施光燕 编

# 线性代数

XIAN XING DAI SHU

中央广播电视大学出版社

# 线性代数

IAN XING DAI SHU

# 线 性 代 数

施光燕 编

中央广播电视大学出版社

（京）新登字 163 号

# 线 性 代 数

施光燕 编

*

中央广播电视大学出版社出版
新华书店总店科技发行所发行
中国人民解放军第一二〇二工厂印刷

*

开本 850×1168 1/32 印张 8.25 千字 191
1993 年 2 月第 1 版 1993 年 4 月第 1 次印刷
印数 1—35000
定价 5.65 元
ISBN 7-304-00756-7/O・58

# 前　言

本书的前三章是完全按照国家教委颁布的高等工程专科线性代数课程的教学基本要求，以及中央电大 1990 年制订的本课程教学大纲编写的。为满足不同的需要，特编写了第四章，简要地介绍了矩阵的特征值、特征向量，矩阵对角化和二次型的基本内容，以及讨论这些问题的实际意义，以便教学选用。由于这一章内容超出基本要求故标以“ * ”号。

本书在编写过程中注意到了以下几点：

1. 在内容安排上以线性方程组为主线，使线性代数的基本概念，理论以及计算方法围绕着解线性方程组而展开，旨在使内容连贯、重点突出，和使较抽象的向量空间内容安排较后，有利于读者循序渐进；同时使读者感受到研讨所论问题的需要。

2. 在内容深度上考虑到专科层次的特点和要求，突出计算能力的培养，同时又适时提出一些问题，引导归纳、比较和思考，在习题的配备中亦注意配置了一些训练逻辑思维和推理能力的题以供选用，旨在重视和强调实用性，同时又适当注意数学思维能力的训练。

3. 努力由实际例子引入一些重要的概念和计算方法，旨在使这些定义自然、易于理解和掌握。

4. 注意到远距离教学的特点，本书有较多的例题，较多地进行重要结论和方法步骤的归纳，并对所有习题附有答案，以利于自学。

5. 对习题中的证明题多在习题答案中写出详细证明，旨在为各类读者利用这些题目进行不同程度的训练提供条件。

本书的教学时数为27学时。

此书也可作为大专院校教学时数为25—30学时的线性代数教材或参考书，以及成人教育、函授和自学线性代数用书。

本书编写时参考了电大前用教材：丘维声编《高等代数讲义》(上)，居余马、胡金德编《线性代数及其应用》。

本书在编写过程中自始至终得到中央电大数学教研室梁映森、李林曙、赵坚、陈卫宏等老师的指导和帮助，他们提供了丰富的教学经验并对教材特点、具体内容处理提出了许多宝贵意见。在此特向他们表示衷心感谢。

参加本书审稿的有东南大学陶永德教授(主审)、江西大学王仲才教授、江西工业大学李火林教授和北京大学丘维声副教授。他们认真审阅了原稿，并提出不少改进意见，编者在定稿时采纳了这些意见，对此表示衷心感谢。

编　者

1992年1月

# 目　录

**第一章　$n$ 阶行列式** ………… 1
§1.1　二阶和三阶行列式 ………… 1
习题 1.1 ………… 4
§1.2　$n$ 阶行列式的定义 ………… 5
习题 1.2 ………… 8
§1.3　$n$ 阶行列式的性质 ………… 10
习题 1.3-1 ………… 16
习题 1.3-2 ………… 24
§1.4　$n$ 阶行列式的计算 ………… 25
习题 1.4 ………… 33
本章主要内容 ………… 39
**第二章　矩阵** ………… 40
§2.1　矩阵的定义和代数运算 ………… 40
习题 2.1 ………… 47
§2.2　矩阵代数运算的性质 ………… 51
习题 2.2 ………… 57
§2.3　矩阵的转置和对称矩阵 ………… 60
§2.4　$n$ 阶方阵的行列式 ………… 63
习题 2.3-2.4 ………… 67
§2.5　逆矩阵 ………… 69
习题 2.5-1 ………… 73
习题 2.5-2 ………… 84
§2.6　$n$ 元线性方程组的矩阵解法 克莱姆法则 ………… 87

习题 2.6 …………………………………………………… 93
§2.7 分块矩阵…………………………………………………… 95
习题 2.7 …………………………………………………… 105
§2.8 矩阵运算举例 …………………………………………… 109
习题 2.8 …………………………………………………… 115
§2.9 矩阵的初等行变换和初等矩阵 ………………………… 118
习题 2.9 …………………………………………………… 126
§2.10 矩阵的秩…………………………………………………… 128
习题 2.10 …………………………………………………… 138
本章主要内容…………………………………………………… 140
**第三章 线性方程组**…………………………………………… 142
§3.1 高斯消元法 ……………………………………………… 143
习题 3.1 …………………………………………………… 152
§3.2 线性方程组相容性定理 ………………………………… 155
习题 3.2 …………………………………………………… 159
§3.3 $n$ 维向量及 $n$ 维向量组的线性相关性 …………… 163
习题 3.3-1 …………………………………………………… 171
习题 3.3-2 …………………………………………………… 180
§3.4 向量组的极大无关组与向量组的秩 …………………… 184
习题 3.4 …………………………………………………… 192
§3.5 向量空间 ………………………………………………… 194
习题 3.5 …………………………………………………… 203
§3.6 线性方程组解的结构 …………………………………… 206
习题 3.6-1 …………………………………………………… 212
习题 3.6-2 …………………………………………………… 220
本章主要内容…………………………………………………… 224

**第四章　矩阵的特征值、特征向量** ………………………… 226
§4.1　矩阵的特征值、特征向量……………………………… 229
习题 4.1 ……………………………………………………… 234
§4.2　矩阵的对角化 …………………………………………… 238
习题 4.2 ……………………………………………………… 244
§4.3　二次型 …………………………………………………… 247
习题 4.3 ……………………………………………………… 252
本章主要内容…………………………………………………… 255

# 第一章　$n$ 阶行列式

在线性代数的一些问题研究中，如线性方程组、矩阵等问题，常要利用行列式作工具。在数学的其他分支中也常常要用到行列式。在初等数学中已讨论过二阶、三阶行列式的定义、性质和计算。现在我们进一步讨论 $n$ 阶行列式的定义、性质和计算。

## §1.1　二阶和三阶行列式

在初等数学中，解二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & (2) \end{cases}$$

用消元法，得

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 & (3) \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2 & (4) \end{cases}$$

为了便于使用与记忆，把上面出现的那种四个数之间的特定算式记为

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} := ad - bc \tag{5}$$

并称为二阶行列式。利用二阶行列式的概念，二元一次方程组当它的系数组成的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$$

时，二元一次方程组的解就可简洁地表为

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \qquad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \tag{6}$$

由此可见二阶行列式就是由其元素之间的特定运算所得到的一个数值。

类似地，为了便于记忆和表达三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{7}$$

的解，引进记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} := (-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}$$

$$\cdot\, a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{32}a_{23}a_{11}-a_{33}a_{21}a_{12} \tag{8}$$

并称为三阶行列式。

**例 1** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 6 & 8 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}$

$=2(0\times8-5\times6)-(4\times8-5\times(-1)+3(4\times6-0\times(-1))$

$=2\times(-30)-37+3\times24=-25$

所以，三阶行列式也是一个数值，它可以通过转化为二阶行列式计算得到。

用消元法解三元一次方程组(7)，利用三阶行列式的概念，在系数行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

时，其解同样可简洁地表为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \tag{9}$$

解的表达式(6)和(9)，很容易抓住规律进行记忆，分母均是相应的系数行列式，$x_i$ 的分子是把系数行列式的第 $i$ 列换成方程组中的常数项，其余列不动所得到的行列式。

**例 2** 解三元一次方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

**解** 利用解的公式(9)，先计算系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$=(2-4)-2(-4+1)+(8-1)=11\neq 0$$

$$\therefore \qquad x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}}{11} = -\frac{5}{11}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{11} = \frac{2}{11}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 3 \end{vmatrix}}{11} = \frac{23}{11}$$

鉴于二、三阶行列式在讨论二、三元一次方程组时所起的作用，在我们讨论具有 $n$ 个未知数(元)的线性(一次)方程组之前，先把二、三阶行列式的概念推广至一般的 $n$ 阶行列式。上述的 $n$ 是任意的正整数。

## 习题 1.1

1. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 6 \end{vmatrix}$　　(4) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix}$

(5) $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ (6) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}$

2. 利用解的表达式(9)解三元一次方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

### 习 题 答 案

1. (1) 19；(2) 0；(3) 20；(4) 103；

(5) $a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})$；(6) $abc$

2. $x_1=2, x_2=-1, x_3=3$

## §1.2 $n$ 阶行列式的定义

我们由二阶行列式，以及三阶行列式和二阶行列式的关系，推广到一般情形而得到 $n$ 阶行列式的定义。

**定义 1** 由 $n^2$ 个数排列成 $n$ 行 $n$ 列(横的称行，竖的称列)，并左、右两边各加一竖线，即

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1}$$

称为 $n$ 阶行列式，它代表一个由确定的运算关系所得到的数。当 $n=2$ 时

$$D_2 := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{2}$$

当 $n>2$ 时

$$D_n := a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j} \tag{3}$$

其中数 $a_{ij}$称为第 $i$ 行第 $j$ 列的元素；

$$A_{ij} := (-1)^{i+j}M_{ij} \tag{4}$$

称为 $a_{ij}$的代数余子式；$M_{ij}$为由 $D_n$ 划去第 $i$ 行和第 $j$ 列后余下元素构成的 $n-1$ 阶行列式，即

$$M_{ij} := \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{5}$$

称为 $a_{ij}$的余子式。

例如四阶行列式

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & -1 & 7 & 0 \\ 5 & -2 & 8 & -3 \\ -4 & 9 & -5 & -6 \end{vmatrix}$$

中，元素 $a_{23}$的余子式即为划去第二行和第三列后的三阶行列式

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \\ -4 & 9 & -6 \end{vmatrix}$$

元素 $a_{23}$的代数余子式即为余子式 $M_{23}$前再加一符号因子

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \\ -4 & 9 & -6 \end{vmatrix}$$

根据定义可以知道一个 $n$ 阶行列式代表一个数值，而且这个数值可以利用定义由第一行所有元素与其相应的代数余子式乘积之和而求得。通常把这定义简称为按第一行展开。

**例 1** 计算三阶行列式

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ -2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

**解** 由定义

$$D_3 = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + (-4) \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$+ 2 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 12 + 4(15 - 6) + 2 \cdot 12$$

$$= 72$$

**例 2** 计算四阶行列式

$$D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & -4 \\ 7 & -1 & 0 & 5 \\ -2 & 6 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & -3 & -5 \end{vmatrix}$$

**解** 由定义

$$D_4 = 2 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 6 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & -5 \end{vmatrix} + (-4) \cdot (-1)^{1+4}$$

$$\cdot\begin{vmatrix}7&-1&0\\-2&6&1\\8&4&-3\end{vmatrix}=2\cdot\left[(-1)\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&0\\-3&-5\end{vmatrix}\right.$$

$$\left.+5\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}6&1\\4&-3\end{vmatrix}\right]+4\cdot\left[7\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}6&1\\4&-3\end{vmatrix}\right.$$

$$\left.+(-1)\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-2&1\\8&-3\end{vmatrix}\right]$$

$$=2[5+5(-18-4)]+4[7(-18-4)+(6-8)]$$

$$=-834$$

计算此例可以体会到第一行的零元素越多，按第一行展开时计算越方便。

## 习题 1.2

1. 两个不同阶的行列式可以比较大小吗？

2. 写出下面行列式中元素 $a_{32}$ 的余子式及代数余子式：

(1) $\begin{vmatrix}31&45&-100\\0&1&8\\-2&-3&1\end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix}a&a&a&2\\-a&3&2&6\\-a&0&7&a\\3&a&4&1\end{vmatrix}$

3. 写出下面行列式中元素 $a_{13}$ 的余子式及代数余子式：

(1) $\begin{vmatrix}4&5&6&7\\-1&-2&-3&-4\\1&2&4&0\\2&1&3&6\end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix}1&-1&2&-2\\3&4&5&7\\9&10&2&-3\\-3&0&1&8\end{vmatrix}$

4. 由定义计算行列式