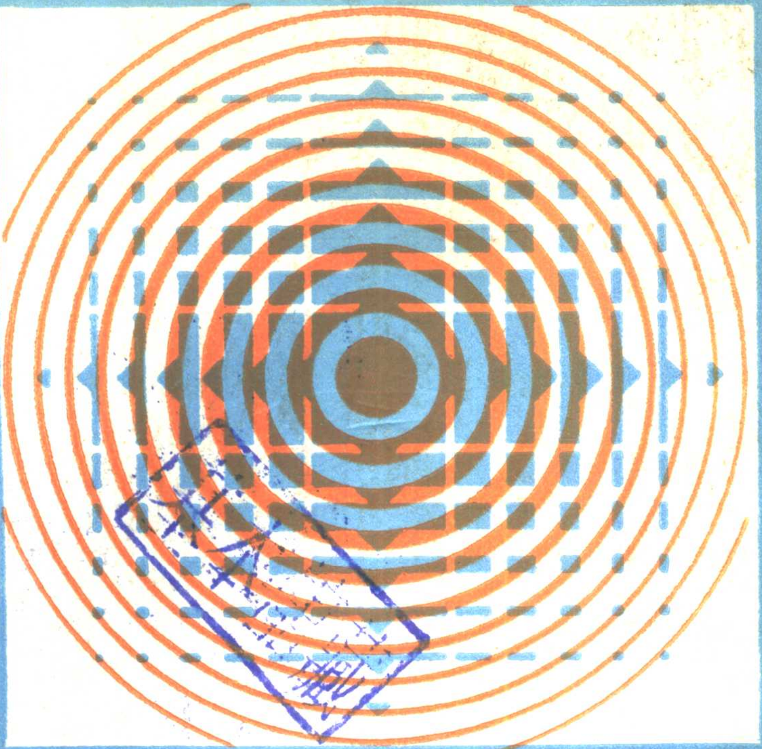
〔日〕大崎顺彦 著



振动理论

地震出版社

振动理论

〔日〕大崎顺彦 著
谢礼立 周雍年 袁一凡 译

地震出版社

1990

内 容 简 介

本书是一本专门阐述振动理论及分析的著作，是以作者为大学高年级学生和研究生讲授振动理论课程的讲义为基础写成的。

本书对现有工程振动理论中最基本的问题进行了详细的论述，尤其是对阻尼问题的论述颇具特色。这一类问题往往在初级振动理论中由于读者对象或篇幅限制难以涉及，而在高级振动理论课程中又因起点较高，要考虑其自身体系又不宜涉及。从这一点来说，本书起到了连接两者之间的桥梁作用。

书中虽以讲述基本理论为主，但仍以实用特别是为进入高级实用阶段为目的。全书结构严谨，层次分明，语言简炼，叙述深入浅出，实例丰富，并附有许多振动分析中最常见的实用计算机程序。

本书适于大学理工科高年级学生、攻读学位的研究生、工程设计人员、大学教师及科研工作者阅读。

振 動 理 論
大崎顺彦 著
彰国社 1980

振 动 理 论
〔日〕大崎顺彦 著
谢礼立 周雍年 袁一凡 译
责任编辑：蒋乃芳
责任校对：李和文

地震出版社出版
北京海淀区民族学院南路九号
中国农业机械出版社印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行
全国各地新华书店经售

787×1092 1/16 16.5印张 422千字
1990年10月第一版 1990年10月第一次印刷
印数 0001—1700
ISBN 7-5028-0273-8/T·8
(662) 定价：9.00元

前　言

笔者是建筑结构学丛书编辑委员之一，参与了制定丛书的出版计划。当然，最初是设想丛书各卷能全面反映建筑结构学的主要领域，而且做到基础编与应用编相互平衡。但是随后我却感到，在基础编中应当有一卷介绍振动的基本理论。特别是最近超高层建筑的普及、电子计算机的飞跃进步等事物的出现，超出了当初出版计划的预想，使我越发感到有必要出版这样一本书。

前年夏天，同编辑委员会商谈之后，决定追加一卷关于振动基础内容的书。曾经考虑过几位执笔者，但是出于种种原因，结果仍由我本人来提笔了。这本书作为丛书中的一卷，却以和其他各卷稍有不同的形式问世，原因就在于此。

本书简单取名为“振动理论”，然而内容只限于质点系统的线性振动，至于连续体以及非线性振动丝毫没有涉及。这里事先予以说明，以避“挂羊头卖狗肉”之嫌。

直到前年为止，笔者在东京大学工学部建筑系讲授四年级的“建筑振动学”课程。另外，数年前还在广岛大学研究生院讲授过振动理论。这些课程的讲义构成了本书的骨架。

笔者虽然从事过许多与振动有关的研究，但并不是振动理论专家，因此十分担心书中有考虑不周或错误之处。但愿本书能对读者起到一点作用，同时书中若有不当之处也希望各位指正。

大崎顺彦

1980年4月

中文版序言

笔者在长期的研究生涯中一直从事建筑结构学中有关建筑物振动和抗震设计方面的研究，尤其关于原子能发电站的抗震设计、地基与结构的相互作用等研究领域是笔者的专业。

在日本和世界各国，有关振动理论的应用方面的著作很多，但仅就最基本的问题进行详细论述的专著却似乎意外地少见。笔者在担任东京大学工学部建筑学科的教授期间，有时作为讲义之一，讲授过振动理论的基本知识。将这些讲义内容汇总起来后，考虑到都是些很重要的基础知识，或许会对更多的人有用，于是便在1980年出版了这本《振动理论》。

本书的特点是始终忠实于介绍基础知识的原则，内容只限于质点系的线性振动，没有述及连续系统和非线性振动的问题。此外，书中附有很多计算机程序。

承蒙谢礼立先生的努力，使本书中文版得以顺利出版，这对作者来说是一件令人十分高兴的事，在此谨向译者表示衷心的感谢。如果本书能对日中两国的友好和学术交流起一点微薄的作用，本人将感到十分欣慰。

大崎顺彦

1988年6月

符号一览表

在本书中，凡有关数量的符号，即数值可变化的常数、变量、函数和下标等均用斜体字印刷；数值不变化的常数（如圆周率π、虚数单位 i 、自然对数的底 e 等）、运算符号（如sin表示微分的 d 等）和表示单位的符号均用正体（罗马）字印刷，这样便能区别开表示质点序号的 *i* 和表示虚数单位的 i ，表示时间的 *t* 和表示单位的 t （吨），表示沿 x 轴方向的位移 *x* 和表示轴方向的 x 等等。

此外，对于如dd/dt一类的表示法，虽然在本书中未曾出现，但也不会产生误解。

a　常数，地震动位移振幅

a_i　矩阵元素

A　常数，积分常数

A_{ij}　余因子

A_k　富里哀余弦系数

b　常数

B　常数，积分常数，留数

B_k　富里哀正弦系数

c　常数，阻尼系数

c_{cr}　临界阻尼系数

C　常数，积分常数，待定系数，基底剪力系数

$[C]$　阻尼矩阵

C_k　复富里哀系数

e　自然对数的底

e　偏心距

E　杨氏系数，杨氏模量

f　位移系数

$[f]$　位移矩阵

$f(t)$　时间函数

F　泛函(数)

$F(p)$　拉普拉斯变换

$F(\omega)$　富里哀变换

$\mathscr{F}$　富里哀变换

$\mathscr{F}^{-1}$　逆富里哀变换

g　重力加速度＝980cm/s²

h　阻尼常数，阻尼比

$h(t)$　脉冲反应函数

H　埃尔米特(Hermite)式，层间高度，建筑物高度

$H(\omega)$　频率响应函数

i　虚数单位

i　质点序号，行的序号

I　冲量，面积二次矩

$[I]$　单位矩阵

I_h　谱烈度

$\mathscr{g}$　虚部

j　振型阶数，列的序号

J　惯性(极)矩

k　弹簧常数，整数，谐和振动分量的阶数

K　刚度影响系数

$[K]$　刚度矩阵

l　整数，建筑物长度，构件长度

$\mathscr{L}$　拉普拉斯变换

$\mathscr{L}^{-1}$　拉普拉斯逆变换

m　质量，整数

$[M]$　质量矩阵

M　有效质量

n　质点数，自由度数

N　数据个数

p　圆频率，复数

P　力

$\{P\}$　激振矢量

$P(p)$　p 的多项式

q　广义坐标

q_0　振型基本解

q_a 标准加速度反应谱

q_v 标准速度反应谱

q_d 标准位移反应谱

Q 剪力，内积，二次形，广义力，层间剪力

$Q(p)$ p的多项式

R 衰减能量（散逸函数），层间弯矩

$\mathscr{R}$ 实部

S_a 绝对加速度反应谱

S_v 相对速度反应谱

S_d 相对位移反应谱

S_{pa} 拟加速度反应谱

S_{pv} 拟速度反应谱

S_{pd} 拟位移反应谱

S_n 有限富里哀近似

t 时间，时刻

T 周期，动能

$\bar{T}$ 单质点系的无阻尼固有周期

$\bar{T}_d$ 单质点系的有阻尼固有周期

u 固有函数

$\{u\}$ 固有（振型）矢量

$[U]$ 振型矩阵，模态矩阵

v 速度

V 势能

W 重量

W_d 消耗能量

W_e 供给能量

x x轴方向的位移，复数的实部

$\bar{x}$ 绕x轴的旋转角

x_m 峰值振幅

X 振幅

$\bar{X}$ 复振幅

y y轴方向的位移，地面运动位移，复数的虚部

$\bar{y}$ 绕y轴的旋转角

z z轴方向的位移，复数

$\bar{z}$ 绕z轴的旋转角

α 加速度，复数的实部

β 参与系数，复数的虚部

δ （广义的）位移，对数衰减率

$\{\delta\}$ 位移矢量

δ 变分

$\delta(t)$ DELTA函数

$\zeta(t)$脉冲反应函数

η 振幅比

θ 偏角，回转角

λ 固有值，常数，拉格朗日待定常数

$[\Lambda]$ 谱矩阵

μ 动态放大率，动态放大系数

ν 频率

ν_0 基本频率

$\bar{\nu}$ 单质点系的无阻尼固有频率

$\bar{\nu}_d$ 单质点系的有阻尼固有频率

ξ 绝对位移

σ 标准差

τ 时间，时刻

ϕ 相位差，扭转角

ψ 能量损耗率

ω 圆频率

ω_0 基本圆频率

$\bar{\omega}$ 单质点系的无阻尼固有圆频率

$\bar{\omega}_d$ 单质点系的有阻尼固有圆频率

〔 〕矩阵

$\lceil\ \rfloor$ 对角矩阵

{ } 矢量

$*$ 褶积

$/\!/$ 反褶积

* （上角记号）共轭复数

ㄣ 拉普拉斯变换

ㄱ 富里哀变换

目　录

第一章　动力学基础

1.1　运动与坐标

一般说来，某个点经过一定时间后位置发生移动的现象称为运动。为表示位置的移动，必须用坐标系作为度量基准。

运动点位置的移动量叫位移，位移随时间的变化率为速度，速度随时间的变化率为加速度。设点作直线运动的时间为 t 、位移为 x，则

$$\text{速度} \quad v = dx/dt = \dot{x} \tag{a}$$

$$\text{加速度} \quad a = dv/dt = d^2x/dt^2 = \ddot{x} \tag{b}$$

一般将论述运动与相关作用力间关系的力学分支称为动力学。

如果以厘米（cm）为单位度量位移，则如式(a)及式(b)所示，速度单位是厘米/秒(cm/s)，加速度单位是厘米/秒²(cm/s²)，亦称作伽(gal)。

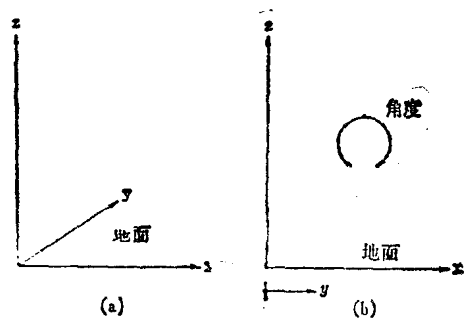


图1.1　坐标系

通常用图1.1(a)所示的右手直角坐标系作为表示点空间位置的坐标系。假定xy面为设置建筑物的水平地面、则 z 轴垂直指向上方。只分析建筑物在平面内的运动时，可以用图1.1(b)所示的平面坐标系。由于这时用不着坐标 y，在本书中若不作特别说明，就以 y 表示 x 方向的地面位移。

坐标的概念不仅仅是像（x，y，z）或（x，z）那样，用沿坐标轴方向的长度量纲表示点的空间位置，而且还用于更广义的情况。为表示点的位置，在极坐标表示方法中用角度，所以角度也可看作是一种坐标。我们规定在xz平面内角度坐标的正向为沿 y 轴正向前进的右旋方向，即图(b)中箭头表示的方向，并以弧度（rad）为单位。因此角速度单位为弧度/秒(rad/s)，角加速度为弧度/秒²（rad/s²）。

描述由构件或多个构件组成的结构物并作力学分析用的模型，称之为结构系统，或简称为系统。本书主要研究对象是质点系统。这是结构物的极端简单的理想化系统。若系统有 n 个可能的运动方向，则称为具有 n 个自由度。

具有 n 个自由度的系统中各点的位置，也就是系统的状态，可以用 n 个互相独立的变量来完全表达。这些独立的变量也是一种坐标，称为广义坐标。如上所述，广义坐标可以取长度量纲的量，也可以用角度表示。

两端固支，长度为 L 并置于 x 方向的构件的挠度用形如

$$z=\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \tag{c}$$

的富里哀级数表示。一旦确定了a_k，挠度z的形状就完全确定了，因而这时各系数a_k（$k=1$，2，3…）就是广义坐标。如式(c)所示，系数a_k有无限多个，因而像该构件这样的连续系统的自由度数目一般是无限大。如果用构件上有限个离散点，比如n个点的位移来近似表示它的挠度，即将构件作为离散系统来处理，则它的自由度为n，式(c)中只取n项而成为有限富里哀级数。

式(c)中的挠度是用正弦函数表示的，还可以用满足两端边界条件的任意已知函数$\phi_k(x)$来表示

$$z=\sum_{k=1}^{n} b_k \phi_k(x)$$

这时b_k也是广义坐标，函数$\phi_k(x)$称为形函数。

图1.2表示一个位移随时间变化的例子。在这种情况下，时间也用坐标表示。一般某种量用时间的函数表示时，称之为时间过程或简称时程。时程可以用时间的连续函数表示，也可以用以某个时间段为间隔的离散值表示。

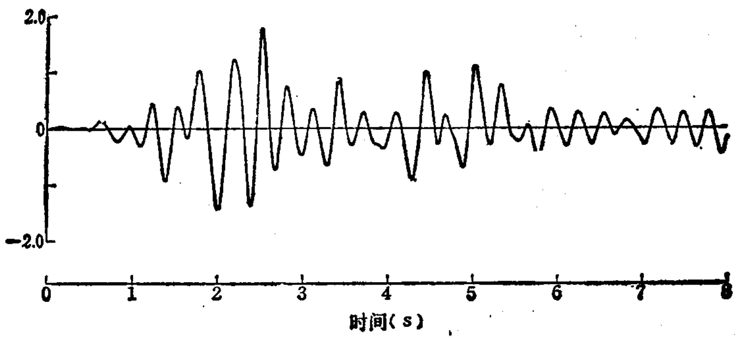


图1.2　位移时程

对具有n个自由度的系统，描述其振动时实际位移的坐标x_1、x_2、…x_n可以用$q^{(1)}(t)$，$q^{(2)}(t)\cdots q^{(n)}(t)$等独立的时间函数的线性组合表示为

$$\left.\begin{aligned}
x_1&=u_1^{(1)}q^{(1)}+u_1^{(2)}q^{(2)}+\cdots\cdots+u_1^{(n)}q^{(n)}\\
x_2&=u_2^{(1)}q^{(1)}+u_2^{(2)}q^{(2)}+\cdots\cdots+u_2^{(n)}q^{(n)}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_n&=u_n^{(1)}q^{(1)}+u_n^{(2)}q^{(2)}+\cdots\cdots+u_n^{(n)}q^{(n)}
\end{aligned}\right\} \tag{d}$$

当系数$u_i^{(j)}$(i，$j=1$，2…n)确定后，可以由函数$q^{(j)}$($j=1$，2…n)定出所有的坐标x_i，因而可以完全描述系统的状态。$q^{(j)}(t)$也是广义坐标。这里把时间函数看成是一种坐标。式(d)表示由n维坐标x_i转换为同样是n维坐标$q^{(j)}$的坐标变换关系。

特别当$u_i^{(j)}$满足一定条件时，广义坐标$q^{(j)}$($j=1$，2…n)可分别表示简谐振动。这类分别表示简谐振动的广义坐标称为正则坐标。这种情况下，式(d)表示将复杂的运动分解为单纯的简谐运动。

在动力学中将坐标的意义作如此极为广义的理解，特别是式(d)的坐标变换和正则坐标的概念在本书中经常出现，在结构系统的振动分析中起着重要的作用。

1.2 牛顿运动定律与运动方程式

众所周知，运动与作用力的关系是牛顿确立的，归纳为如下三个基本定律：

第一定律：静止或作匀速直线运动的物体，在无外力作用时，保持原状态不变。

第二定律：速度的变化即加速度与作用力的大小成比例，与作用力同向。

第三定律：作用力与反作用力大小相等，方向相反。

上述定律称为牛顿运动定律。

令加速度为 a，作用力为 P（单位：t），将第二定律用公式表示有 $a \propto P$，设比例常数为 $1/m$，则第二定律可表示成

$$a=(1/m)P \tag{a}$$

或

$$P=ma \tag{1.1}$$

式(a)中比例常数的倒数 m 为质量。

表示牛顿第二定律的式(a)也可以看作是质量的定义，因而质量的单位是吨·秒²/厘米（$t \cdot s^2/cm$）。

同样，牛顿第二定律的表达式（1.1）称为运动方程，是描述运动现象的所有方程式的原型

1.3 达朗贝尔原理与惯性力

将运动方程（1.1）移项得

$$(-ma)+P=0 \tag{1.2}$$

形式上表示（$-ma$）及 P 两个力互相平衡。这时称（$-ma$）为惯性力，或惯性抵抗力。

这样一来，即使对于具有加速度的运动物体，只要考虑包含惯性力在内的力平衡，就可以将动力问题当成静力平衡问题来处理，这称之为达朗贝尔原理。从式（1.1）到（1.2）在数学上只不过是单纯的移项，但在物理意义上，是将运动中止，把动力学当成静力学一样来考虑，具有重要意义。另一方面，在平衡方程中必须考虑所谓惯性力，又是与静力学本质不同的动力学特征。

式（1.2）中力 P 不仅只是作用在质量上的外力，还包括除抵抗加速度的惯性力外的所有力，如抵抗位移的恢复力，抵抗速度的阻尼力等。

第二章　单质点系统的振动

本章及下一章将详细讨论单质点系统振动的有关问题。单质点系是最简单的振动系统，没有比它更简单的系统了。但是由分析单质点系的运动特征可以学到非常多的振动知识。

一般不能将实际的结构物当成单质点系处理，大多要处理成有大量质点数的多质点系统。但如第六章所述，不管多么复杂的质点系，其振动在一定条件下可以分解为单质点系的振动再叠加。因此单质点系的振动是所有振动分析理论的基础。

2.1　单质点系统模型

将物体的全部质量集中在重心，以重心的位置和运动代表物体的位置和运动，这时质量集中处的几何点称为质点。用无质量构件联结质点所形成的力学系统称为质点系统。

单质点系统如图2.1(a)所示，这是一个将单个质点由无质量构件与无限刚的地基或结构物其他部分相连结的质点系统。只是为了便于图示，质点没有用几何点，而是用一定大小的质量块表示。此外，如图2.1(b)所示，质点只在水平方向移动，垂直方向上没有位移。质点的质量为m，设支持质点的构件为具有一定弹簧常数k（单位：t/cm）的弹簧，则当质点发生位移x（单位：cm）时，弹簧便产生弹性力kx（单位：吨(t)）。这个弹性力阻止发生位移，作用方向是使质点回到图2.1(a)所示的平衡位置上，故称为恢复力或弹性反力。

质点原来是几何点，没有必要考虑转动或对转动的惯性反力。或者说这时如图2.2(a)所示，即使是具有一定尺寸的质量块，也假定它不转动或有使它不能转动的约束，这无非是为使问题简化。这种只考虑水平位移而不考虑转动的系统变形状态叫剪切型。与此相对应，除水平位移外还考虑转动的变形状态称为弯曲剪切型。

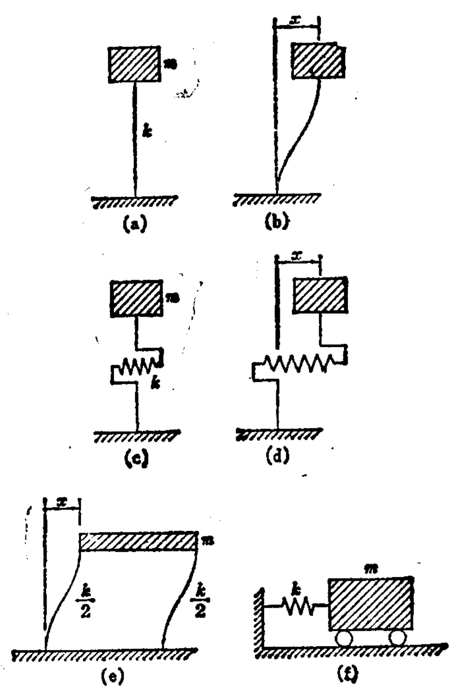


图2.1　单质点系模型

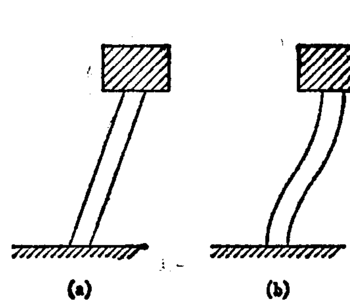


图2-2　剪切型位移

但是即使是剪切型运动，并不一定意味着弹簧或由弹簧代表的实际构件只有图2.2(a)那样纯粹的剪切变形。只要不考虑质点的转动，即使弹簧作纯粹的弯曲变形，总体仍然是剪切变形，如图2.2(b)所示。在实际的建筑物中，如所周知，只要不是极短的柱或墙，水平位移大部分是由垂直构件的弯曲变形而引起的，可以忽略由剪切变形引起的水平位移。

图2.1(a)及(b)所示弹簧的弹性一般分布在弹簧的全长上。若将弹簧的作用集中于一处，可以把单自由度系统表示如图2.1的(c)及(d)。为强调不使质量部分发生转动，并更像建筑物的模型，许多教科书采用图(e)所示的单质点系统模型。其实这种模型也会在产生水平位移的同时伴随有很小的竖向变形。所以描述单质点系统的模型以图2.1(f)所示为最合理。但建筑物动力分析中不太习惯用这个模型，本书对单质点系或多质点系主要采用图2.1(a)，(b)或(e)的描述方法。

2.2 自由振动

在无外力作用下，而且系统的底部即基础固定不动时的振动称为自由振动。与此相反，当系统有外力作用时，或如地震时那样，基底以某种加速度运动时的振动称为强迫振动。自由振动是受系统固有特性支配的，与强迫振动的性质也有重要关系。

2.2.1 运动方程式及其解

将图2.1(a)及(b)的单质点系再画在图2.3中，图中

m：质量（单位：$t\cdot s^2/cm$）

k：弹簧常数（单位：t/cm）

x：位移（单位：cm）

坐标系与图1.1(b)一致，只考虑x方向，位移、加速度和作用力都以x轴正方向，即图中向右的方向为正。

这时在运动方程（1.2）中惯性力为

$$-ma=-m\ddot{x} \tag{2.1}$$

因为没有外力，作用在质点上的力只有与位移成比例的弹簧恢复力，在图中向左作用，所以

$$P=-kx \tag{2.2}$$

则式（1.2）成

$$-m\ddot{x}-kx=0 \tag{2.3}$$

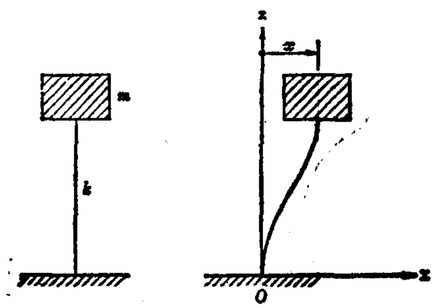


图2.3 单质点系的振动

即

$$m\ddot{x}+kx=0 \tag{2.4}$$

或以m除之，且设

$$\omega=\sqrt{k/m} \quad （单位：rad/s） \tag{2.5}$$

则有

$$\ddot{x}+\omega^2x=0 \tag{2.6}$$

一般地，当x是变量t的函数时，形如

$$\frac{d^nx}{dt^n}+P_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots\cdots+P_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+P_n(t)x=Q(t)$$

的微分方程称为线性n阶常微分方程，特别当$Q(t)=0$时称为是齐次的。此外，在式（2.6）中，x的系数$\bar{\omega}^2$是不含变量t的常数，这时线性n阶齐次微分方程式有n个线性无关的特解，这些特解的线性组合为方程的通解。

设c_1，$c_2 \cdots c_n$为常数，在n个t的函数x_1，$x_2 \cdots x_n$的线性组合，即$c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$中，只有当$c_1=c_2=\cdots=c_n=0$时

$$c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n\equiv 0$$

才成立，这时x_1，$x_2 \cdots x_n$称为线性独立或线性无关。一般为使x_1，$x_2 \cdots x_n$线性无关，必须满足

$$W(t)=\begin{vmatrix} x_1 & x_2\cdots\cdots & x_n \\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2\cdots\cdots & \dot{x}_n \\ & \cdots\cdots & \\ x_1^{(n-1)} & x_2^{(n-1)}\cdots & x_n^{(n-1)} \end{vmatrix}\neq 0 \tag{2.7}$$

函数$W(t)$称为朗斯基（wronski）行列式或朗斯基式。

式（2.6）为线性二阶常系数齐次常微分方程，有两个线性无关的解，其线性组合为方程的通解，具体形式为

$$\left.\begin{aligned} x_1&=\cos\bar{\omega}t \\ x_2&=\sin\bar{\omega}t \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

其中每一个都是式（2.6）的解，代入原式很容易得到验证。与式(a)中x_1，x_2有关的朗斯基行列式为

$$W(t)=\begin{vmatrix} \cos\bar{\omega}t & \sin\bar{\omega}t \\ -\bar{\omega}\sin\bar{\omega}t & \bar{\omega}\cos\bar{\omega}t \end{vmatrix}$$

$$=\bar{\omega}(\cos^2\bar{\omega}t+\sin^2\bar{\omega}t)=\bar{\omega}\neq 0$$

故x_1与x_2线性无关。因而微分方程（2.6)的通解为它们的线性组合

$$x=A\cos\bar{\omega}t+B\sin\bar{\omega}t \tag{2.8}$$

这样便求得了作为时间t的函数的质点位移。将式（2.8）对时间微分得质点速度

$$\dot{x}=-A\bar{\omega}\sin\bar{\omega}t+B\bar{\omega}\cos\bar{\omega}t \tag{2.9}$$

式（2.8)和（2.9）中的常数A，B就是所谓积分常数，根据给定$t=0$时的初始条件可确定其值。

2.2.2 初始条件

（1）初始条件：$x(0)=x_0$，$\dot{x}(0)=0$

表示给质点以位移x_0,并于$t=0$时释放。将$t=0$代入式(2.8)得$A=x_0$，令式(2.9)中$t=0$得$B=0$，由此可确定常数A和B，将这些值代入通解（2.8）中，得到运动位移的表达式为

$$x=x_0\cos\bar{\omega}t \tag{a}$$

（2）初始条件：$x(0)=x_0$，$\dot{x}(0)=\dot{x}_0$

表示给质点以位移x_0,在$t=0$时使之有初速度$\dot{x}_0$并释放。令式(2.8)中$t=0$得$A=x_0$，由式（2.9）得$B\bar{\omega}=\dot{x}_0$，即$B=\dot{x}_0/\bar{\omega}$，式（2.8）变成

$$x=x_0\cos\bar{\omega}t+(\dot{x}_0/\bar{\omega})\sin\bar{\omega}t \tag{2.10}$$

前面的式(a)不过是式（2.10）在$\dot{x}_0=0$时的特殊情形。