

# 热应力与热疲劳

(基础理论与设计应用)

[日] 平 修二 主编

郭廷玮 李安定译

张质贤校

国防工业出版社

# 热应力与热疲劳

(基础理论与设计应用)

[日] 平 修二 主编

郭廷玮 李安定 译

张质贤 校



国防工业出版社

## 内 容 简 介

本书是关于热疲劳的专著。书中介绍了热应力的理论和分析方法，着重阐述了热疲劳和高温低循环疲劳的试验方法、疲劳强度、多轴疲劳、热疲劳中的组织变化、蠕变与高温疲劳的相互关系，并结合实例广泛地涉及有关理论的应用等问题。

本书适于高温结构设计、施工等工程技术人员阅读，也可供大专院校有关专业高年级学生和研究生参考之用。

熱応力 と 熱疲労  
——基礎理論と設計への応用——  
平 修二  
日刊工業新聞社 1974

热应力与热疲劳  
(基础理论与设计应用)  
〔日〕平修二 主编  
郭廷玮 李安定 译  
张质贤 校

国防工业出版社出版  
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售  
国防工业出版社印刷厂印装

850×1168<sup>1</sup>/<sub>32</sub> 印张10<sup>3</sup>/<sub>8</sub> 270千字  
1984年11月第一版 1984年11月第一次印刷 印数：0,001—4,750册  
统一书号：15034·2697 定价：1.30元

## 译 序

这是一本关于热疲劳的专著。原书编者平 修二（日本材料学会高温强度委员会委员长）等从事高温强度研究多年，发表了许多有关热疲劳和高温低循环疲劳的研究报告，在世界上享有很高的声誉。本书就是根据日本材料学会高温强度委员会有关热应力和热疲劳的研究成果，广泛搜集了其他国家在这一领域中的成果和资料编成的，是一本有关热应力和热疲劳的优秀著作。

本书从介绍热应力基础、分析方法入手，着重阐明了热疲劳和高温低循环疲劳的试验研究方法、疲劳强度、多维疲劳、热疲劳中的组织变化及龟裂，蠕变与高温疲劳的关系以及热疲劳寿命的推断方法等，并列举了一些国防工业及民用工业产品中的实例，介绍了上述理论的应用和防止疲劳损伤的措施，可供从事热应力与热疲劳理论研究人员，从事有关反应堆结构、各种高速飞行器结构以及高温高压化学反应装置等高温结构设计的工程技术人员，大专院校有关专业高年级学生和研究生参考。

由于译者水平有限，译文中难免有疏漏之处，谨请读者批评指正。

译 者

## 原 序

当设计制造高温高压下使用的动力机械或化学反应装置时，必须具备有关金属材料高温强度的广泛知识，这是不言而喻的。作为高温强度问题，除了静态拉伸、蠕变及蠕变断裂、松弛以外，还包括热疲劳或高温低循环疲劳等。编者就这类问题，从综合的观点进行研究是从二十多年以前开始的，当时在欧美各国已是日常研究的课题，在日本经历了基础研究后，目前已进入了应用于机械设计和制造的阶段。面对这样的现状，大有隔世之感。

然而，遗憾的是，在各种高温强度问题上，工程技术人员对于热疲劳的理解尚未达到成熟的地步。为此，日本材料学会高温强度委员会近年来重点地提出了热应力和热疲劳这一课题。当分析在高温下机械设备的破损原因时，常把不能用拉伸强度或蠕变强度说明的问题都说成是热疲劳，这正说明热疲劳现象是复杂的。为弄清这样的热疲劳问题，除了具备在构件中循环热应力的基本知识外，还需要把热疲劳与高温低循环疲劳或蠕变等联系起来综合地加以理解。

本书，依据日本材料学会高温强度委员会有关热应力和热疲劳方面的研究成果，由以委员为主的各界专家分担执笔编成。就内容而言，本书广泛地涉及基础理论和设计中的应用，首先考虑供设计或施工现场的工程技术人员需要，同时考虑也能作为大学高年级和研究生的教材使用。

最近，热应力和热疲劳方面的研究和技术的进展是惊人的，当然本书的内容在数年内也不能不加以改编，而作为日本现阶段成果的介绍，如能对各界起一点作用，编者也感到欣慰。

本书中，引用了国内外各位朋友的宝贵的研究结果和资料，

这里表示由衷的谢意!

iv

另外，本书的完成，除了由于各位执笔者的努力之外，同时受到日刊工业新闻社大阪分社出版部的大力协助，借此机会一并表示谢意。

平 修二

2006.03/01

## 目 录

第一章 热应力与热疲劳概论 .....	1
第二章 热应力基础 .....	5
§ 2.1 热传导 .....	5
§ 2.1.1 基本微分方程 .....	5
§ 2.1.2 热传导问题的例子 .....	6
§ 2.1.3 数值计算法 .....	9
§ 2.1.4 实验法 .....	11
§ 2.2 弹性热应力 .....	12
§ 2.2.1 基本方程 .....	12
§ 2.2.2 弹性热应力问题的例子 .....	23
§ 2.3 弹塑性热应力 .....	30
§ 2.3.1 屈服条件和屈服函数 .....	30
§ 2.3.2 流动法则和应力-应变关系 .....	32
§ 2.3.3 弹塑性热应力问题的例子 .....	37
第三章 热应力的分析方法 .....	48
§ 3.1 数值计算法 .....	48
§ 3.1.1 差分法 .....	48
§ 3.1.2 有限元素法 .....	66
§ 3.2 实验分析法 .....	84
§ 3.2.1 应变仪法 .....	84
§ 3.2.2 热光弹性法 .....	86
§ 3.2.3 莫尔法 .....	89
§ 3.2.4 其他方法 .....	89
第四章 热疲劳和高温低循环疲劳试验方法 .....	93
§ 4.1 热疲劳试验机概述 .....	93
§ 4.2 试验数据的整理方法 .....	96
§ 4.3 试验条件的设定 .....	98
§ 4.3.1 温度分布与应变不均及隆起的关系 .....	99
§ 4.3.2 加热和冷却方法与温度分布 .....	100
§ 4.3.3 逃逸伸缩 .....	102

§ 4.4 应变约束系数 .....	105
§ 4.4.1 应变范围与约束系数 .....	105
§ 4.4.2 约束系统的控制 .....	107
§ 4.5 试件形状及其他控制事项 .....	109
§ 4.5.1 试件形状与预先处理 .....	109
§ 4.5.2 其他控制事项 .....	110
§ 4.6 高温低循环疲劳试验 .....	111
§ 4.6.1 试验条件的设定 .....	112
<b>第五章 高温低循环疲劳强度与热疲劳强度 .....</b>	<b>115</b>
§ 5.1 影响高温低循环疲劳强度的各种因素 .....	115
§ 5.1.1 材料的延性和温度的影响 .....	116
§ 5.1.2 应变循环速度、保持时间的影响 .....	126
§ 5.1.3 应变集中, 气氛效应等 .....	133
§ 5.2 影响热疲劳强度的各种因素 .....	136
§ 5.2.1 热因子 .....	136
§ 5.2.2 试验条件和使用条件 .....	139
§ 5.2.3 材料的机械性质 .....	143
§ 5.3 热疲劳强度与高温低循环疲劳强度的关系 .....	146
§ 5.3.1 温度的比较标准 .....	146
§ 5.3.2 热应变约束系数的比较标准 .....	153
§ 5.3.3 热应力与机械应力叠加时的热疲劳强度 .....	157
§ 5.3.4 根据高温低循环疲劳试验结果推断热疲劳强度 .....	163
§ 5.4 热冲击强度和其他高温强度的关系 .....	164
§ 5.4.1 热冲击的意义与热冲击断裂 .....	164
§ 5.4.2 热冲击强度的性质 .....	165
§ 5.4.3 热冲击强度与其他高温强度的关系 .....	169
§ 5.5 热应力棘轮 .....	172
§ 5.5.1 机械棘轮和热应力棘轮 .....	172
§ 5.5.2 由热循环引起的构件性质 .....	173
§ 5.5.3 由定常扭转应力引起的热应力棘轮 .....	177
§ 5.5.4 内压管的热应力棘轮 .....	180
<b>第六章 多维应力下的高温低循环疲劳和热疲劳 .....</b>	<b>190</b>
§ 6.1 多维应力下的高温低循环疲劳 .....	190
§ 6.1.1 实验条件与等效应变范围 .....	190
§ 6.1.2 多维应力下的高温低循环疲劳强度 .....	195
§ 6.2 多维应力下的热疲劳 .....	199



## VIII

§ 6.2.1	与一维应力下的强度的关系	199
§ 6.2.2	多维应力下的热疲劳强度	200
<b>第七章 热疲劳中的组织变化与龟裂</b>		<b>211</b>
§ 7.1	高温疲劳中微观组织的变化	211
§ 7.1.1	疲劳的机理	211
§ 7.1.2	高温疲劳的特征	215
§ 7.2	热疲劳的组织变化	222
§ 7.2.1	用光学显微镜观察	222
§ 7.2.2	用X射线观察	224
§ 7.2.3	热疲劳的组织变化与高温低循环疲劳的组织变化的比较	226
§ 7.2.4	其他的组织变化	228
§ 7.3	高温低循环疲劳和热疲劳中裂纹的扩展	232
§ 7.3.1	宏观和显微镜观察的裂纹状态	233
§ 7.3.2	裂纹的传播速度	237
<b>第八章 蠕变与高温疲劳的相互关系</b>		<b>242</b>
§ 8.1	对于蠕变与疲劳相互关系的观点	243
§ 8.2	蠕变损伤	244
§ 8.2.1	累积损伤	244
§ 8.2.2	循环交变应力下的蠕变断裂	246
§ 8.3	疲劳损伤 (高温低循环疲劳寿命)	249
§ 8.3.1	曼森-科芬公式	249
§ 8.3.2	循环速度修正疲劳寿命	249
§ 8.3.3	通用斜率法 (Universal slope 法)	250
§ 8.4	考虑蠕变的高温低循环疲劳寿命的推算	252
§ 8.4.1	曼森等人的线性损伤法则	253
§ 8.4.2	应变划分法	254
§ 8.5	氧化对高温低循环疲劳的影响	257
<b>第九章 机械中的热应力及主要问题</b>		<b>261</b>
§ 9.1	蒸气涡轮	261
§ 9.1.1	转子的热应力	261
§ 9.1.2	机壳的热应力	264
§ 9.1.3	减缓热疲劳的方法	265
§ 9.1.4	热疲劳寿命的控制	266
§ 9.2	燃气涡轮和喷气式发动机	267
§ 9.2.1	涡轮动叶片及喷嘴	267
§ 9.2.2	涡轮盘	269

§ 9.2.3	燃烧器壳体 .....	272
§ 9.2.4	实用喷气式发动机的热疲劳龟裂损伤举例 .....	273
§ 9.3	柴油机 .....	274
§ 9.3.1	柴油机的传热 .....	275
§ 9.3.2	定常热应力 .....	277
§ 9.3.3	周期性热应力 .....	280
§ 9.3.4	过渡状态的热应力 .....	280
§ 9.4	原子能装置 .....	281
§ 9.4.1	按照规范来处理热应力 .....	282
§ 9.4.2	反应堆压力容器的热应力 .....	283
§ 9.5	化工机械 .....	288
§ 9.5.1	管的热应力 .....	288
§ 9.5.2	压力容器的热应力 .....	290
§ 9.6	轧辊 .....	293
§ 9.6.1	由一次热冲击引起的轧辊表面损伤 .....	294
§ 9.6.2	由循环热冲击引起的轧辊表面损伤 .....	297
§ 9.6.3	由热应力引起的轧辊自内部的断裂 .....	298
第十章	热疲劳设计 .....	302
§ 10.1	热疲劳设计的实施 .....	302
§ 10.1.1	热疲劳设计的主要问题 .....	302
§ 10.1.2	为缓和热应力在设计上应注意的事项 .....	306
§ 10.1.3	原子动力装置的热疲劳设计 .....	306
§ 10.1.4	蒸气涡轮转子的热疲劳设计 .....	309
§ 10.2	热疲劳断裂诸例及其问题 .....	312
§ 10.2.1	热疲劳断裂诸例 .....	312
§ 10.2.2	热疲劳设计上的问题 .....	317

## 第一章 热应力与热疲劳概论●

在材料力学中已经学过，如果加外力于物体，其内部便产生应力，有时即使不加外力也产生应力。

现在，假定长度为  $L$  的棒，温度由零度上升到  $T$ 。此时，若设线胀系数为  $\alpha$ ，则棒的伸长为

$$l = \alpha TL \quad (1-1)$$

若将伸长改成应变，则

$$\varepsilon = \frac{l}{L} = \alpha T \quad (1-2)$$

下面，按图 1-1 将棒的两端完全固定，使棒不在长度方向上产生伸长，然后加热，则产生与式 (1-2) 的应变对应的压应力。就是说，设材料的纵弹性系数为  $E$ ，则此应力为

$$\sigma = -E\varepsilon \quad (1-3)$$

此时，即使不加外力于物体也产生应力，这样的应力称为热应力。

在机械结构体中，产生热应力的原因很多，但大致可分为如下几种：

- (1) 结构体构件的热膨胀或收缩受到外界约束；
- (2) 结构体构件之间的温差；
- (3) 结构体内某一构件中的温度梯度；
- (4) 线胀系数不同的材料的组合。

我们用简单的例子来说明热应力产生的情形。我们研究的物体，如图 1-2 所示，是一根固定在圆管中的圆柱，它不能沿界面滑动。假定初始温度为零，圆柱及圆管的温度分别为  $T_c$ 、 $T_s$ ，线胀系数为  $\alpha_c$ 、 $\alpha_s$ ，纵弹性系数为  $E_c$ 、 $E_s$ ，截面积为  $A_c$ 、 $A_s$ 。

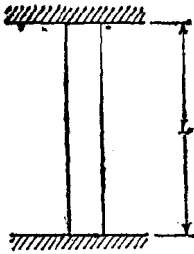


图1-1 两端固定限制变形的棒

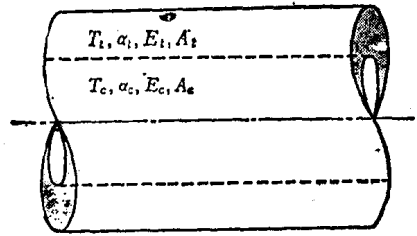


图1-2 圆管和圆柱的组合部件

为简单起见，还假定只在长度方向上产生应力和应变。

若设圆柱及圆管的应力和应变分别为  $\sigma_c$ ,  $\sigma_t$  及  $\varepsilon_c$ ,  $\varepsilon_t$ ，则应力和应变关系为

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_c &= \frac{\sigma_c}{E_c} + \alpha_c T_c \\ \varepsilon_t &= \frac{\sigma_t}{E_t} + \alpha_t T_t \end{aligned} \right\} \quad (1-4)$$

又因轴向力的平衡式

$$\sigma_c A_c + \sigma_t A_t = 0 \quad (1-5)$$

以及圆柱和圆管的约束条件

$$\varepsilon_c = \varepsilon_t \quad (1-6)$$

存在，所以根据式 (1-4)~(1-6)，圆柱及圆管的应力为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_c &= \frac{\alpha_t T_t - \alpha_c T_c}{E_c A_c + E_t A_t} E_c E_t A_t \\ \sigma_t &= \frac{\alpha_c T_c - \alpha_t T_t}{E_c A_c + E_t A_t} E_c E_t A_c \end{aligned} \right\} \quad (1-7)$$

但是，在式 (1-7) 中，若假定  $\alpha_c = 0$ ,  $E_c = \infty$ ，则

$$\sigma_c = -E_c \alpha_t T_t \quad (1-8)$$

这相当于圆柱受到刚性圆管完全约束的情况，它与上面所讲的情况 (1) 相当。其次，若假定： $\alpha_c = \alpha_t = \alpha$ ,  $E_c = E_t = E$ ，则

$$\left. \begin{aligned} \sigma_c &= -\frac{\alpha(T_c - T_r)}{A_c + A_r} E A_r \\ \sigma_r &= \frac{\alpha(T_c - T_r)}{A_c + A_r} E A_c \end{aligned} \right\} \quad (1-9)$$

像情况(2)一样,这是仅由圆柱和圆管的温差产生的热应力。在图1-2中,圆柱和圆管是由两种材料组成的,但可以认为圆柱为无限多的圆管围绕着,其温度差的情况与(3)相当。作为情况(4),是当 $T_c = T_r = T$ 时的情形,此时应力为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_c &= -\frac{(\alpha_c - \alpha_r) T}{E_c A_c + E_r A_r} E_c E_r A_r \\ \sigma_r &= \frac{(\alpha_c - \alpha_r) T}{E_c A_c + E_r A_r} E_c E_r A_c \end{aligned} \right\} \quad (1-10)$$

关于这种弹性热应力和弹塑性热应力的理论基础,将在第二章中讲述;具体的数值计算方法和实验分析方法将在第三章介绍。

我们再来观察图1-1。在温度为 $T_2$ 时被固定起来的棒一受到冷却时在棒中便产生拉伸应力。如果这个应力非常大,就会引起塑性变形,当温度为 $T_1$ 时,应力和应变状态相当于图1-3中的1。若将棒再加热到温度 $T_2$ ,应力和应变的滞后回线就达到图上的2'点。若反复施加这样的温度循环,就画出滞后回线,不久材料就会产生龟裂,以至破坏。我们把这种现象叫做热疲劳。这种

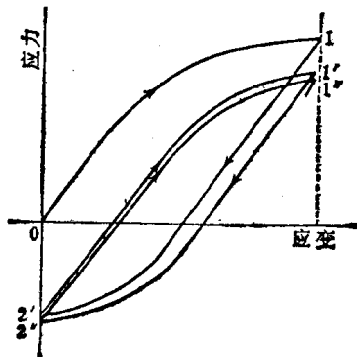


图1-3 应力-应变的滞后回线

热疲劳是像图 1-1 那样将两端固定后受到温度循环时产生的。即使温度一定，由外部反复施加压力，材料也会断裂，我们将这种现象叫做低循环疲劳（或塑性疲劳）。可以认为热疲劳和高温低循环疲劳，只是所加的温度和外力循环不同，而在现象上是相同的。实际上，我们在许多机械结构体中所看到的，大都是同时施加温度和外力的情况。

热疲劳和高温低循环疲劳的试验方法将在第四章中介绍。关于影响热疲劳强度和高温低循环疲劳强度的各种因素，两种疲劳温度的关系，尤其是热疲劳中的变形等问题将在第五章中讨论。另外，结构体中，实际成问题的并不是这样的一维应力下的热疲劳，而大部分是在第六章中所讲的多维应力下的热疲劳。从设计的观点来看，这种多维应力下的热疲劳知识是必要的。在第七章中，不但研究热疲劳断裂，而且还将讨论材料组织变化和龟裂这样的重要问题；关于疲劳与蠕变的关系，从最新的研究实例到它的应用将在第八章中论述。

最后，在第九章中将以重要的机械为例来说明实际机械中发生热应力的例子；第十章将叙述现有理论在热疲劳设计中的应用方法。

当考虑上述热应力和热疲劳等因素来进行设计时，这些因素处于什么地位，可以简单地用图 1-4 表示出来。

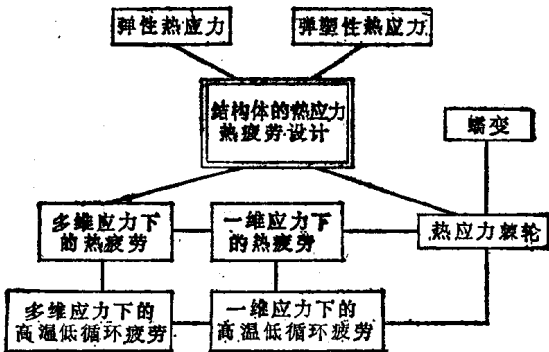


图1-4 热应力、热疲劳设计与各种问题的关系

## 第二章 热应力基础

### § 2.1 热 传 导●

#### § 2.1.1 基本微分方程

##### (1) 基本微分方程

为了分析热应力问题，通常必须预先知道物体的温度分布。当物体内的温度  $T$  为时间  $t$  和空间坐标  $(x, y, z)$  的函数  $T(t, x, y, z)$  时，在这一坐标点上，若设单位时间内，每一单位体积产生的热量为  $q_d$ ，材料的比热为  $c$ ，密度为  $\rho$ ，导热系数为  $k$ ，则在物体内任意一点，一般地说，在温度分布随时间变化的非定常热传导的情况下，微分方程

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{q_d}{\rho c}, \quad \kappa = \frac{k}{\rho c} \quad (2-1)$$

成立。这里所定义的  $\kappa$  称为导温系数。在温度分布与时间无关的定常热传导的情况下，式 (2-1) 的左边为零。

##### (2) 边界条件

当物体表面  $S$  上的温度，以表面上点  $P$  的函数  $f(P)$  的形式给出时，表面上的边界条件为：

$$T(P) = f(P) \quad (2-2)$$

而当固体表面与温度为  $T_f(P)$  的流体接触时，其边界条件可由下式给出<sup>①(2)</sup>：

$$k \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right) + \mu \{ T(P) - T_f(P) \} = 0 \quad (2-3)$$

式中， $n$  是边界的法线方向， $\mu$  是放热系数<sup>②</sup>。特别是当表面  $S$

● 関谷 壮执笔。

① 式 (2-3) 中  $T_f(P)$  是与表面  $S$  上点  $P$  接触的流体温度。

② 当把  $S$  作为所考察的物体的标准尺寸时，用  $\beta$  表示  $\mu/k$ ，这个  $\beta$  称为比奥数。

绝热时, 式 (2-3) 可以取  $\mu = 0$ 。

### § 2.1.2 热传导问题的例子

#### (1) 无限体

当物体在任何方向都可以无限扩展而没有边界时, 我们就称这种固体为无限体。现来研究固体的初始温度仅为坐标  $x$  的函数

$$(T)_{t=0} = f(x) \quad (2-4)$$

而与  $y, z$  无关的情况。此时,  $T$  仅是  $x$  的函数。因此, 式 (2-1) 中与  $y, z$  有关的项消失, 若物体内又无内热源, 则含  $q_s$  的项也消失。于是, 此方程的通解可由含有参数  $\alpha$  的下式给出<sup>(8)</sup>:

$$T = \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 z t} \{f_1(\alpha) \sin \alpha x + f_2(\alpha) \cos \alpha x\} d\alpha \quad (2-5)$$

将式 (2-5) 代入式 (2-4), 在区间  $-\infty < x < \infty$ , 用富里叶积分表示式 (2-4) 的右边  $f(x)$ , 并比较两边, 就可以确定  $f_1(\alpha)$ ,  $f_2(\alpha)$ 。这样, 求出的解为<sup>9</sup>:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) e^{-\alpha^2 z t} \cos \alpha (x - \lambda) d\lambda \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi \kappa t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4\kappa t}} d\lambda \end{aligned} \quad (2-6)$$

#### (2) 半无限体

从  $x = 0$  扩展到  $x \rightarrow \infty$  的物体称为半无限体。当初始温度为  $T_0$  的半无限体向温度为零的介质进行热辐射时, 半无限体中任意点在任意时刻的温度可由下式给出<sup>(4)</sup>:

$$\frac{T}{T_0} = \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}\right) + e^{\mu x + \mu^2 \kappa t} \left\{ 1 - \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} + \mu\sqrt{\kappa t}\right) \right\} \quad (2-7)$$

● 为使二重积分变为单积分, 应用下列积分公式, 首先对参数  $\alpha$  进行积分。

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 x^2} \cos 2bx d\alpha = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-(b^2/a^2)}$$



$$\text{式中} \quad \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du$$

### (3) 有限厚度的平板

我们来研究初始温度  $T = 0$ 、厚度为  $2h$  的宽大平板（这里假定为无限大）投入温度为一定值  $T_0$  的液体中的情况。这种问题在淬火等情况下较为常见。设平板的中心面为  $y, z$  面，且取  $x$  轴与该面垂直。此时，微分方程与 (1) 相同。边界条件：

$$x = \pm h \text{ 时, } k \frac{\partial T}{\partial x} = \pm \mu (T_0 - T) \quad (2-8)$$

$$x = 0 \text{ 时, } \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (2-9)$$

初始条件与  $x$  无关，即

$$t = 0 \text{ 时, } T = 0 \quad (2-10)$$

因为  $T$  是  $t$  和  $x$  的函数，所以若设

$$T = f_1(x) f_2(t) \quad (2-11)$$

并将该式代入本例的基本微分方程，我们便得到关于  $f_1(x)$  及  $f_2(t)$  的常微分方程。求其通解，考虑到边界条件式 (2-9)，并设  $\lambda$  和  $C$  为常数，则得<sup>(5)</sup>：

$$T = A e^{-\lambda^2 t} \cos \lambda x + C \quad (2-12)$$

将该式代入式 (2-8)，不论  $t$  为何值式 (2-12) 都成立，故得

$$C = T_0, \quad p = \beta \cot p \quad (2-13)$$

这里，

$$\lambda h = p, \quad \beta = \frac{h\mu}{k} = \text{比奥数} \quad (2-14)$$

若对式 (2-13) 所有的各根  $p_1, p_2, \dots$ ，叠加式 (2-12)，并应用初始条件式 (2-10)，则得<sup>(6)</sup>

$$T = T_0 \left\{ 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin p_n \cdot \exp\left(-p_n^2 \cdot \frac{\kappa}{h^2} \cdot t\right) \cos\left(p_n \frac{x}{h}\right)}{p_n + \sin p_n \cdot \cos p_n} \right\} \quad (2-15)$$