成人高等教育教材

高等数学

下册

邵因 彭绍明 贲亮 编

北京邮电大学出版社
·北京·

内 容 简 介

本书是参照普通高等理工院校成人教育高等数学教学基本要求编写的。全书分上、下两册。上册包括第一章至第八章，内容为：函数、极限、连续、一元函数的微积分学和微分方程；下册包括第九章至第十四章，内容为：空间解析几何与矢量代数、多元函数的微积分学和级数。

本书深入浅出、通俗易懂、便于自学，可作为高等函授教育、现代远程教育及夜大学等成人高等教育（工科）的教学用书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．下册/邵因，彭绍明，贲亮编．—北京：北京邮电大学出版社，2002

ISBN 7-5635-0589-X

Ⅰ．高…　Ⅱ．①邵…②彭…③贲…　Ⅲ．高等数学-高等学校-教材　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 014601 号

出 版 者：北京邮电大学出版社（北京市海淀区西土城路 10 号）
邮编：100876　发行部电话：(010)62282185 62283578(传真)
E-mail：publish@bupt.edu.cn

经　　销：各地新华书店

印　　刷：北京源海印刷厂

开　　本：850 mm×1 168 mm　1/32　　**印　　张**：11.125

印　　数：1—7000 册　　**字　　数**：287 千字

版　　次：2002 年 5 月第 1 版　2002 年 5 月第 1 次印刷

ISBN 7-5635-0589-X/O·37　　定价：20.00 元

如有印装质量问题请与北京邮电大学出版社发行部联系

目　　录

第九章　空间解析几何与矢量代数

在平面解析几何中，曾经通过坐标法，把平面上的点与一对有顺序的数对应起来，把平面曲线与代数方程对应起来，从而可以用代数的方法来研究几何问题. 但是，在生产实践和科学研究中，除平面图形外，还会遇到空间图形的问题，因此，需要在平面解析几何的基础上，进一步来研究空间解析几何.

本章首先建立空间直角坐标系；其次介绍矢量的概念及其运算；然后以矢量为工具讨论空间的平面和直线；最后介绍一些常见的曲面和空间曲线.

第一节　空间直角坐标系

一、空间直角坐标系

从空间一定点 O 作三条两两互相垂直的数轴 Ox，Oy，Oz，叫做**坐标轴**（或称 x 轴、y 轴和 z 轴）；定点 O 叫做**坐标原点**. 习惯上，将 Ox 轴和 Oy 轴放在水平面上，Oz 轴放在铅垂线上. Oz 轴的正向按所谓右手法则来确定，即：用右手握住 Oz，当右手的四个手指从 Ox 轴正向旋转 $\frac{\pi}{2}$ 到 Oy 轴正向时，大姆指的指向就规定为 Oz 轴的正向，如图9-1所示. 这样，在空

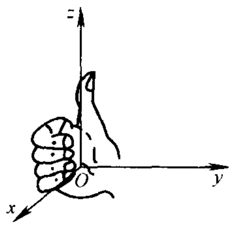

图 9-1

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

间就建立了一个**直角坐标系**.

三条坐标轴 Ox, Oy, Oz 中，任何两条均决定一个平面，即 xOy 面、yOz 面和 zOx 面，叫做**坐标面**. 这三个互相垂直的坐标面把空间分成八个部分，每一部分都叫做一个**卦限**. 按照 xOy 平面上象限的顺序，在 xOy 平面上方的四个卦限分别称为第Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ卦限，在 xOy 平面下方的四个卦限分别称为第Ⅴ，Ⅵ，Ⅶ，Ⅷ卦限，如图 9-2 所示.

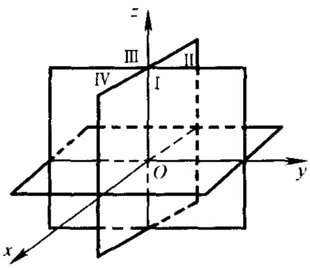

图 9-2

二、空间一点的直角坐标

设 M 为空间任一点，过 M 点分别作三个平面与坐标轴垂直，设它们与 x, y, z 轴的交点依次为 P, Q, R，并设这些交点在相应坐标轴上的坐标依次为 x, y, z，如图 9-3 所示. 这样，任给空间一点 M，就有唯一的一组有顺序的数 x, y, z 与之对应. 反之，任给一组有顺序的数 x, y, z，在 Ox 轴、Oy 轴和 Oz 轴上依次取坐标为 x, y, z 的点 P, Q, R，然后过这三点分别作与坐标轴垂直的平面，则此三个平面必交于唯一的点 M. 于是，任给一组有顺序的数 x, y, z，就有空间唯一的点 M 与之对应. 这样，就建立了空间一点 M 与一组有顺序的数 x, y, z 之间的一一对应关系，我们称 x, y, z 为点 M 的**直角坐标**，记为 $M(x, y, z)$，并分别称 x 为点 M 的**横坐标**、y 为**纵坐标**、z 为**竖**

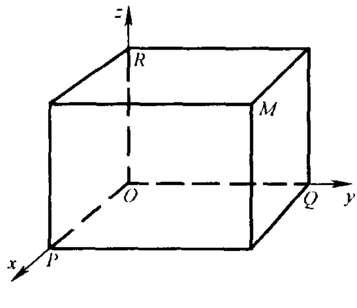

图 9-3

坐标.

仿照平面直角坐标系的情形,不难指出当点在不同的坐标轴上、坐标面上时,其坐标的特点;以及当点在不同的卦限中时,其坐标的符号.

三、两点间的距离公式

设 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$为空间的两个已知点,下面导出这两点间的距离公式.

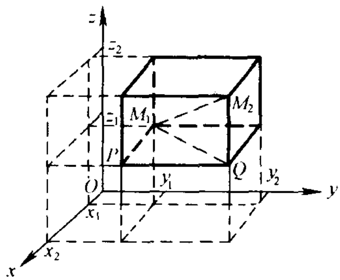

图 9-4

如图 9-4 所示,过点 M_1 和 M_2 各作三个平面,分别垂直于三个坐标轴,这六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体.

由图可知,$\triangle M_1PQ$ 和$\triangle M_1QM_2$ 均为直角三角形,所以

$$|M_1M_2|^2=|M_1Q|^2+|QM_2|^2,$$
$$|M_1Q|^2=|M_1P|^2+|PQ|^2,$$

于是 $$|M_1M_2|^2=|M_1P|^2+|PQ|^2+|QM_2|^2.$$

但是

$$|M_1P|^2=(x_2-x_1)^2,\ |PQ|^2=(y_2-y_1)^2,$$
$$|QM_2|^2=(z_2-z_1)^2,$$

所以 $$|M_1M_2|^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2.$$

从而 $$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \tag{9-1-1}$$

这就是**空间两点间的距离公式**. 特别地,空间一点 $M(x,y,z)$到原点的距离为

$$|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \tag{9-1-2}$$

例 1 已知两点 $A(2,0,-1)$和 $B(4,-2,3)$,求此两点间的距离.

解 将 A,B 两点的坐标代入公式(9-1-1),即得

$$|AB|=\sqrt{(4-2)^2+(-2-0)^2+(3+1)^2}=2\sqrt{6}.$$

习 题 9-1

1. 求点 $M(1,2,3)$到 x 轴、y 轴、xOy 坐标面及原点的距离.

2. 在 z 轴上求与两点 $A(-4,1,7)$和 $B(1,5,-2)$等距离的点.

3. 已知 $A(1,2,3)$,$B(3,1,5)$,$C(2,4,3)$,证明$\triangle ABC$ 为一直角三角形.

第二节 矢量的概念及其运算

一、矢量的概念

在物理学和工程技术中,有些物理量,例如长度、时间、温度、面积和质量等等,它们只有大小,没有方向,我们把这一类量称为**数量**或标量;另外,还有一类物理量,例如位移,力、速度和加速度等等,它们不但有大小,而且还有方向,这一类量则称为**矢量**或向量.

在数学上,用一条有向线段来表示矢量.有向线段的长度表示矢量的大小,有向线段的方向表示矢量的方向.例如,一质点沿直线由点 A 运动到点B,则可用有向线段$\overrightarrow{AB}$表示以 A 为起点、B 为终点而方向从 A 指向B 的一个位移矢量,如图 9-5 所示.类似地,$\overrightarrow{CD}$表示以 C 为起点、D 为终点而方向从 C 指向 D 的一个位移矢量.习惯上,印刷用黑体字母 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ 等表示矢量;书写则用 $\vec{a}$,$\vec{b}$,$\vec{c}$或$\overrightarrow{AB}$等来表示矢量.

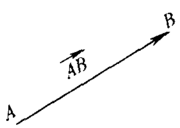

图 9-5

矢量的大小称为矢量的**模**,矢量 $\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AB}$的模分别记为$|\boldsymbol{a}|$,$|\overrightarrow{AB}|$.

模等于 1 的矢量称为**单位矢量**.与矢量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位矢量记为$\boldsymbol{e}_a$. $\boldsymbol{e}_a$ 也称为$\boldsymbol{a}$ 的单位矢量.

两个矢量 $\boldsymbol{a}$ 和$\boldsymbol{b}$,如果它的大小相等而且方向相同,则称矢量 $\boldsymbol{a}$ 与$\boldsymbol{b}$ 是相等的,记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

根据上述矢量相等的规定可知,两个矢量相等并不需要它们在位置上完全重合,这种矢量称为**自由矢量**.本书所讲的矢量均指自由矢量.

模等于零的矢量称为**零矢量**,记为 $\boldsymbol{0}$,由于零矢量的起点和它的终点重合,所以零矢量的方向是任意的.我们规定:**一切零矢量都相等**.

二、矢量的加法

由物理实验知道,如果有两个力 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 作用在某物体的同一点上,那么合力 $\boldsymbol{F}$ 的**方向**就是以$\boldsymbol{F}_1$,$\boldsymbol{F}_2$ 为邻边的平行四边形的对角线方向,**大小**是对角线的长,如图 9-6 所示.如果不考虑其具体的物理意义,就得到两个矢量的和的概念.

定义 1 将 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 的起点放于同一点,以 $\boldsymbol{a}$ 和$\boldsymbol{b}$ 为邻边作平行四边形,则称对角线矢量 $\boldsymbol{c}$ 为矢量$\boldsymbol{a}$ 与矢量$\boldsymbol{b}$ 的和,如图 9-7 所示,记为 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

这种求矢量和的方法称为**平行四边形法**.

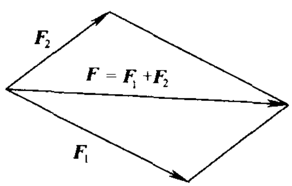

图 9-6

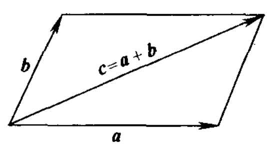

图 9-7

由于平行四边形对边相等，所以由图 9-7 不难得出：如果将 $\boldsymbol{b}$ 的起点接在 $\boldsymbol{a}$ 的终点上，则以 $\boldsymbol{a}$ 的起点为起点，以 $\boldsymbol{b}$ 的终点为终点的矢量 $\boldsymbol{c}$ 即为矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，如图 9-8 所示．这种求矢量和的方法称为**三角形法**．

三角形法的优点是能较方便地推广到多于两个矢量的情形．例如求三个矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的和时，只须依次地把一个矢量的起点接在另一个矢量的终点上，使其首尾相接，然后以第一个矢量的起点为起点，以最末那个矢量的终点为终点作矢量，即为所求矢量的和，如图 9-9 所示．

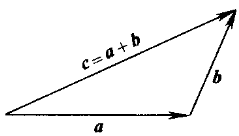

图 9-8

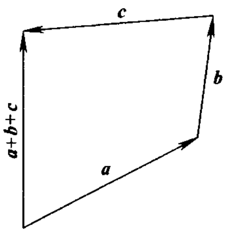

图 9-9

容易证明，矢量的加法满足交换律和结合律，即

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$$

与
$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}).$$

三、矢量的减法

与数量的减法相类似，可以定义矢量的减法为矢量加法的逆运算．

定义 2　若矢量 $\boldsymbol{b}$ 与矢量 $\boldsymbol{c}$ 的和为矢量 $\boldsymbol{a}$，则称矢量 $\boldsymbol{c}$ 为矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差，记为 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$．

由减法的定义可得矢量减法的几何作图法，即：把矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的起点都移到同一点 O，差 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 就是从 $\boldsymbol{b}$ 的终点到 $\boldsymbol{a}$ 的终点的

矢量$\boldsymbol{c}$.如图 9-10 所示.

与矢量 $\boldsymbol{b}$ 的方向相反而大小相等的矢量称为$\boldsymbol{b}$ 的**逆矢量**,记为$-\boldsymbol{b}$.

应用逆矢量的概念,可以把矢量的减法看成矢量的加法来运算.这样,容易用作图法得到矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$,如图 9-11 所示,这与熟知的代数法则是一致的.

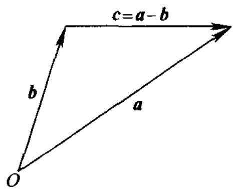

图 9-10

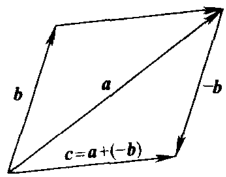

图 9-11

四、数量与矢量的乘法

定义 3 数量 λ 与矢量$\boldsymbol{a}$ 的乘积仍是一个矢量,记为 $\lambda\boldsymbol{a}$. $\lambda\boldsymbol{a}$ 的模是矢量$\boldsymbol{a}$ 的模的$|\lambda|$倍,即$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$. 当 $\lambda>0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与$\boldsymbol{a}$ 同向;当 $\lambda<0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与$\boldsymbol{a}$ 反向.

特别地,当 $\lambda=0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 为一零矢量.

数量与矢量的乘法满足如下的结合律和分配律.

设 λ,μ 是数量,$\boldsymbol{a}$ 和$\boldsymbol{b}$ 是矢量,则

(ⅰ) $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$;

(ⅱ) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$;

(ⅲ) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

(ⅰ)与(ⅱ)的成立很明显,(ⅲ)则可利用相似三角形对应边成比例的性质来证明.图 9-12 是 $\lambda>1$ 的情形.

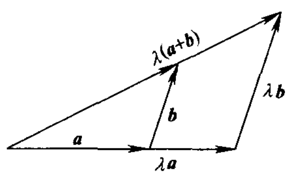

图 9-12

例 1 设 A,B 为x 轴上的两点,

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

其坐标分别为 x_1, x_2, $\boldsymbol{i}$ 表示与 x 轴正向一致的单位矢量,试证明:$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}$.

证 (1) 如图 9-13 所示,设 $x_1<x_2$,则$\overrightarrow{AB}$与$(x_2-x_1)\boldsymbol{i}$ 的方向相同,且

$$|\overrightarrow{AB}|=x_2-x_1,$$

$$|(x_2-x_1)\boldsymbol{i}|=|x_2-x_1||\boldsymbol{i}|=x_2-x_1,$$

所以
$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}.$$

(2) 如图 9-14 所示,设 $x_1>x_2$,则 $x_2-x_1<0$,这时矢量$\overrightarrow{AB}$与$(x_2-x_1)\boldsymbol{i}$ 的方向均与$\boldsymbol{i}$ 的方向相反,所以$\overrightarrow{AB}$与$(x_2-x_1)\boldsymbol{i}$ 的方向相同,而且

$$|\overrightarrow{AB}|=(x_1-x_2),$$

$$|(x_2-x_1)\boldsymbol{i}|=|x_2-x_1||\boldsymbol{i}|=x_1-x_2,$$

所以
$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}.$$

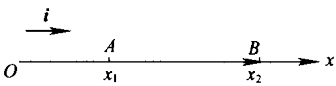

图 9-13

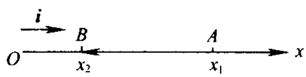

图 9-14

(3) 当 $x_1=x_2$ 时,$\overrightarrow{AB}$与$(x_2-x_1)\boldsymbol{i}$ 均为零矢量,根据规定,它们是相等的.

综上所述即得

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}.$$

习　题　9-2

1. 已知矢量 $\boldsymbol{a}$ 与$\boldsymbol{b}$ 的夹角为$60°$, $|\boldsymbol{a}|=4$, $|\boldsymbol{b}|=3$,求$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$与$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$的值.

2. 设 $\boldsymbol{a}$ 与$\boldsymbol{b}$ 为两个非零矢量,试用图形证明:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}.$$

3. 设点 M 为平行四边形 $ABCD$ 对角线的交点，若记$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示矢量$\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{MC}$和$\overrightarrow{MD}$.

第三节　矢量的坐标表达式

可以看到，前面所讲的矢量运算，实际上只是一种几何运算，其优点是直观，但是运算起来很不方便. 下面引进矢量的另一种表示法，即矢量的坐标表达式. 利用这种表示法，可以使矢量的运算变得非常简单.

一、矢量在轴上的投影

设已知空间一点 A，过 A 点作一平面垂直于 u 轴，交于点 A'，则点 A'称为点 A 在 u 轴上的**投影**，如图 9-15 所示. 于是，若已知矢量$\overrightarrow{AB}$的起点 A 和终点 B 在 u 轴上的投影分别为 A' 和 B'（如图 9-16 所示），则有向线段$\overrightarrow{A'B'}$的值 $A'B'$ 叫做矢量$\overrightarrow{AB}$在 u 轴上的投影，记作 $\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}$，即

$$\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}=A'B'.$$

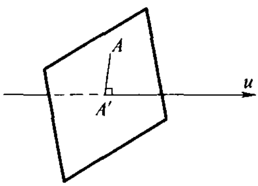

图 9-15

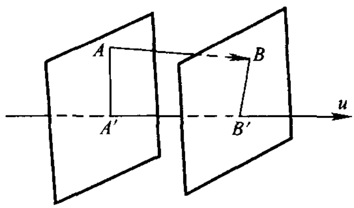

图 9-16

下面介绍两个关于投影的定理.

定理 1　矢量$\overrightarrow{AB}$在 u 轴上的投影等于$\overrightarrow{AB}$的模乘以该矢量与 u 轴的夹角 θ 的余弦，即

$$\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cos\theta\quad(0\leqslant\theta\leqslant\pi).$$

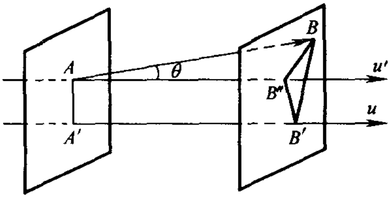

图 9-17

证 如图 9-17 所示，矢量$\overrightarrow{AB}$与 u 轴的夹角是指矢量$\overrightarrow{AB}$与 u 轴正向间的夹角，通过矢量$\overrightarrow{AB}$的起点 A 作一 u'轴，使 u'轴平行于 u 轴且有相同的方向，则矢量$\overrightarrow{AB}$与 u 轴之间的夹角 θ 等于矢量$\overrightarrow{AB}$与 u'轴间的夹角. 于是

$$\mathrm{Prj}_u \overrightarrow{AB} = \mathrm{Prj}_{u'} \overrightarrow{AB} = AB'' = |\overrightarrow{AB}| \cos\theta.$$

矢量在 u 轴上的投影是数量，当 $0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}$ 时，$\mathrm{Prj}_u \overrightarrow{AB} > 0$；当 $\frac{\pi}{2} < \theta \leqslant \pi$ 时，$\mathrm{Prj}_u \overrightarrow{AB} < 0$；当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时，$\mathrm{Prj}_u \overrightarrow{AB} = 0$.

定理 2 有限个矢量的和在 u 轴上的投影等于各个矢量在 u 轴上的投影的和.

下面就三个矢量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 的情形来证明.

证 如图 9-18 所示，取 u 为投影轴，并作折线 $ABCD$，使

$$\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}_1,\ \overrightarrow{BC} = \boldsymbol{a}_2,\ \overrightarrow{CD} = \boldsymbol{a}_3,$$

则由三角形法知矢量$\overrightarrow{AD}$就是矢量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 的和，即

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3.$$

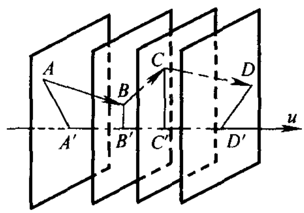

图 9-18

设点 A, B, C, D 在 u 轴上的投影依次为 A', B', C', D'，则

$$\mathrm{Prj}_u \overrightarrow{AB} = A'B';\ \mathrm{Prj}_u \overrightarrow{BC} = B'C';$$

$$\mathrm{Prj}_u \overrightarrow{CD} = C'D';\ \mathrm{Prj}_u \overrightarrow{AD} = A'D'.$$

因为
$$A'B' + B'C' + C'D' = A'D',$$
所以
$$\mathrm{Prj}_u \overrightarrow{AD} = \mathrm{Prj}_u \overrightarrow{AB} + \mathrm{Prj}_u \overrightarrow{BC} + \mathrm{Prj}_u \overrightarrow{CD},$$

即 $$\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3)=\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_1+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_2+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_3.$$

二、矢量的坐标表达式

在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，以 O 为起点，在坐标轴 Ox，Oy，Oz 上分别取三个单位矢量，其方向与轴的正向相同，并分别以 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 表示，这三个单位矢量称为**基本单位矢量**.

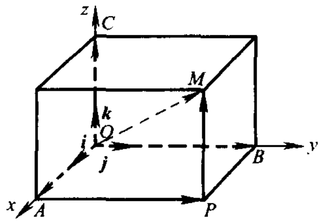

图 9-19

如图 9-19 所示，设矢量$\overrightarrow{OM}$的起点在原点，终点 M 的坐标为 (x,y,z)，则有

$$\mathrm{Prj}_x\overrightarrow{OM}=OA=x,$$
$$\mathrm{Prj}_y\overrightarrow{OM}=OB=y,$$
$$\mathrm{Prj}_z\overrightarrow{OM}=OC=z.$$

于是 $$\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{i},\ \overrightarrow{OB}=y\boldsymbol{j},\ \overrightarrow{OC}=z\boldsymbol{k}.$$

而由矢量的加法得

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC},$$

即 $$\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

上式称为矢量$\overrightarrow{OM}$的**坐标表达式**. 其中投影 x,y,z 依次称为矢量$\overrightarrow{OM}$在三个坐标轴上的**坐标**.

由于两相等矢量在同一轴上的投影相等，所以无论把一矢量的起点放在空间任何位置上，它在坐标轴上的投影都是不变的. 如果矢量 $\boldsymbol{a}$ 在坐标轴上的投影（即坐标）依次为 a_x,a_y,a_z，则其坐标表达式就为

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}.$$

下面将矢量用它的坐标表示，看其给矢量的运算带来多么大的方便.

设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，由于

$$\mathrm{Prj}_x(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathrm{Prj}_x\boldsymbol{a}+\mathrm{Prj}_x\boldsymbol{b}=a_x+b_x,$$

$$\mathrm{Prj}_y(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathrm{Prj}_y\boldsymbol{a}+\mathrm{Prj}_y\boldsymbol{b}=a_y+b_y,$$

$$\mathrm{Prj}_z(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathrm{Prj}_z\boldsymbol{a}+\mathrm{Prj}_z\boldsymbol{b}=a_z+b_z,$$

所以 $$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x+b_x)\boldsymbol{i}+(a_y+b_y)\boldsymbol{j}+(a_z+b_z)\boldsymbol{k}.$$

类似地有

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_x-b_x)\boldsymbol{i}+(a_y-b_y)\boldsymbol{j}+(a_z-b_z)\boldsymbol{k}.$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda a_x\boldsymbol{i}+\lambda a_y\boldsymbol{j}+\lambda a_z\boldsymbol{k}\quad(\lambda\text{ 为常数}).$$

于是，利用矢量的坐标表达式，把矢量的运算就化为了数量的运算.

例 1 设点 $A(x_1,y_1,z_1)$与点 $B(x_2,y_2,z_2)$，求$\overrightarrow{AB}$的坐标表达式，

解 如图 9-20 所示，连结$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$，则

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}.$$

因为 $\overrightarrow{OB}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}$，$\overrightarrow{OA}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}$，

所以 $$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}.$$

例 2 已知 $M_1(x_1,y_1,z_1)$与 $M_2(x_2,y_2,z_2)$，λ 为一常数，在线段 M_1M_2 上找一点 M，使 $M_1M:MM_2=\lambda$，试求分点 M 的坐标.

解 如图 9-21 所示，设点 M 的坐标为(x,y,z)，依题意得

$$\overrightarrow{M_1M}=\lambda\,\overrightarrow{MM_2}.$$

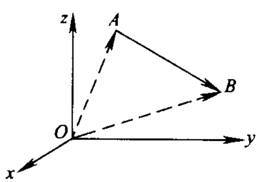

图 9-20

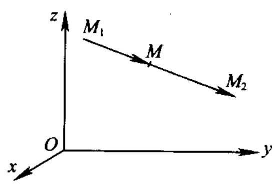

图 9-21

由例1知

$$\begin{aligned}&(x-x_1)\boldsymbol{i}+(y-y_1)\boldsymbol{j}+(z-z_1)\boldsymbol{k}\\&=\lambda(x_2-x)\boldsymbol{i}+\lambda(y_2-y)\boldsymbol{j}+\lambda(z_2-z)\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

所以,得

$$x-x_1=\lambda(x_2-x),\ y-y_1=\lambda(y_2-y),\ z-z_1=\lambda(z_2-z).$$

于是,解出 x,y,z 即得分点 M 的坐标为

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\ z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda},$$

其中 $\lambda\neq-1$. 特别地,当 $\lambda=1$ 时,得线段 M_1M_2 中点 M 的坐标为

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\ y=\frac{y_1+y_2}{2},\ z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

三、矢量的模和方向余弦

设已知点 $A(x_1,y_1,z_1)$与点 $B(x_2,y_2,z_2)$,则

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}.$$

矢量$\overrightarrow{AB}$的模就是A 与B 两点间的距离. 于是由两点间的距离公式即得

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

特别地,当矢量的起点为原点 O,终点为 $M(x,y,z)$,则

$$|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

设非零矢量

$$\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{k}+z\boldsymbol{j}$$

与坐标轴 Ox,Oy,Oz 的正向间的夹角依次为α,β,γ,则 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为这个矢量的**方向余弦**.

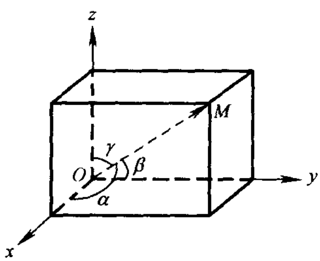

图 9-22

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com