目　录

上　篇

第 1 章　初等函数及其图形……………………………………3
1.1　基本内容……………………………………3
1.1.1　实数……………………………………3
1.1.2　函数的定义……………………………………5
1.2　学习指导……………………………………9
1.2.1　重点、难点及其分析……………………………………9
1.2.2　典型例题分析……………………………………13
1.2.3　函数的应用……………………………………18
1.2.4　答疑指导……………………………………24
1.3　练习与自测题及其解答……………………………………29
1.3.1　练习与自测题……………………………………29
1.3.2　练习与自测题的解答……………………………………31
第 2 章　极限与连续……………………………………35
2.1　基本内容……………………………………35
2.1.1　数列的极限……………………………………35
2.1.2　函数的极限……………………………………36
2.1.3　连续函数……………………………………41
2.2　学习指导……………………………………43
2.2.1　重点、难点及其分析……………………………………43
2.2.2　典型例题分析……………………………………47
2.2.3　极限和连续的一些应用……………………………………62
2.2.4　答疑指导……………………………………64
2.3　练习与自测题及其解答……………………………………67

2.3.1 练习与自测题 …… 67
2.3.2 练习与自测题的解答 …… 70
第3章 导数与微分 …… 78
3.1 基本内容 …… 78
3.1.1 导数的定义和几何意义 …… 78
3.1.2 导数的计算 …… 78
3.1.3 微分 …… 80
3.2 学习指导 …… 84
3.2.1 重点、难点及其分析 …… 84
3.2.2 典型例题分析 …… 88
3.2.3 导数在经济领域的一些应用 …… 100
3.2.4 答疑指导 …… 101
3.3 练习与自测题及其解答 …… 106
3.3.1 练习与自测题 …… 106
3.3.2 练习与自测题的解答 …… 109
第4章 中值定理与导数的应用 …… 117
4.1 基本内容 …… 117
4.1.1 中值定理 …… 117
4.1.2 洛必达法则 …… 118
4.1.3 泰勒公式 …… 119
4.1.4 导数的各种应用 …… 119
4.2 学习指导 …… 123
4.2.1 重点、难点及其分析 …… 123
4.2.2 典型例题分析 …… 128
4.2.3 导数的进一步应用 …… 139
4.2.4 答疑指导 …… 143
4.3 练习与自测题及其解答 …… 148
4.3.1 练习与自测题 …… 148
4.3.2 练习与自测题的解答 …… 150

第 5 章　不定积分…………………………………………… 156
5.1　基本内容 ………………………………………………… 156
5.1.1　原函数与不定积分的概念…………………………… 156
5.1.2　不定积分的性质……………………………………… 156
5.1.3　基本积分公式………………………………………… 157
5.1.4　常用积分表…………………………………………… 157
5.1.5　基本积分法则………………………………………… 158
5.2　学习指导 ………………………………………………… 159
5.2.1　重点、难点及其分析 ………………………………… 159
5.2.2　典型例题分析………………………………………… 164
5.2.3　不定积分的应用……………………………………… 180
5.2.4　答疑指导……………………………………………… 182
5.3　练习与自测题及其解答 ………………………………… 186
5.3.1　练习与自测题………………………………………… 186
5.3.2　练习与自测题的解答………………………………… 188
第 6 章　定积分………………………………………………… 199
6.1　基本内容 ………………………………………………… 199
6.1.1　定积分的定义………………………………………… 199
6.1.2　定积分的几何意义…………………………………… 200
6.1.3　定积分的性质………………………………………… 200
6.1.4　定积分和不定积分的联系…………………………… 201
6.1.5　定积分的计算公式和法则…………………………… 201
6.1.6　广义积分……………………………………………… 202
6.1.7　定积分的应用………………………………………… 203
6.2　学习指导 ………………………………………………… 205
6.2.1　重点、难点及其分析 ………………………………… 205
6.2.2　典型例题分析………………………………………… 215
6.2.3　定积分的一些应用…………………………………… 225
6.2.4　答疑指导……………………………………………… 229
6.3　练习与自测题及其解答 ………………………………… 235

6.3.1 练习与自测题…………………………… 235
6.3.2 练习与自测题的解答……………………… 237
第7章 概率论初步………………………………… 246
7.1 基本内容 ……………………………………… 246
7.1.1 随机事件及其概率………………………… 246
7.1.2 随机变量及其分布………………………… 250
7.1.3 随机变量的数字特征……………………… 253
7.2 学习指导 ……………………………………… 254
7.2.1 重点、难点及其分析 ……………………… 254
7.2.2 典型例题分析……………………………… 263
7.2.3 概率的一些实际应用……………………… 273
7.2.4 答疑指导…………………………………… 277
7.3 练习与自测题及其解答 ……………………… 283
7.3.1 练习与自测题……………………………… 283
7.3.2 练习与自测题的解答……………………… 286
第8章 常微分方程………………………………… 292
8.1 基本内容 ……………………………………… 292
8.1.1 常微分方程的基本概念…………………… 292
8.1.2 一阶微分方程……………………………… 292
8.1.3 二阶常系数线性微分方程………………… 294
8.1.4 高阶微分方程……………………………… 295
8.2 学习指导 ……………………………………… 295
8.2.1 重点、难点及其分析 ……………………… 295
8.2.2 典型例题分析……………………………… 300
8.2.3 微分方程的应用…………………………… 311
8.2.4 答疑指导…………………………………… 313
8.3 练习与自测题及其解答 ……………………… 316
8.3.1 练习与自测题……………………………… 316
8.3.2 练习与自测题的解答……………………… 317

下　篇

第 9 章　多元函数微积分…… 329
9.1　基本内容 …… 329
9.1.1　多变量函数…… 329
9.1.2　二元函数的极限与连续…… 330
9.1.3　偏导数与全微分…… 331
9.1.4　复合函数微分法…… 335
9.1.5　隐函数微分法…… 336
9.1.6　高阶偏导数…… 336
9.1.7　多元函数的极值…… 337
9.1.8　二重积分…… 339
9.2　学习指导 …… 340
9.2.1　重点、难点及其分析 …… 340
9.2.2　典型例题分析…… 356
9.2.3　多元函数微积分应用…… 367
9.2.4　答疑指导…… 371
9.3　练习与自测题及其解答 …… 374
9.3.1　练习与自测题…… 374
9.3.2　练习与自测题的解答…… 375
第 10 章　无穷级数 …… 385
10.1　基本内容…… 385
10.1.1　数项级数的基本概念…… 385
10.1.2　数项级数的基本性质…… 386
10.1.3　数项级数敛散性的判别法…… 387
10.1.4　两个重要的数项级数…… 389
10.1.5　幂级数的概念…… 389
10.1.6　收敛半径的求法…… 390
10.1.7　幂级数的运算…… 391
10.1.8　麦克劳林级数与泰勒级数…… 392

10.1.9 部分基本初等函数的幂级数展开式…… 393
10.2 学习指导…… 394
10.2.1 重点、难点及其分析 …… 394
10.2.2 典型例题分析…… 397
10.2.3 幂级数的应用…… 416
10.2.4 答疑指导…… 422
10.3 练习与自测题及其解答…… 426
10.3.1 练习与自测题…… 426
10.3.2 练习与自测题的解答…… 428
第11章 线性代数 …… 451
11.1 基本内容…… 451
11.1.1 行列式及其性质…… 451
11.1.2 矩阵及其运算性质…… 452
11.1.3 逆矩阵与初等变换…… 456
*11.1.4 矩阵的分块…… 457
11.1.5 线性方程组与 n 维向量 …… 459
11.1.6 线性方程组解的判定与结构…… 462
11.2 学习指导…… 463
11.2.1 重点、难点及其分析 …… 463
11.2.2 典型例题分析…… 466
11.2.3 线性代数的一些应用…… 495
11.2.4 答疑指导…… 501
11.3 练习与自测题及其解答…… 505
11.3.1 练习与自测题…… 505
11.3.2 练习与自测题的解答…… 516
第12章 概率论 …… 538
12.1 基本内容…… 538
12.1.1 二维随机变量…… 538
12.1.2 边缘分布…… 540
12.1.3 随机变量的独立性…… 541

12.1.4 两个随机变量函数的分布 …… 543
12.1.5 条件分布 …… 546
12.1.6 二维随机变量的数字特征 …… 546
12.1.7 大数定律和中心极限定理 …… 548
12.2 学习指导 …… 549
12.2.1 重点、难点及其分析 …… 549
12.2.2 典型例题分析 …… 565
12.2.3 一些实际应用 …… 576
12.2.4 答疑指导 …… 578
12.3 练习与自测题及其解答 …… 583
12.3.1 练习与自测题 …… 583
12.3.2 练习与自测题的解答 …… 585
第13章 统计入门 …… 596
13.1 基本内容 …… 596
13.1.1 总体和样本 …… 596
13.1.2 统计量的分布 …… 598
13.1.3 参数估计 …… 598
13.1.4 假设检验 …… 601
13.2 学习指导 …… 604
13.2.1 重点、难点及其分析 …… 604
13.2.2 典型例题分析 …… 608
13.2.3 一些实际应用 …… 615
13.2.4 答疑指导 …… 623
13.3 练习与自测题及其解答 …… 629
13.3.1 练习与自测题 …… 629
13.3.2 练习与自测题的解答 …… 633
参考文献 …… 640

上　篇

第 1 章　初等函数及其图形

1.1　基 本 内 容

1.1.1　实数

1. 实数与数轴

迄今为止，我们学过的数可归纳如下：

$$\text{复数}\begin{cases}\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\left\{\begin{array}{l}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数}\\\text{零}\\\text{负整数}\end{cases}\\\text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\\text{负分数}\end{cases}\end{array}\right\}\text{无限循环小数}\\\text{无理数}\left\{\begin{array}{l}\text{正无理数}\\\text{负无理数}\end{array}\right\}\text{无限非循环小数}\end{cases}\\\text{虚数}\end{cases}$$

在高等数学中，主要研究的数是实数，实数是无理数和有理数的总称.

实数轴是具有方向、单位长度和原点的有向直线，实数与实数轴上的点是一一对应的.

2. 区间

区间是表示介于两个实数之间的全体实数，这两个实数叫做区间的端点.

开区间(a,b)是指满足不等式$a<x<b$的全体实数x的集合，即$(a,b)=\{x|a<x<b\}$.

半开区间$(a,b]$（或$[a,b)$）是指满足$a<x\leqslant b$（或$a\leqslant x<b$）的全体实数x的集合，即$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$（或$[a,b)=\{x|a$

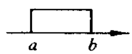
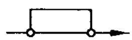
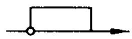
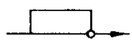
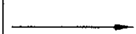
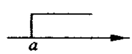
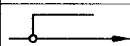
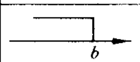
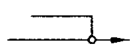
$\leqslant x<b\}$).

闭区间$[a,b]$是指满足不等式$a\leqslant x\leqslant b$的全体实数x的集合，即$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$.

无穷区间$(-\infty,+\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}$表示全体实数，$[a,+\infty)=\{x|a\leqslant x<+\infty\}=\{x|x\geqslant a\}$表示大于等于$a$的全体实数."$-\infty$"和"$+\infty$"是两个记号，而不是数.

下面给出区间表示和区间分类表(见表1.1).

表1.1　区间表示和区间分类表

区间分类＼区间表示	括号表示	实轴表示	不等式表示	集合表示
有限区间	$[a,b]$		$a\leqslant x\leqslant b$	$\{x\|a\leqslant x\leqslant b\}$
	(a,b)		$a<x<b$	$\{x\|a<x<b\}$
	$(a,b]$		$a<x\leqslant b$	$\{x\|a<x\leqslant b\}$
	$[a,b)$		$a\leqslant x<b$	$\{x\|a\leqslant x<b\}$
无限区间	$(-\infty,+\infty)$		$-\infty<x<+\infty$	$\{x\|x\in\mathbf{R}\}$
	$[a,+\infty)$		$a\leqslant x<+\infty$	$\{x\|x\geqslant a\}$
	$(a,+\infty)$		$a<x<+\infty$	$\{x\|x>a\}$
	$(-\infty,b]$		$-\infty<x\leqslant b$	$\{x\|x\leqslant b\}$
	$(-\infty,b)$		$-\infty<x<b$	$\{x\|x<b\}$

3. 绝对值与邻域

(1) 绝对值

实数x的绝对值，记作$|x|$，定义为

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

$|x|$在几何上表示在实轴上的点 x 到原点之间的距离.

例如$|4|=4$,$|-4|=4$,$|0|=0$.

绝对值有如下性质

① $|x|\geqslant 0$;

② $|x|=\sqrt{x^2}$;

③ $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$;

④ $|x|=|-x|$;

⑤ $|x|-|y|\leqslant |x\pm y|\leqslant |x|+|y|$;

⑥ 若 $a>0$,则$|x|<a \Leftrightarrow -a<x<a$, $|x|\geqslant a \Leftrightarrow x\geqslant a$ 或 $x\leqslant -a$.

(2) 邻域

满足$\{x \mid |x-x_0|<\delta,\delta>0\}$的实数集合,叫做 x_0 的 δ 邻域,其中 x_0 叫做邻域的中心,δ 称为邻域的半径. x_0 的 δ 邻域在数轴上常以开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$表示. 例如,$\{x \mid |x-3|<0.1\}$表示点 $x_0=3$ 的 0.1 邻域,也就是开区间(2.9,3.1).

集合$\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta,\delta>0\}$表示点 x_0 的邻域去掉点 x_0 后所得到的集合,即

$$(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta).$$

1.1.2 函数的定义

1. 常量与变量

在某一过程中,保持一定数值的量叫做常量,而可以取不同数值的量叫做变量.

2. 函数的定义

若 X 是一个给定的实数集合,若对于 X 中的每一个元素 x,通过对应关系 f,在 $\mathbf{R}$ 内都有惟一确定的一个元素 y 与之对应,则这个对应关系 f 就称为 X 到 $\mathbf{R}$ 的函数关系,简称函数,记为

$$y=f(x).$$

并称 x 为自变量，y 为因变量. 使函数有定义的所有自变量取值的集合 X，称为函数的定义域.

例如，某一地区，一天 24 小时当中，气温随时间的变化关系，就是一个函数关系，这时自变量是时间 t，$t\in[0,24)$，即定义域 $X=\{t|0\leqslant t<24\}$，温度 T 随 t 的变化而变化，对于 $t_0\in[0,24)$，都有惟一的一个 T_0 与之对应. 我们可用 $T=f(t)$ 来表示，"f"表示一天当中气温随时间的变化规律.

函数常有三种表示法：

① 解析法　用解析表达式表示函数的方法，如 $y=x^3$. 这种方法优点是简明、准确、完整，适于理论研究，不足之处是不够直观.

② 表格法　把自变量所取的值和对应的函数值，列成表格，来表示函数关系. 如常见的三角函数表等. 这种方法优点是使用方便，精度可以任选，不足之处是不能完全反映两个变量之间的变化规律，不够直观.

③ 图示法　用图形表示函数的两个变量之间的变化关系. 优点是直观，一目了然，不足之处是精度不够，也不够完整.

3. 函数的五个性质与分类

(1) 函数的五个性质

① 单调性　若函数 $y=f(x)$，在区间 (a,b) 内有定义，若对区间 (a,b) 内任意两点 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$），则称 $f(x)$ 是区间 (a,b) 内的严格单调递增（或递减）函数，区间 (a,b) 称为严格单调递增（或递减）区间.

函数的单调性，与函数的定义区间有关，如 $y=x^3$，在 $[0,+\infty)$，是严格单调递增的，而在 $(-\infty,0]$ 则是严格单调递减的.

② 单值性与多值性　若自变量在定义域，内任取一个确定的值，因变量只有一个确定的值与之对应，这样的函数称为单值函数；若有两个或两个以上的函数值与之对应，则称为多值函数.

例如 $y=x^2$，$x\in(-\infty,+\infty)$，是单值函数，但在 $y^2=x$ 中，则

是多值函数，这是因为对于一个 x 的正值，都有两个 y 的值与之对应，因此，它不是单值函数，而是多值函数. 但 $y^2=x$，可以定义成两个单值函数，即 $y=\sqrt{x}$，$y=-\sqrt{x}$，称为 $y^2=x$ 的两个单值分支. 本书研究的主要是单值函数.

③ 有界性　设 $y=f(x)$在 D 上有定义(D 可以是 $f(x)$的整个定义域，也可以是定义域的一部分)，如果存在一个正数 $M>0$，使得当 x 取 D 内任一值时，对应的函数值 $f(x)$都满足不等式 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$在 D 内是有界的，如 M 不存在，就说 $f(x)$在 D 内是无界的.

函数的界不是惟一的，即 M 可能有无穷多个，但也不是任意的. 如 $y=\cos x$，$x\in(-\infty,+\infty)$，存在 $M=1$，使得 $|\cos x|\leqslant 1$，但 M 也可以取 2，3，4，…，但 M 不能任意取值，如 M 不能取 1/10.

函数 $f(x)$的有界性，与定义的区间有关，如 $y=x^2$，在$(-\infty,+\infty)$上是无界的，但在$[a,b]$上，$a,b\in\mathbf{R}$，则是有界的.

④ 奇偶性　设 $f(x)$定义在对称区间$(-L,L)$上，若对于任何 $x\in(-L,L)$，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$是偶函数，若恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$为奇函数.

偶函数的图像对称于 y 轴，奇函数的图像对称于原点. 并不是任何函数都有奇偶性，如 $y=x+7$，不是偶函数，也不是奇函数.

⑤ 周期性　若对于 $f(x)$，存在一个不为零的正数 T，使

$$f(x+T)=f(x)$$

对于定义域内的任何 x 的值都成立，则 $f(x)$称为周期函数，满足上式的最小正数 T 称为 $f(x)$的周期.

(2) 函数的分类

① 基本初等函数　一般是指下面的六类函数：

常数函数，$y=c$.

指数函数，$y=a^x$，$(a>0,a\neq 1)$.

对数函数，$y=\log_a x$，$(a>0,a\neq 1)$.

幂函数，$y=x^a$，(a 为任意实数).

三角函数，$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$.

反三角函数，$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\text{arc}\cot x$.

② 初等函数 一般是指由基本初等函数经过有限次的四则运算，和有限次复合而成的函数.

③ 分段函数 一个函数，如果对于其定义域内自变量不同的值，不能用一个统一的数学式子表示，而要用两个或两个以上的式子表示，这样的函数称为分段函数.

例如 $y=\begin{cases}3-x, & x<3,\\ x-3, & x\geqslant 3,\end{cases}$是分段函数，但不是初等函数.

4. 复合函数与反函数

(1) 复合函数

若函数 $y=f(u)$，其定义域为 U，而 $u=\varphi(x)$的定义域为 X，值域为 D，如果 $D\subseteq U$，则对于 X 内的每一个 x 值，经过中间变量 u，相应地得到惟一确定的一个 y 值，则称变量 y 通过中间变量 u 而成为 x 的复合函数，记作

$$y=f[\varphi(x)].$$

例如 $y=\sin^2 x$，可以看成 $y=u^2$，和 $u=\sin x$ 复合而成.

(2) 反函数

设函数 $y=f(x)$的定义域为 X，值域为 Y，如果对于 Y 中的每一个值 y，在 X 中都有惟一的值 x 与之对应(对应规律仍是 $y=f(x)$)，则得到一个以 y 为自变量，以 x 为因变量的新函数，称为 $y=f(x)$的反函数，记为 $x=f^{-1}(y)$，习惯上，把 x 和 y 对调，写成 $y=f^{-1}(x)$.

例如，求 $y=x^2, x\in(-\infty,0]$的反函数. 由于反解 $x=\pm\sqrt{y}$，但由于 $x\in(-\infty,0]$，所以 $x=-\sqrt{y}$，故 $y=x^2, x\in(-\infty,0]$的反函数是 $y=-\sqrt{x}$.

5. 初等函数的结构关系

初等函数的结构关系

- 复合函数 $y=f(u)$, $u=\varphi(x) \to y=f[\varphi(x)]$
- 初等函数　由基本初等函数经有限次四则运算和有限次复合运算构成
- 基本初等函数
  - ① 指数函数；
  - ② 对数函数；
  - ③ 幂函数；
  - ④ 三角函数；
  - ⑤ 反三角函数；
  - ⑥ $y=c$.
- 反函数　$f: X \to Y$　X 和 Y 之间一一对应，$y=f^{-1}(x)$ 存在.

1.2 学习指导

1.2.1 重点、难点及其分析

1. 重点和难点

重点：(1) 函数的概念；(2) 基本初等函数的定义与性质.

难点：(1) 分段函数；(2) 复合函数；(3) 反函数.

2. 重点和难点分析

(1) 函数的概念　三个要素

① 定义域　即自变量的取值范围，要求定义域是非空的实数集合，例如 $f(x)=\sqrt{5-x}+\dfrac{1}{\sqrt{x-6}}$，由于定义域是空集，此函数就没有意义，如何求函数的定义域，对于抽象的数学式子，应注意下面几点：

1) 开偶次方的被开方式子应非负；

2) 分式的分母不能为零；

3) $\arcsin x$ 或 $\arccos x$，其中 $|x| \leqslant 1$；

4）对数式的真数应大于零；

5）函数四则运算的定义域，是各项定义域的公共部分；

6）分段函数的定义域，是各段定义域的并集.

对于有实际意义的函数表达式，其定义范围，要由问题的实际意义来确定.

② 函数的对应规则　应注意如下：

1）在 $y=f(x)$ 中，"f"就是表示自变量 x 和因变量 y 的对应法则和规律，"f"是一个记号，不是一个数；

2）本书考虑的函数是单值函数，x 和 y 的对应关系，必须要求对于任一 $x\in X$，只能有惟一的 $y\in Y$ 和它对应；

3）"一对一"的对应是指：对于 $x_1,x_2\in X$，且 $x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$.

③ 函数的值域　是指对于全体在定义域 X 内变化的自变量 x，所对应的全部函数值 y 的集合 Y，应注意 $f(x)$ 和 $f(a)$ 的区别和联系，$y=f(x)$ 通常是表示 x 和 y 之间的函数关系，而 $f(a)$，则是表示 $x=a$ 时的函数值. 例如 $f(x)=2x^2-4x+1$，求 $f(0)$ 和 $f(2)$. 显然 $f(0)=0-0+1=1$，$f(2)=8-8+1=1$. 由于这个函数对于不相同的 $x_1=0,x_2=2\Rightarrow f(0)=f(2)=1$，故这个函数关系不是一对一的. 函数的值域可以写成 $Y=\{y\,|\,y=f(x),x\in X\}$.

上面叙述的是函数的三个要素，但基本要素是定义域和对应关系，即两个函数相等当且仅当两个函数的定义域相同，对应规则也相同. 例如 $y=\ln x^2$，和 $2\ln|x|$. 由于 $\ln x^2$ 和 $2\ln|x|$ 的定义域都是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，对应关系 $f(x)=\ln x^2=\ln|x|^2=2\ln|x|$，定义域、对应关系都是相同的，因此这两个函数相同.

（2）分段函数

① 应注意函数的对应规律，不一定只是由一个式子来表示，它可以由两个或两个以上的式子表示，从总体上，分段函数仍然是一个函数；

② 不同的子区间，函数的对应规则可以不一样；

③ 注意分段函数的分段点的对应关系；