

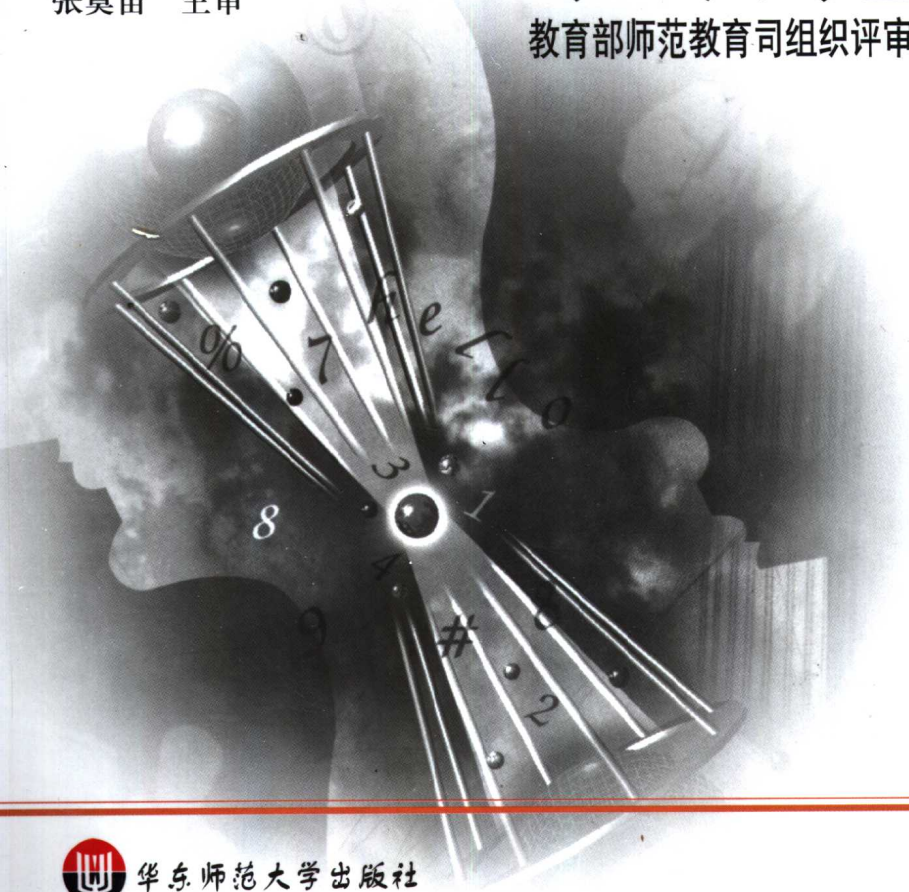


现代数学大观

赵小平 主编

张奠宙 主审

教育部师范教育司组织评审



华东师范大学出版社

现代数学大观

赵小平 主编
张奠宙 主审

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

现代数学大观/赵小平主编. —上海:华东师范大学出版社,2002.9
ISBN 7-5617-3011-X

I. 现... II. 赵... III. 高等数学-师资培训-教材 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 056950 号

现代数学大观

主 编 赵小平

责任编辑 宋维锋

封面设计 黄惠敏

版式设计 蒋 克

出版发行 华东师范大学出版社

市 场 部 电话 021-62865537

传真 021-62860410

<http://www.ecnupress.com.cn>

社 址 上海市中山北路 3663 号

邮编 200062

照 排 南京理工排版校对有限公司

印 刷 者 江苏昆山亭林印刷总厂

开 本 890 × 1240 32 开

印 张 10.75

字 数 283 千字

版 次 2002 年 9 月第一版

印 次 2002 年 9 月第一次

印 数 001-5100

书 号 ISBN 7-5617-3011-X / O · 126

定 价 14.00 元

出 版 人 朱杰人

(如发现本版图书有印订质量问题,请寄回本社市场部调换或电话 021-62865537 联系)

编者的话

本教材是华东师范大学数学系教师的集体创作，只有一个例外：北京师范大学的严士健教授。他为本书写了“鱼塘里有多少鱼——从超几何分布谈起”。一本教材为何要动员如此多的教授来完成，究竟难在何处？

本书创作的艰辛，一言难尽。首先是没有类似的著作可做参考，一切几乎都得从头做起。其次是现代数学内容广泛，一个人的知识范围有限，不得不集中大家的智慧。再次，更难的是通俗化。各门数学学科的专家有自己的一套语言、概念、定义、定理、公式，如果照此写下来，读者必定昏昏欲睡。因此，如何将朴素的原始数学思想以生动、平和的语言写出来，使读者得到现代数学观念的熏陶，是本书写作的最难之处。写成现在这个样子，已经花了九牛二虎之力，但是仍然不能说令人满意。

本书是中学数学骨干教师国家级培训的产物。《现代数学选讲》是一门必修课。本书就是该课的一份讲义。为中学教师写书，应是高师院校教师的责任，也是一份光荣。不过，许多中学教师似乎并不喜欢这门课，说是离开中学太远，适应不了教学需要。这有数学教师方面的原因，更多是这门课程内容上的问题。这份讲义，是在正反两方面经验的基础上完成的。教学效果逐步改进，最后受到了一定的欢迎。

中学数学教师不喜欢现代数学是一个老问题，也是个普遍的问题。这是数学的悲哀，也是数学教育的悲哀。君不见，中学物理课本里有爱因斯坦的相对论，化学教材里有“化学键”理论。生物学教师不懂“克隆”、DNA 和 RNA 的常识觉得说不过去，语文教师则和大

学教授一样地研究鲁迅、老舍、郭沫若，达到当代研究的前沿。为什么惟独中学数学和现代数学如此隔绝？

确实，数学有其严格的逻辑顺序，往往不是螺旋上升，而是“初等数学”、“高等数学”那样地直线安排。有人把它形容为“铁路警察，各管一段”。中学数学老师不懂现代数学，照样当特级教师。但是，特点只是特点而已，总不能脱离一般的科学规律。事实上，数学还有另外生动活泼的一面，数学的原始观念同样是朴素易懂的。现代数学和中学数学之间并没有不可逾越的鸿沟。数学的表述过于形式化，给人那种“枯燥”“干瘪”“难懂”的感觉，责任在数学家自己。过去，数学以女王自居，又不肯走下“王位”，“与民同乐”。但是，随着时代的改变，数学正在深入到各行各业，乃至千家万户。数学已经从幕后走到台前，以数学技术服务于社会，显示出“高效、优质”服务的“侍女”的一面。“女王”和“侍女”是数学的两个侧面，缺一不可。数学，是到了要改变自己公众形象的时候了。本书就是这样一种尝试。我们用尽量通俗的笔触，把现代数学若干侧面展现出来，力图给人一种易于接近、比较可亲的形象。

一些中学数学教师不喜欢现代数学，酿成这杯苦酒的还有高师院校自己。高师数学系的课程中，过度追求形式化成为一种遗传，一直带到中学。数学教学要讲推理，但更要讲道理；要讲究严格表述，也要提倡直观把握。物理学讲原子反应，大家均不知其详，却依然听得津津有味。惟独数学的规矩，要讲就“讲深讲透”，推导正确，证明完备。师范性要求中学数学教师如此束缚自己，事事都谨小慎微，不敢往前迈步，实在有点害人。例如，高师数学系课程中有“几何基础”、“数的概念”之类老前辈已经开拓好的平台，本来了解平台之后“大胆地往前走”就是了，偏偏只有高师数学系“谆谆告诫”说，这是“基本功”啊，“基础”啊，不学好将来危险啊（综合性大学数学系从来不开这些课，却没有任何危险）！难道师范院校只会往下看，往后看？多往前看看如何？于是我们设想这本《现代数学大观》，应该体现往前看的态度。“大观”的有些内容，不能深究，也只是“望望”而已。比如看一个建筑，可以观察内在细部结构或工艺技术；也可以是瞭望其

外部轮廓、欣赏其外在的美,求得总体把握。总之,许多数学也是可以“望一下”的。当然,严格推理和大胆想象,局部处理和宏观考察,二者需要有机结合,不能单打一。

时序到了2001年,新世纪开始了。数学教育呈现出新气象。国家中小学数学课程标准有了重大变化。微积分、矩阵向量、数据处理、算法分析、数学建模、数学文化,都会相继进入高中课程,再用老眼光看中学,“固守”初等数学,恐怕是不行了。高师数学系的面貌也在改变。数学建模、数学实验、数学教育概论、数学教育技术,包括“现代数学大观”等等课程,都会使未来的数学教师具有新的数学观念和数学知识结构。那时,中学数学教师懂一些现代数学,就是水到渠成的事。

最后,我们说说本书的结构。这里一共有三个部分:

第一部分,现代数学概貌。这是宏观地考察20世纪的数学和展望21世纪的数学。数学是社会的一部分,我们应当从社会进步的角度寻找数学发展的轨迹,不能只在数学内部的逻辑关系里兜圈子。

第二部分,现代数学基础专题选讲。它涉及一批基本的数学专题,从集合论开始,包括随机性数学、模糊性数学、数学结构、拓扑方法、算法分析、统计聚类、运筹优化、选举模型等等。主要是了解现代数学的基本思想和基本走向。读者可以借助一些例子,体会现代数学的真谛和价值。

第三部分,现代数学若干进展介绍。这一组问题涉及现代数学的重要事件和主要成就。包括编码和密码、时空几何、费马大定理的解决、小波分析、非线性数学、混沌、分形、金融数学等等。这些课题在一定程度上反映了当代数学的进展。尽管内容比较深奥,但叙述上强调深入浅出,读懂一个大概是必要和可能的。

本书称为“大观”,就是想让学生知其大意、观其轮廓、感受其深刻、欣赏其美丽,旨在扩大视野,提高修养。当然,这里并非只是空话,还是有真正的数学内容,至少是一些重要的范例和问题,还是要弄清其数学含义。

凡事开头难。我们希望通过这门课程的开设,有助于数学教师

数学观的转变,数学教育观的更新,以新的面貌,迎接 21 世纪的挑战。至于是否能够达到原有的设想,则需要由实践来检验,特别是中学教师的检验。我们期待着。

编审者

2001 年 9 月

作者分工:

第一章 张莫宙

第二章 张莫宙 蒋鲁敏 赵小平 王继延 刘宗海 等

第三章 陈果良 王静龙 严士健 柴俊 袁震东 朱德明 沈纯理 陈
志杰 等

前 言

数学,一种古老而又年轻的文化。人类从蛮荒时代的结绳计数,到如今用电子计算机指挥宇宙航行,无时无刻不受到数学的恩惠和影响。一个发达的社会,没有强盛的数学研究是不可想象的。

历史为我们作出了答复。古埃及尼罗河边的几何学为金字塔的辉煌催生。伴随古希腊文明出现的是《几何原本》。漫漫的中世纪长夜,欧洲数学归于沉寂。文艺复兴的来临,涌现出开普勒、笛卡儿、帕斯卡、费马这样的数学天才。17世纪的伟大科学革命,始自牛顿——一位伟大的物理学家,也是一位数学家,微积分的发明者。拿破仑的凯旋,孕育了法国数学学派。大数学家高斯、黎曼、克莱因、希尔伯特,随着德意志资产阶级的兴盛而成长。当1933年希特勒葬送德国数学之后,世界数学中心移到美国的普林斯顿。改变人类生活的电子计算机,出现于1940年代的美国,它的设计人是一位数学家:冯·诺伊曼。

2000年8月在日本东京举行国际数学教育大会,大会主席藤田宏教授提到数学发展史上的四个高峰:

公元前300年的欧几里得《几何原本》;

微积分的发明和应用;

19世纪至20世纪初的公理化数学;

以计算机技术为基础的当代数学。

和第二个高峰相似,当代数学课题更多地来自现实需要,数学方法丰富多样,数学和其他科学的交互作用空前活跃。许多高新技术的本质可以归结为一种数学技术。而且,数学作为一种技术,可以直接产生经济效益。这就是说,数学已从社会发展的幕后走向台前。

一场悄悄的数学革命,正在我们身边发生。

● 变化着的数学观——从陈景润到王选

1970年代末期,中国的科学春天来临。徐迟的报告文学《哥德巴赫猜想》风靡全国,陈景润的名字一夜之间传遍大江南北,成为中国科学复兴的英雄。他在“哥德巴赫猜想”上的成就至今仍在世界上领先。当费马猜想于1995年宣布解决之后,21世纪的数学难题中,彻底解决“哥德巴赫猜想”成为数学家面临的主要课题。

陈景润从事的数论,是一门纯粹科学。数论的价值何在?一方面,在智力奥林匹克赛场上角逐,胜者为王。另一方面,世界顶尖数论专家纷纷投身密码研究,数论研究涉及国家安全以及企业机密。但是,中国的数学和公众之间存在着某种隔膜。尽管陈景润的科学精神感人至深,但是公众普遍认为,数学只是其他科学的语言,只能作为训练思维的体操。至于数学对经济建设的贡献、对社会的推动则是间接的,演不了主角,顶多是“幕后英雄”而已。

进入1990年代,情况逐渐发生变化,数学技术开始在中国显示威力。一项闻名中外的科学成就又一次和数学结缘:以王选为总裁的方正集团开发了“汉字激光照排系统印刷技术”。王选,1962年毕业于北京大学数学系。他所领导的这项告别“铅与火”的印刷术革命,其原理基于一项数学技术——“数据压缩”。目前,方正集团及其伙伴占领了汉字印刷国内市场的99%,国外市场的70%。王选成为中国“最能挣钱的科学家之一”。数学可以直接产生经济效益,又一次为事实所证明。数学对社会的贡献已从间接服务转变到直接干预,也就是说,数学的社会功能已从单纯为其他学科提供工具,发展为直接创造价值。

● 无处不在的数学技术——从CT扫描到飞行控制

在第二次世界大战期间,许多数学家进行了反对希特勒法西斯的努力,一大批直接服务于战争需要的数学技术随之产生。

1940年,英国和美国海军为了对付德国潜艇的威胁,创立了运筹学。在不增加设备的情况下,依靠数学智力,运筹学可以帮助提高设备能力和使用效率。

1942年,苏联的柯尔莫哥洛夫和美国的维纳分别研究火炮的自动跟踪装置,发展随机过程的预测和滤波理论,提高防空效率。1948年维纳发表著名的《控制论》。

1939年起,英国的数学家图灵帮助英国情报部门破译德军密码成功。美军破译日军密码电报,击落日本大将山本五十六的座机。

1944年,冯·诺伊曼创立的对策论用于太平洋战争的战术决策。

美国政府组织的“应用数学小组(AMP)”,参与空中火箭发射、水下弹道、B-52轰炸机的计算等。数学家参与原子弹的研制。波兰裔数学家S·乌拉姆为氢弹研制作出了关键贡献。

数学在反法西斯战争中卓有成效的工作,极大地改造了数学本身。战后和平时期的数学技术,基于计算机的应用在更广阔的范围展开。

1950年,冯·诺伊曼等使用电子计算机进行“数值”天气预报。他们使用计算机求解大气环流方程,迅速得出数学解,和经验预报相印证,获得成功。

计算机技术的迅猛发展,使得计算机模拟技术得以实现。飞机设计不必都在风洞中做实验,测试大炮性能不必都采用实弹射击,原子弹等地下核试验可以在计算机上模拟,甚至可以在计算机上进行军事演习。

1979年的诺贝尔医学奖授予美国的柯马克和英国的洪斯费尔德,褒奖他们运用数学上的拉东变换原理,设计了CT层析仪。人体层析摄影技术造福千千万万的人群,说到底乃是一种数学技术的实现。

工业管理的自动化,除自动化设备之外,往往还有一项价值上百万的“说明书”,其实就是一个“数学模型”,一些数据而已。

人们享受数学文明可说无处不在。飞机起飞降落定位需要卡尔曼滤波技术,汽车设计需要计算机模拟,企业管理使用数学模型,医院看病使用数字技术,药品效果有赖统计分析,股票涨落需要数学估算,计算机设计使用2进位数,软件设计依赖离散数学,人工智能的

基础是数学方法……

在社会科学方面,人口预测、环境控制、保险精算、交通管理、社会发展模型,都离不开数学的参与。《红楼梦》作者是谁?统计学家作出了客观的判断。

1990年代以前,日本是电视大国。为研制高清晰度电视的制式,日本和西欧国家在模拟制式上投入了数十亿美元。但是,1993年美国的数字化电视方案出世后,立即“横扫千军”,使模拟式方案变成一张废纸。支持电视数字化的是一种数学技术——小波技术,它能将庞大的数据压缩到最低限度,使得图像的數字传输成为可能。这样,21世纪世界电视业的领导权也就落入美国手中。数学技术的威力,由此可见一斑。

有人预言,未来的数学研究,只有10%的工作以发表论文为目的,90%的数学将是到各行各业用计算机解决那里的数学问题。这种估计虽然有些言过其实,但作为一种发展趋势,恐怕不无道理。

● 金融数学异军突起——诺贝尔经济学奖中的数学工作

经济学中运用数学方法,在计划经济时代曾经不被重视。1938年,苏联著名数学家康特罗维奇创建“线性规划”方法,可以使线性约束条件下的线性目标达到最优。不过它在苏联长期未能推广。但是,美国独立发现的线性规划方法,每年可以为企业获得几十亿美元的经济效益。1971年,康特罗维奇和美国的柯普曼共同获得诺贝尔经济学奖。

西方的数理经济学已经有100多年的历史。其基本原理是一般经济均衡理论。一个经济体有生产者和消费者。消费者追求消费的最大效用,生产者追求生产的最大利润。价格杠杆对需求和供给进行调节,最终使市场达到一个理想的平衡。这套理论的理想研究方式是数学方法,特别是公理化方法。用数学工具得到理想均衡模型的经济学家,先后成为诺贝尔经济学奖获得者。其中有1970年的萨缪尔森,1972年的希克斯、阿罗,1983年的德布鲁。阿罗和德布鲁都是科班出身的数学家。

由于西方证券市场的发展,证券理论的研究和实践在经济学中

的地位日益突出,终于发生了“华尔街革命”。1990年的诺贝尔经济学奖授予马克维奇、夏普和米勒。他们研究如何在多种证券上投资,能使收益最大。他们把收益和风险这些本来非常模糊的概念变成明确的数学概念,并导出资本资产定价模型等重要理论。1997年的诺贝尔经济学奖则授予肖尔斯和默顿,他们的工作与期权定价理论有关。

期权,是指在未来某时刻以某种价格购买某货物的权利。比如,我们约定在明年11月1日,以每千克1元的价格收购1万千克的柑橘。如果那时的市价高于1元,则仍以1元收购。如果低于1元,则可以不收。这样的稳赚不赔的“期货购买权利”,当然要付出代价——期权的价格。1973年,布赖克和肖尔斯提出了计算期权定价的公式,这是用随机微分方程、布朗运动、随机积分等数学工具描述的一个公式。由于数学计算结果和期权实际成交价格十分吻合,这一数学金融技术引起了华尔街的“金融革命”。布赖克于1995年去世,所以没有和肖尔斯一起获得1997年的诺贝尔经济学奖。

在1990年代末,国际金融危机屡屡发生。英国老牌的巴林银行因期权投机而倒闭。亚洲金融危机爆发。国际金融大鳄想吞噬香港没有成功。一些对冲基金由于忽视小概率事件遭到重创。这些震荡世界的金融事件,都是金融数学的研究对象。异军突起的金融数学现已引起国人的极大重视,我国数学家也在这方面有一些出色的工作。1997年,国家自然科学基金会把金融数学列为优先发展的学科之一。

● 数学是统一的——“核心数学”更加“核心”

由于计算机技术的发展,20世纪下半叶数学发展的一个大趋势是应用。但是,应用数学的基础是“核心数学”。没有核心数学的支持,数学应用是走不远的。历史一再证明,许多数学不能立刻应用于实际,却往往在不经意的时候获得应用。19世纪高斯研究的数论,没想到会在20世纪的密码学中大显神威。非欧几何与张量分析是纯粹理性思维的产物,几十年后在爱因斯坦相对论中获得应用。拉东变换曾经是一个不起眼的纯理论,不想却为CT层析技术提供了

数学模型。三角级数是老学科了,数据压缩使用的小波技术正发生在这块土地上。陈省身在1940年代创建的纤维丛理论(整体微分几何),竟在1970年代的杨振宁-米尔斯规范场理论中得到解释。“数学有用”的不可思议性是我们认识数学的一项基本原则。

和数学应用一样,核心数学同样在飞速发展。“数学危机”“数学蒙难”只是某些哲学家在故作“惊人之语”。核心数学的发展趋势至少有以下特点:

第一,从线性到非线性。混沌、分形、动力系统等研究进展迅速。

第二,从交换到非交换。矩阵、算子的乘法都是不可交换的。

第三,从1维数学到高维数学,特别是4维和无穷维。

第四,随机数学和确定性数学、离散和连续、局部性质和整体性质间的对立与整合。

无论数学怎样发展,数学至今是统一的。由于中国过去的经济不够发达,数学课题不够前卫,数学观念不能迅速更新,才使得数学技术的价值没有在社会上、科学管理机构里,以及数学界自身得到充分认识。因此,近年来我国许多著名数学家大声疾呼数学应用的重要性。然而,发展数学技术决不是否定纯粹数学的价值。历史教训值得记取。应该说,“核心数学”更加“核心”,“应用数学”更加“应用”。我们所要做的只是数学的平衡发展。

2002年的国际数学家大会将在北京召开,这是中国数学进步的新起点。愿中国数学在新世纪里更上一层楼,实现“21世纪的数学大国”的理想。

目 录

前言	1
第一章 现代数学概貌	1
第一节 数学科学的百年回顾	3
第二节 展望数学的明天	16
第三节 核心数学的未来	28
第四节 应用数学和数学技术	39
第五节 “推测数学”可否存在	48
第六节 数学的统一性	57
第二章 现代数学专题选讲	63
第一节 谈无限:集合和基数	65
第二节 说变化:关系和函数	75
第三节 代数:运算和结构	82
第四节 几何:拓扑与图论	91
第五节 矩阵:生活中的数学	100
第六节 统计:聚类与层次分析	114
第七节 算法:从验血方案谈起	128
第八节 对策论的例:田忌赛马	136
第九节 背包问题和线性规划	146
第十节 选举中的数学	163
第三章 现代数学的若干进展	175
第一节 密码与编码	177
第二节 如虎添翼的迭代方法	194
第三节 收集和分析数据的艺术	206

第四节	池塘里有多少鱼——从超几何模型谈起·····	222
第五节	金融数学例谈·····	241
第六节	小波分析及其应用·····	258
第七节	分形几何概观·····	275
第八节	混沌现象:非线性数学 ·····	286
第九节	时间与空间的数学·····	299
第十节	费马大定理终于成为定理·····	314

第一章

现代数学概貌

