职业高级中学课本

数学

SHUXUE

（文史类）

下册

人民教育出版社

说　明

一、为了适应中等教育结构调整，和中等职业技术教育发展的需要，我们编写了这套职业高中数学教材，供三年制职业高中开设文化课用.

二、考虑到职业高中学生毕业后就业的广泛性，和利于他们掌握在工作中进行技术革新、继续进修所必需的数学基础知识，进一步培养正确迅速的运算能力，发展逻辑思维能力和空间想象能力，从而提高分析问题和解决问题的能力，这套职业高中数学教材在确定教学内容和教学要求时，注意使数学的知识面适当宽一些，与《高中数学教学纲要》中的基本要求大体相当，在理论上和习题的难度上适当降低，着重基础知识的教学和基本技能的训练.

三、为了适应各地职业高中不同专业的需要，这套数学教材分理工和文史两大类，在教学内容的范围与程度上有所不同，并注意增加教学内容的弹性. 每类教材分上、下两册，上册包括现行高中《代数》上册(乙种本，下同)和《立体几何》的主要内容，下册包括现行高中《代数》下册和《平面解析几何》的主要内容. 考虑到有些[illegible]高中或专业的特殊需要，在两类教材中都安排了一定的选学内容(用仿宋字体印出). 另外还编有《电子计算机的初步知识》、《概率统计的初步知识》和《简易微积分》三本教材，供选用.

各职业高中可以根据自己的实际需要，灵活选用这些教材. 两年制的职业高中，或对数学知识需要较少的专业，可以只选学上册，也可以再选学下册中的部分内容.

四、这套教材是在高中数学乙种本的基础上进行改编的. 在教学时，教师可参阅与高中数学乙种本配套的教学参考书.

五、本书系文史类《数学》下册，内容包括数列、极限、数学归纳法，复数，排列、组合、二项式定理，直线的方程，圆锥曲线，共五章. 教学时间约需120课时.

本书习题分练习、习题两类. 其中练习供课堂上用；习题供课内、外作业用，题号前标有*号的供选用.

六、本书由本社数学室编写. 参加编写工作的有蔡上鹤、李慧君、许缦阁，由许缦阁任责任编辑. 全书由吕学礼校订.

在本书编写过程中，北京市教育局教学研究部职业教育室肖志仲同志，以及从事职业高中数学教学工作的杨春香、郭锡瀛、曹荣珍、陶冶、王富章等同志对初稿提出了很多宝贵意见，在这里谨向这些同志表示感谢.

目　录

第四章　数列、极限、数学归纳法

一　数列与数列的极限

4.1　数列

我们看下面的例子：

图 4-1 表示堆放的钢管，共堆放了 7 层．自上而下各层的钢管数排列成一列数：

$$4,5,6,7,8,9,10. \tag{1}$$

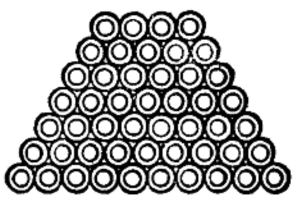

图　4-1

自然数 1,2,3,4,5,…的倒数排列成一列数：

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\cdots. \tag{2}$$

$\sqrt{2}$的精确到 1,0.1,0.01,0.001,…的不足近似值排列成一列数：

$$1,1.4,1.41,1.414,\cdots. \tag{3}$$

−1的 1 次幂，2 次幂，3 次幂，4 次幂，…… 排列成一列数：

$$-1, 1, -1, 1, -1, 1, \cdots. \tag{4}$$

无穷多个 1 排列成一列数:

$$1, 1, 1, 1, \cdots. \tag{5}$$

象上面的例子中,按一定次序排列的一列数叫做**数列**.数列中的每一个数都叫做这个数列的**项**,各项依次叫做这个数列的第 1 项(或首项),第 2 项,……,第 n 项,…….对于上面的数列(1),每一项与它的序号有下面的对应关系:

项	4	5	6	7	8	9	10
	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
序号	1	2	3	4	5	6	7

数列的一般形式可以写成

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots,$$

其中 a_n 是数列的第 n 项.有时我们把上面的数列简记作 $\{a_n\}$.例如,把数列

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$$

简记作 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$.如果数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项 a_n 与 n 之间的关系可以用一个公式来表示,这个公式就叫做这个数列的**通项公式**.例如,数列(1)的通项公式是 $a_n = n + 3 (n \leqslant 7)$,数列(2)的通项公式是 $a_n = \frac{1}{n}$.如果已知一个数列的通项公式,那么只要依次用 1, 2, 3, …去代替公式中的 n,就可以求出这个数列的各项.

项数有限的数列叫做**有穷数列**,项数无限的数列叫做**无穷数列**.上面的数列(1)是有穷数列,数列(2),(3),(4),(5)都是无穷数列.

例 1 根据下面数列$\{a_n\}$的通项公式，写出它的前 5 项：

(1) $a_n=\frac{n}{n+1}$; (2) $a_n=(-1)^n\cdot n$.

解：(1) 在通项公式中依次取 $n=1,2,3,4,5$，得到数列$\{a_n\}$的前 5 项为

$$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6};$$

(2) 在通项公式中依次取 $n=1,2,3,4,5$，得到数列$\{a_n\}$的前 5 项为

$$-1,2,-3,4,-5.$$

例 2 写出数列的一个通项公式，使它的前 4 项分别是下列各数：

(1) $1,3,5,7$;

(2) $\frac{2^2-1}{2},\frac{3^2-1}{3},\frac{4^2-1}{4},\frac{5^2-1}{5}$;

(3) $-\frac{1}{1\cdot 2},\frac{1}{2\cdot 3},-\frac{1}{3\cdot 4},\frac{1}{4\cdot 5}$.

解：(1) 数列的前 4 项 $1,3,5,7$ 都是序号的 2 倍减去1，所以通项公式是 $a_n=2n-1$;

(2) 数列的前 4 项$\frac{2^2-1}{2},\frac{3^2-1}{3},\frac{4^2-1}{4},\frac{5^2-1}{5}$的分母都是序号加上 1，分子都是分母的平方减去 1，所以通项公式是

$$a_n=\frac{(n+1)^2-1}{n+1}=\frac{n(n+2)}{n+1};$$

(3) 数列的前 4 项$-\frac{1}{1\cdot 2},\frac{1}{2\cdot 3},-\frac{1}{3\cdot 4},\frac{1}{4\cdot 5}$的绝对值都等

于序号与序号加上1的积的倒数，且奇数项为负，偶数项为正，所以通项公式是

$$a_n=\frac{(-1)^n}{n(n+1)}.$$

练　习

1. 根据下面数列$\{a_n\}$的通项公式，写出它的前5项：

(1) $a_n=n^2$;　　(2) $a_n=10n$;

(3) $a_n=5(-1)^{n+1}$;　　(4) $a_n=\frac{2n+1}{n^2+1}$.

2. 根据下面数列$\{a_n\}$的通项公式，写出它的第7项与第10项：

(1) $a_n=\frac{1}{n^3}$;　　(2) $a_n=n(n+2)$;

(3) $a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$;　　(4) $a_n=-2^n+3$.

3. (口答)说出数列的一个通项公式，使它的前4项分别是下列各数：

(1) 2, 4, 6, 8;　　(2) 15, 25, 35, 45;

(3) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}$;

(4) $1-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}-\frac{1}{5}$.

4. 观察下面数列的特点，用适当的数填空，并对每一个数列各写出一个通项公式：

(1) 2, 4, (　), 8, 10, (　), 14;

(2) 2, 4, (　), 16, 32, (　), 128, (　);

(3) (　), 4, 9, 16, 25, (　), 49;

(4) (　), 4, 3, 2, 1, (　), −1, (　);

(5) 1, $\sqrt{2}$, (　), 2, $\sqrt{5}$, (　), $\sqrt{7}$.

4.2　等差数列

考察上一节中提到过的数列(1):

$$4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.$$

我们可以发现，这个数列有这样的特点：从第 2 项起，每一项与它的前一项的差都等于 1.

一般地，如果一个数列从第 2 项起，每一项与它的前一项的差等于同一个常数，这个数列就叫做**等差数列**，这个常数叫做等差数列的**公差**，公差通常用字母 d 表示. 例如，数列

$$1, 3, 5, 7, \cdots$$

与

$$5, 0, -5, -10, \cdots$$

都是等差数列，它们的公差分别是 2 与 −5.

如果一个数列

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

是等差数列，它的公差是 d，那么

$$a_2 = a_1 + d,$$
$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d,$$
$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d,$$
$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots.$$

由此可知，等差数列$\{a_n\}$的通项公式是

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d.}$$

例如，如果一个等差数列$\{a_n\}$的首项是 1，公差是 2，那么将它们代入上面的公式，就得到通项公式

$$a_n=1+(n-1)\cdot 2,$$

即

$$a_n=2n-1.$$

例 1 求等差数列 8，5，2，…的第 20 项.

解: $\because\quad a_1=8,\quad d=5-8=-3,\quad n=20,$

$$\therefore\quad a_{20}=8+(20-1)\times(-3)$$
$$=-49.$$

例 2 等差数列-5，-9，-13，…的第几项是-401?

解: $a_1=-5$，$d=-9-(-5)=-4$，设 $a_n=-401$，则有

$$-401=-5+(n-1)\times(-4).$$

解得

$$n=100.$$

答：这个数列的第 100 项是-401.

例 3 梯子的最高一级宽 33 cm，最低一级宽 110cm，中间还有 10 级，各级的宽度成等差数列．计算中间各级的宽.

解: 用$\{a_n\}$表示题中的等差数列，由已知条件，有

$$a_1=33,\quad a_{12}=110,\quad n=12,$$
$$a_{12}=a_1+(12-1)d,$$

即

$$110=33+11d.$$

解得

$$d=7.$$

$$\therefore\quad a_2=33+7=40,$$

$$a_3=40+7=47,$$

$$\cdots\cdots\quad\cdots\cdots,$$

$$a_{11}=96+7=103.$$

答：梯子中间各级的宽从上到下依次是40，47,54,61,68,75,82,89,96,103 cm.

如果在 a 与 b 中间插入一个数 A，使 a,A,b 成等差数列，那么 A 叫做 a 与 b 的**等差中项**.

如果 A 是 a 与 b 的等差中项，那么 $A-a=b-A$，所以

$$A=\frac{a+b}{2}.$$

容易看出，在一个等差数列中，从第 2 项起，每一项(有穷等差数列的末项除外)都是它的前一项与后一项的等差中项.

练　习

1. (1) 求等差数列 3,7,11,… 的第 4,7,10 项；
   (2) 求等差数列 10,8,6,… 的第 20 项；
   (3) 求等差数列 2,9,16,… 的第 n 项；
   (4) 求等差数列 $0,-3\frac{1}{2},-7,\cdots$ 的第 $n+1$ 项.

2. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中：
   (1) 已知 $d=-\frac{1}{3}$，$a_7=8$，求 a_1；
   (2) 已知 $a_1=12$，$a_6=27$，求 d；
   (3) 已知 $a_1=3$，$a_n=21$，$d=2$，求 n；
   (4) 已知 $a_4=10$，$a_7=19$，求 a_1 与 d.

下面通过具体例子，说明求等差数列的前n项和的方法.

为了求出图 4-1 所示的钢管的总数，我们可以设想如图 4-2那样，在这堆钢管的旁边倒放着同样的一堆钢管. 这样，每层的钢管数都相等，即

$$4+10=5+9=6+8=\cdots=10+4.$$

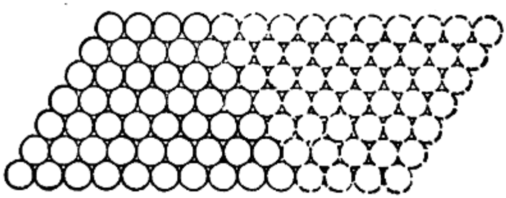

图 4-2

由于共有 7 层，两堆钢管的总数是$(4+10)\times7$，所以所求的钢管总数是

$$\frac{(4+10)\times7}{2}=49.$$

一般地，设有等差数列

$$a_1, a_2, a_3, \cdots,$$

它的前n项的和是S_n，即

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n.$$

根据等差数列$\{a_n\}$的通项公式，上式可以写成

$$S_n=a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+\cdots+[a_1+(n-1)d]; \quad (1)$$

再把项的次序反过来，S_n 又可以写成

$$S_n=a_n+(a_n-d)+(a_n-2d)+\cdots+[a_n-(n-1)d]. \quad (2)$$

把(1)，(2)两式的两边分别相加，得

$$2S_n=\overbrace{(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+\cdots+(a_1+a_n)}^{n\text{ 个}}$$
$$=n(a_1+a_n).$$

由此得到等差数列$\{a_n\}$的前 n 项的和的公式

$$\boxed{S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}.}$$

因为 $a_n=a_1+(n-1)d$，所以上面的公式又可写成

$$\boxed{S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d.}$$

例 4 如图 4-3，一个堆放铅笔的 V 形架的最下面一层放 1 支铅笔，往上每一层都比它下面一层多放 1 支，最上面一层放 120 支．这个 V 形架上共放着多少支铅笔？

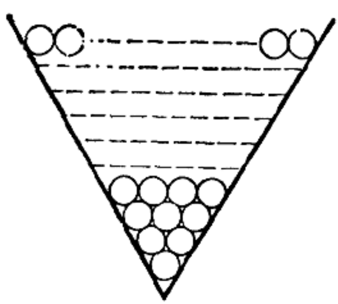

图 4-3

解： 由题意可知，这个 V 形架上共放着 120 层铅笔，且自下而上各层的铅笔数组成等差数列，记为 $\{a_n\}$，其中 $a_1=1$，$a_{120}=120$．根据等差数列$\{a_n\}$前 n 项和的公式，得

$$S_{120}=\frac{120\times(1+120)}{2}=7260.$$

答：V 形架上共放着 7260 支铅笔.

例 5 已知一个直角三角形的三条边的长成等差数列，求证它们的比是 3:4:5.

证明： 将成等差数列的三条边的长从小到大排列，它们可以表示为 $a-d, a, a+d$，这里 $a-d>0$，$d>0$. 由于它们是直角三角形的三条边的长，所以根据勾股定理，得到

$$(a-d)^2+a^2=(a+d)^2.$$

解得

$$a=4d,$$

从而这三条边的长是 $3d, 4d, 5d$.

因此，这三条边的长的比是 3:4:5.

练 习

1. 根据下列各题中的条件，求相应的等差数列 $\{a_n\}$ 的 S_n：

(1) $a_1=5, a_n=95, n=10$；

(2) $a_1=100, d=-2, n=50$；

(3) $a_1=\frac{2}{3}, a_n=-\frac{3}{2}, n=14$；

(4) $a_1=14.5, d=0.7, a_n=32$.

2. (1) 求自然数列中前 n 个数的和；

(2) 求自然数列中前 n 个偶数的和.

习 题 二 十 二

1. 写出数列的一个通项公式，使它的前 4 项分别是下列各数：

(1) $3, 6, 9, 12$;　　　　(2) $0, -2, -4, -6$;

(3) $\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}$;

(4) $-\frac{1}{2\times1}, \frac{1}{2\times2}, -\frac{1}{2\times3}, \frac{1}{2\times4}$;

(5) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}$;

(6) $\sqrt[3]{1}, -\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}, -\sqrt[3]{4}$.

2. 已知无穷数列 $1\times2, 2\times3, 3\times4, 4\times5, \cdots, n(n+1), \cdots$.

(1) 求这个数列的第 10 项，第 31 项及第 48 项;

(2) 420 是这个数列中的第几项?

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n=-2n+3$.

(1) 计算 $a_2-a_1, a_3-a_2, a_4-a_3, a_5-a_4$;

(2) 计算 $a_{n+1}-a_n$;

(3) 证明这个数列是一个等差数列，并求出它的首项与公差.

4. (1) 一个等差数列的第 1 项是 5.6，第 6 项是 20.6，求它的第 4 项;

(2) 一个等差数列的第 3 项是 9，第 9 项是 3，求它的第 12 项.

5. 求下列各题中两数的等差中项:

(1) 647 与 895;

(2) -180 与 360;

(3) $(a+b)^2$ 与 $(a-b)^2$.

6. (1) 下面是全国统一鞋号中成年女鞋的各种尺码（表示鞋底长，单位是厘米):

21， $21\frac{1}{2}$， 22， $22\frac{1}{2}$， 23， $23\frac{1}{2}$， 24， $24\frac{1}{2}$， 25.

这些尺码是否成等差数列？如果是，公差是多少？

(2) 全国统一鞋号中成年男鞋共有 14 种尺码，其中最小的尺码是 $23\frac{1}{2}$(厘米)，各相邻的两个尺码都相差$\frac{1}{2}$厘米. 把全部尺码从小到大列出.

7. (1) 在 12 与 60 之间插入 3 个数，使它们同这两个数成等差数列；

(2) 在 8 与 36 之间插入 6 个数，使它们同这两个数成等差数列.

8. 安装在一个公共轴上的 5 个皮带轮的直径成等差数列，其中最大的与最小的皮带轮的直径分别是 216 毫米与 120 毫米，求中间三个皮带轮的直径.

9. 一种车床变速箱的 8 个齿轮的齿数成等差数列，其中首末两个齿轮的齿数分别是 24 与 45，求其余各齿轮的齿数.

10. (1) 求等差数列 13, 15, 17, …, 81 的各项的和.

(2) 求等差数列 10, 7, 4, …, −47 的各项的和.

11. 根据下列各题中的条件，求相应的等差数列$\{a_n\}$的有关未知数：

(1) $a_1=20, a_n=54, S_n=999$，求 d 及 n；

(2) $d=\frac{1}{3}, n=37, S_n=629$，求首、末两项；

(3) $a_1=\frac{5}{6}, d=-\frac{1}{6}, S_n=-5$，求项数及末项；

(4) $d=2, n=15, a_n=-10$，求首项及这 n 项的和.

12. 一个屋顶的某一斜面成等腰梯形，最上面一层铺了瓦片21块，往下每一层多铺1块，斜面上铺了瓦片19层，共铺瓦片多少块？

13. 一个剧场设置了20排座位，第一排有38个座位，往后每一排都比前一排多2个座位. 这个剧场一共设置了多少个座位？

14. 一个等差数列的第6项是5，第3项与第8项的和也是5. 求这个等差数列前9项的和.

15. 三个数成等差数列，它们的和等于18，它们的平方和等于116，求这三个数.

16. 某多边形的周长等于158cm，所有各边的长成等差数列，最大的边长等于44cm，公差等于3cm. 求多边形的边数.

4.3 等比数列

看下面的数列：

$$1, 2, 4, 8, \cdots.$$

这个数列有这样的特点：从第2项起，每一项与它前一项的比都等于常数2.

一般地，如果一个数列从第2项起，每一项与它前一项的比等于同一个常数，这个数列就叫做**等比数列**，这个常数叫做等比数列的**公比**，公比通常用字母 q 表示. 例如，数列

$$5, 25, 125, 625, \cdots$$

与