}$ 的通项公式. (4 分)

22. (本题满分 18 分)

设两复数集 $M = \{Z, Z = m + i(4 - m^2), m \in R\}$

$N = \{Z, Z = 2\cos\theta + i(\lambda + 3\sin\theta), \theta \in R\}$

(1) 若 $M \cap N \neq \emptyset$, 求实数 λ 的取值范围. (6 分)

(2) 当实数 λ 在 (1) 中变化时, 进一步讨论集合 $M \cap N$ 的元素个数, 并当 λ 取定值时, 求 $M \cap N$. (10 分)

(3) 本题的几何意义是什么. (2 分)

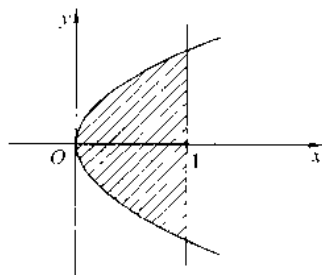
天津市 模拟试卷

(满分 150 分, 考试时间 120 分钟)

第 I 卷 (选择题, 共 60 分)

一、选择题: (本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分) 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

- 满足 $A \cup B = \{a, b\}$ 的集合 A, B 的组数有 ()
A. 4 组 B. 6 组 C. 7 组 D. 9 组
- 等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_1 + a_4 + a_7 = 39$, $a_2 + a_5 + a_8 = 27$, 则前 9 项的和 S_9 等于 ()
A. 66 B. 99 C. 111 D. 297
- 已知复数 $z_1 = -1 + \sqrt{3}i$, 将与 z_1 对应的向量按逆时针方向旋转 α 后, 所得向量对应的复数为 $z_2 = -i$, 则最小正角 α 等于 ()
A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{5\pi}{6}$ C. $\frac{7\pi}{6}$ D. $\frac{11\pi}{6}$
- 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 $\frac{5}{2}$, 则椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的离心率应为 ()
A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- 已知函数 $y = x^3 - 3x$, 则它的单调递增区间是 ()
A. $(-\infty, 0)$ B. $(0, +\infty)$ C. $(-1, 1)$ D. $(-\infty, -1)$ 及 $(1, +\infty)$
- 如图, 由抛物线 $y^2 = x$ 和直线 $x = 1$ 所围成的图形的面积等于 ()
A. 1 B. $\frac{4}{3}$
C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{1}{3}$
- 有 10 件产品, 其中 3 件是次品, 从中任取两件, 若 ξ 表示取到次品的个数, 则 $E\xi$ 等于 ()
A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{8}{15}$
C. $\frac{14}{15}$ D. 1
- 若 $f(x)$ 是奇函数, 且在 $(0, +\infty)$ 内是增函数, 又 $f(-3) = 0$, 则 $x \cdot f(x) < 0$ (第(6)小题图) 的解集是 ()
A. $\{x \mid -3 < x < 0, \text{ 或 } x > 3\}$ B. $\{x \mid x < -3, \text{ 或 } 0 < x < 3\}$
C. $\{x \mid x < -3, \text{ 或 } x > 3\}$ D. $\{x \mid -3 < x < 0, \text{ 或 } 0 < x < 3\}$
- 设 $f(x) = \sin \frac{\pi x}{6}$, $x \in \mathbf{R}$, 则 $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(2002)$ 的值等于 ()
A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{3-2\sqrt{3}}{2}$
- 已知一个四面体的 5 条棱长都等于 2, 则它的体积的最大值为 ()
A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. 1 D. 2
- 若 $0 < a < b$, 且 $a + b = 1$, 则下列各式中, 最大的是 ()
A. -1 B. $\log_2 a + \log_2 b + 1$
C. $\log_2 b$ D. $\log_2 (a^4 + a^2b + ab^2 + b^3)$



(第(6)小题图)

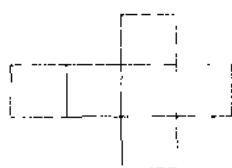
12. 已知 α, β 为锐角, $\sin \alpha = x, \cos \beta = y, \cos(\alpha + \beta) = -\frac{3}{5}$, 则 y 与 x 的函数关系为

- A. $y = -\frac{3}{5}\sqrt{1-x^2} + \frac{4}{5}x \quad \left(\frac{3}{5} < x < 1\right)$ B. $y = -\frac{3}{5}\sqrt{1-x^2} + \frac{4}{5}x \quad (0 < x < 1)$
 C. $y = -\frac{3}{5}\sqrt{1-x^2} + \frac{4}{5}x \quad \left(0 < x < \frac{5}{5}\right)$ D. $y = -\frac{3}{5}\sqrt{1-x^2} + \frac{4}{5}x \quad (0 < x < 1)$

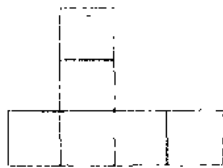
第 II 卷 (非选择题, 共 90 分)

二、填空题: (本大题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分. 请把答案填在题中横线上)

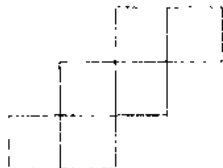
13. 若关于 x 的不等式 $-\frac{1}{2}x + 2 > ax$ 的解集为 $\{x | 0 < x < 2\}$, 则实数 a 的值为 _____.
 14. 从 0, 1, 2, 3, 4, 5 这 6 个数中, 任取 2 个作除法, 可得出不同的正值的个数为 _____ (用数字作答).
 15. 若实数 x, y 满足 $x^2 + y^2 = 2, x + y = 0$, 则 $x + 2y$ 的最大值为 _____.
 16. 如图, 在下列六个图形中, 每个小正方形皆为全等正方形, 那么沿其正方形相邻边剪开, 能够拼成“方体”的至多 _____ (要求: 此题以正确图形的序号都填上)



①



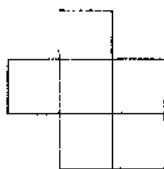
②



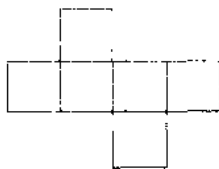
③



④



⑤



⑥

三、解答题: (本大题共 6 小题, 共 74 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程)

17. (本小题满分 10 分)

甲、乙两个篮球运动员, 投篮的命中率分别为 0.7 与 0.8. 如果每人投篮两次,

(I) 求甲投进 2 球且乙投进 1 球的概率;

(II) 若投进 1 个球得 2 分, 未投进得 0 分, 求甲、乙两人得分相等的概率.

18. (本小题满分 12 分)

已知二次函数 $f(x) = a(a+1)x^2 + (2a+1)x + 1, a \in \mathbb{N}^+$.

(I) 求函数 $f(x)$ 的图象与 x 轴相交所截得的弦长;

(II) 若 a 依次取 $1, 2, 3, \dots, n$ 时, 函数 $f(x)$ 的图象与 x 轴相交所截得 n 条弦长分别 $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$, 记 $S_n = l_1 + l_2 + l_3 + \dots + l_n$, 试求 S_n .

19. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = 2ax + \frac{1}{x^2}, x \in (0, 1]$.

(I) 若 $f(x)$ 在 $x \in (0, 1]$ 上是增函数, 求 a 的取值范围;

(II) 求 $f(x)$ 在区间 $(0, 1]$ 的最大值.

20. (本小题满分 12 分)

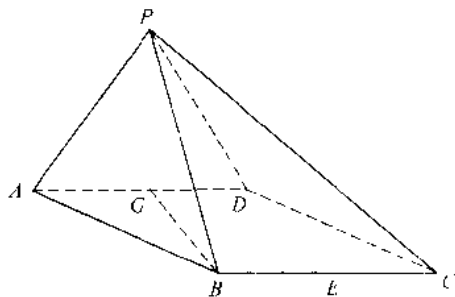
如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是 $\angle DAB = 60^\circ$ 且边长为 a 的菱形. 侧面 PAD 为正三角形, 其所在平面垂直于底面 $ABCD$.

(I) 若 G 为 AD 边的中点, 求证 $BG \perp$ 平面 PAD ;

(II) 求证 $AD \perp PB$;

(III) 求二面角 $A-BC-P$ 的大小;

(IV) 若 E 为 BC 边的中点, 能否在棱 PC 上找到一点 F , 使平面 $DEF \perp$ 平面 $ABCD$, 并证明你的结论.



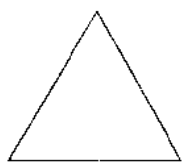
21. (本小题满分 14 分)

一艘太空飞船飞往地球, 第一次观测时, 如图(1)发现一个正三角形的岛屿(边长为 1); 第二次观测时,

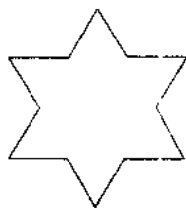
如图(2)发现它每边中央 $\frac{1}{3}$ 处还有一正三角形高脚,形成了六角形高脚;第三次观测时,如图(3)发现原先每一小边的中央 $\frac{1}{3}$ 处又有一向外突出的海岬,把这个过程无限地继续下去,会得到著名的数学模型——柯克岛

(I)把第 $1, 2, 3, \dots, n$ 次观测到的岛的海岸线长记为 $a_1, a_2, \dots, a_n$,试求 a_1, a_2, a_3 的值及 a_n 的表达式;

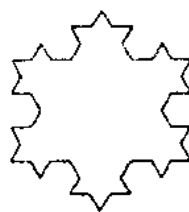
(II)把第 $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ 次观测到的岛的面积记为 $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$,如果我们把数列 $\{b_n\}$ 的极限记作岛的面积,试求这个面积



图(1)



图(2)



图(3)

22. (本小题满分14分)

椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一个顶点为 $A(0, b)$, B, C 是椭圆上的另外两点, 如果 $\angle BAC = 90^\circ$, 且 $AB = AC$, 试确定 $\triangle ABC$ 的个数, 并证明你的结论