幾何作圖

許莼舫著

中国青年出版社

幾 何 作 圖

許 蘊 舫 著

中国青年出版社
一九五五年·北京

書號219 數理化17

幾何作圖

著者 許莼舫

青年·開明聯合組織
出版者 中國青年出版社
北京東四12條老君堂11號

總經售 新華書店

印刷者 北京中國青年出版社印刷廠

開本 787×1092 1/32	一九五一年十一月第一版
印張 3 7/16	一九五四年四月北京第二版
字數 66,000	一九五五年五月北京第七次印刷
定價(7)0.33元	印數 81,001—93,000

北京市書刊出版業營業許可證出字第035號

修訂題記

從一九五二年秋季開學起，全國初、高中平面幾何教材已普遍採用東北人民政府教育部編譯的新教科書．這書是根據蘇聯十年制學校教科書編譯的，無論在內容和質量上，或編寫的方法和形式上，都明顯地表現了它各方面的優越性．

本書初版時，新教科書雖已在東北試用，但得到的經驗還少，對它的優點也體會得不够，所以本書沒有和它多多取得聯系，並儘量吸收它的優點．現在爲了要使採用新教科書的讀者得到參考上的更多便利，特地把本書作一次修訂．

新教科書對幾何作圖題非常重視，在習題本裏雖以計算題爲主，作圖題所占分量不多，但在課本的練習題中，作圖題幾占三分之二．其中有些題目看似很難（像本書範例 21 和 46 等），然而對分析思考和定理的運用等各方面，卻能獲得更多益處；又有些聯系實際的題目（像三心曲線和撞球問題等），能增加學習興趣；而尤以代數解析法的問題特別豐富，可和代數計算取得聯系．這些比較優越的題目，本書儘量採入，所以修訂後的篇幅比原書增加約十分之三．

本書經修訂後，一定還存在許多缺點，希望讀者指正．

許莼舫　一九五三年五月

作者的話

一般同學在學習平面幾何學的時候，或多或少總存在着一些困難．研究它的原因，主要是以下的四點：(1)對於基本觀念瞭解得不够清楚．(2)依照理論系統編排的教科書不易兼顧到歸納類化，因而使初學者難於掌握解題的方法．(3)教科書中的例題太少，引導和啓示得不够，難收觀摩之效．(4)只知死記定理和法則，不會把它們靈活運用．作者因爲有這樣的感覺，才編了這一套小書．這套書分‘幾何定理和證題’，‘幾何作圖’，‘軌跡’，‘幾何計算’四册．內容主要是幫助同學們瞭解教科書中的材料，指導同學們運用定理和法則，掌握解題的正確方法；同時又兼顧到提高．所以，本書是和教科書相輔爲用的，也可以說是補助教科書的不足的．

這是關於幾何作圖的一册，編排方法和前一册類似．先從實際問題出發，來解釋幾個基本的觀念，使同學們獲得徹底的瞭解．再分門別類，啓示各種作圖題的分析思考，尋求解答的方法．最後，舉例說明怎樣來把作圖法靈活運用．凡是對幾何證題有些根底的同學，在學習作圖時用本書作參考，可以解除不少困難．

爲了引起同學們的學習興趣，採取了一些教科書裏所講不到的材料，像以五角星爲例說明近似作圖法，以‘三等分任意角’爲例說明作圖不能問題，以及由於太省略而使結果不合

理的例題等．同時，又在作圖不能問題中，附帶說明了墨守成規、不知道改進工具的害處，暗示了幾何學的改造是今後必需的工作．

軌跡相交的作圖法，是比較重要而又最基本的，但是爲了編排順序的關係，在這裏不可能講得很詳細，有些較深的部分，須留到‘軌跡’的一册內補述，讀者在必要時可參閱該書．

本書在編寫中雖經仔細斟酌，但錯誤之處還恐難免，希望讀者予以批評和指正．

許莼舫　一九五一年十月

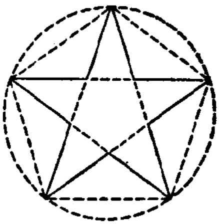
目　次

一　基本知識

什麽是幾何作圖題

紅色的旗子上綴着一大四小、五顆正五角的黄星，誰都知道這是中華人民共和國的國旗．當同學們在每天早上升旗的時候，凝視着這莊嚴美麗的國旗冉冉上升，每個人都掀起了熱愛祖國的情緒．這國旗上的正五角星形既然是同學們沒有一天不見到的，那末它的正確合理的畫法是怎樣的呢？學過幾何的人怕十有七八還是回答不起來吧！現在就把這一個問題來談一下，諸位可能是急切需要知道的．

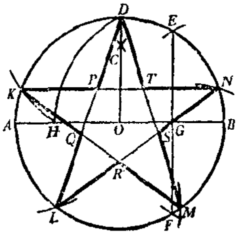
我們要畫一個正五角星形，首先必須預定它的大小．大家都知道，正五角星形是從一個正五角形的五條對角線所圍成的，也可以算作是從一個正五角形的各邊的延線所圍成的．這正五角星形的五個角頂一定是在同一圓周上；換句話說，就是它一定有一



個外接圓．要預定正五角星形的大小，只須先定下它的外接圓．有了外接圓，要怎樣才能正確合理地畫成一個正五角星形呢？請看下面的答案：

在已知的外接圓 O 裏作一任意的直徑 AB．拿 A，B 各做中心，同拿大於 AO 的任意長做半徑畫兩弧，相交於 C，聯 OC(必要時須延長)，交圓於 D．拿 B 做中心，BO 做半徑畫弧，交圓於 E 和 F，聯 EF，交 BO 於 G．拿 G 做中

心，G 和 D 的距離做半徑畫弧，交 AO 於 H. 拿 D 做中心，D 和 H 的距離做半徑畫弧，交圓於 K. 於是連續拿交點做中心，原長做半徑畫弧，得交點 L,M,N. 聯 DL,LN,NK,KM,MD 五直線，順次交於 P,Q,R,S,T 那末 $DPKQLRMSNT$ 就是所需的正五角星形.



像上舉的問題，要依照已知的條件（例如已知一外接圓），用正確合理的幾何方法作出所需的圖形（例如要作一內接的正五角星形），就是幾何學中的**作圖題**.

上舉正五角星形的作圖方法，究竟是否正確合理，應該根據幾何定理加以證明，這裏暫且丟開不講，同學們讀到本書的結尾，自然可以知道.

關於作圖方法的研究，在實際應用上很有用途. 例如工程、機械、美術等類，對於經濟建設和文化建設的進步，都有很大的關係. 新教育的精神是要學用一致的，我們學習幾何作圖，決不要忽略了這一點.

作圖用具的限制

一個青年要是言語很有次序，態度很是誠懇，行動又很莊重，人家一定會讚美他很守‘規矩’，是一個‘循規蹈矩’的好青年. 講到‘規’和‘矩’兩個字，原意是工人製造器物用的兩件工具，規就是兩脚規，矩就是直尺. 有了兩脚規才能畫正確的圓，有了直尺才能畫直線和直線形. 如果工人不用規、矩兩件工具，胡亂製成器物，那就會方的不方，圓的不圓，不成一個樣

子了.

前節所說幾何方法的作圖,用的工具也就是規和矩兩件東西. 我們在幾何教科書裏不是都學到如下的三條**公法**嗎?

(1) **定直線的公法** 通過二點可以引一直線(卽二點間可聯一直線).

(2) **延長線的公法** 一線段可任意延長.

(3) **作圓的公法** 拿定點做中心,定長做半徑,可以作一個圓(或一段弧).

這三條公法,是由實踐知道它們可能的作圖方法,同公理一樣,不須加以證明,就可認爲成立的,是作圖法的基礎. 其中的(1)和(2)可用直尺作成,(3)可用兩脚規作成. 諸位回頭去看一看前節所舉正五角星形的作圖方法,不是都根據這三條公法,用這兩件工具作成的嗎?

幾何學上用的直尺是不許有刻度的. 我們普通買到的尺都有刻度,但在作圖時必須注意,用這尺只能過二點引一直線,或延長一線段,不許用它去量幾寸幾分的長短.

幾何作圖所用的工具,爲什麼要有這樣嚴格的限制呢?我們用有刻度的尺去畫一條線段,使它等於已知的線段;用三角板去畫一個直角或一直線的垂線,不是更便利嗎? 其實這裏面另外有一個道理的. 因爲幾何學雖是用理論推演的學科,但是要同現實結合,使理論和實際儘可能趨近於一致,有刻度的尺上所刻的分寸,或三角板上製就的直角,我們有些相信不過,所以在理論上就不承認這樣的作圖方法. 雖然用兩脚規畫的圓也許不很圓,用直尺畫的直線也許不很直,但是在

這兩件工具中缺少了任何一件就無法作圖，所以我們就限制用這兩件工具，使圖形既可以作，而又把不可靠的程度減少到無可再減，可以認爲是比較妥善的一個辦法.

一切的幾何圖形，用兩脚規和直尺都能作成嗎？這樣的如意算盤雖然是打不通，但大多數的作圖題是可以解的. 關於在這限制下不能作圖的情形，留待後面繼續再談.

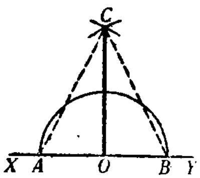
作圖的可能問題

我們有了規、矩兩件工具和定直線、延長線、作圓三條公法，大多數的作圖題都可求得解答. 這些在規定的限制下可以解決的問題，叫做作圖的**可能問題**. 下面就是一個例子：

〔例一〕 過定直線上（或直線外）的一個定點，求作這直線的垂線.

我們在初學幾何時，就知道'過定直線上(或直線外)的一個定點，可引這直線的一條垂線'，所以作圖是可能的. 它的作法，同學們也許早已學到，下面再作一簡略的敍述：

假使定直線是 XY，這線上的一個定點是 O，要過 O 作 XY 的垂線，可以先拿 O 做中心，任意長做半徑畫弧，交 XY 於 A，B. 再拿 A，B 各做中心，同拿大於 AO 的任意長做半徑畫兩弧，相交於 C. 聯 CO，就是所求的垂線.



證 因 $AO=BO$（同圓的半徑相等），$AC=BC$（由作法，交於 C 的兩弧是拿同長做半徑的），$CO=CO$（恆等），所以 $\triangle ACO \cong \triangle BCO$ (s.s.s. = s.s.s.)，$\angle AOC=\angle BOC$（全等三角形的對應角相等），$CO \perp XY$（鄰補角相等，那末二線垂直）.

在本章第一節裏作正五角星形的圖中，作 OC 的方法，其

實就是上述的作垂線的方法.

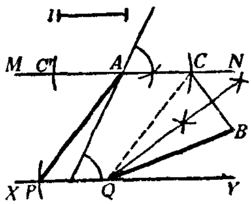
還有‘過定直線外的一個定點,作這直線的平行線’,‘作定線段的垂直平分線’,‘取定線段的中點’等,都是作圖可能的,同學們在教科書中都會學到,這裏不再細講.

上舉的幾個例子,每一題僅有一種解答,叫做獨解問題.但在作圖可能的問題中,因所設條件性質的不同,往往會有二種或二種以上的解答,叫做多解問題.下面舉兩個例子:

〔例二〕 已知直線 XY 和在它的同側的二定點 A,B, 試在 XY 上求二點 P,Q, 使 PQ 等於定長 l, 且 $AP=BQ$..

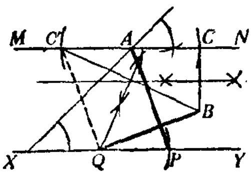
應該怎樣着手去研究這一個問題的解法,這裏暫且不講,下面只舉出它的作法和證明,由此探求它的解答的種數.

作法 過 A 作 XY 的平行線 MN. 拿 A 做中心, l 做半徑畫弧, 交 MN 於 C. 聯 BC, 作 BC 的垂直平分線, 交 XY 於 Q. 聯 CQ, BQ, 在 XY 上取 $QP=l$ (就是拿 Q 做中心, l 做半徑畫弧, 交 XY 於 P). 那末 P, Q 就是所求的二點.



證 因 $APQC$ 是 ▱ (從作法, 一組對邊平行而且相等), 故 $AP=CQ$ (▱對邊相等). 又因 Q 在 BC 的垂直平分線上 (見作法), 所以 $BQ=CQ$ (線段的垂直平分線上的點, 距線段的兩端等遠), $AP=BQ$ (等於同量的量相等). 又 $PQ=l$, P,Q 都在 XY 上, 所以 P,Q 合於題中的條件, 是所求的二點.

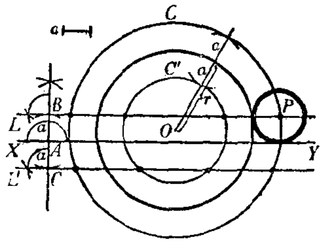
因爲拿 A 做中心, l 做半徑的圓和 MN 常有二交點 C 和 C', 所以本題普通有二種解答. 但是遇到特殊情形, 在 BC 和 BC' 二線中有一線恰



巧同 XY 垂直，那末像上頁末了的一幅圖，這一線的垂直平分線同 XY 平行，沒有交點，所以祇有一種解答.

〔例三〕 已知半徑 a, 求作一圓，使它切於一已知圓O, 且切於一已知直線 XY.

作法 過 XY 上的任意點 A 作一垂線. 在這垂線上取 AB, AC, 使各等於 a. 過 B, C 各作 XY 的平行線 L, L'. 假定已知圓的半徑是 r, 拿O做中心，$r+a, r-a$ 各做半徑作兩圓 C, C'. 假使 L, L' 和 C, C' 的一個交點是 P, 那末拿 P 做中心，a 做半徑的圓就是所求的圓.



證 因P同XY的距離等於 a (∥線處處等距離)，所以 ⊙P 切於 XY (圓的中心同直線的距離等於半徑，那末圓同直線相切). 又因 $OP=r\pm a$, 所以 ⊙P 切於 ⊙O (兩圓的中心距離等於兩半徑的和或差，那末兩圓外切或內切).

在上圖所示的情形，直線 L, L' 和圓 C, C' 的交點最多，計有八個，每一交點都可以做所求圓的中心，一共有八種解答. 假使把已知半徑 a 的長度或 XY 同 ⊙O 的相關位置任意改變，解答數也跟着改變. 當 L, L' 中的一線切於 ⊙C' 時，有七種解答；都切於 ⊙C', 或一線同 ⊙C' 相交，另一線同 ⊙C' 相離，都有六種解答；一線切於 ⊙C', 另一線同 ⊙C' 相離，或一線同 ⊙C' 相交，另一線切於 ⊙C, 都有五種解答；都同 ⊙C 相離，或一線同 ⊙C'相交，另一線同 ⊙C 相離，或一線切於 ⊙C', 另一線切於 ⊙C, 都有四種解答；一線同 ⊙C 相交，另一線同 ⊙C 相切，或一線同 ⊙C' 相切，另一線同 ⊙C 相離，都有三種解答；都切於 ⊙C, 或一線同 ⊙C 相交，另一線同 ⊙C 相離，都

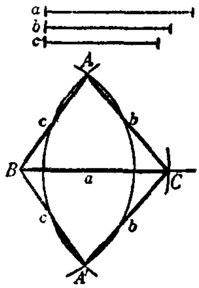
有二種解答;一線切於 $\odot C$,另一線同 $\odot C$ 相離,祇有一種解答。假使 $a=r$ 或 $a>r$ 時,本題的解答至多只有四種。

在上舉的三個例子裏,求作的圖形非但形狀和大小都要適合所設的條件,而且還須依照一定的位置。凡形狀大小雖完全相同,而位置各異的許多圖形,都可作爲解答。像這樣的作圖題,叫做**定位置**的問題。

假使題設條件只指定形狀和大小,而同位置無關的,那末只取形狀大小不同的,分別作爲解答;至於位置不同而形狀大小全同的,不能算作是另外的解答。這樣的作圖題叫做**不定位置**的問題。下面的兩個例子就是。

〔例四〕 已知三邊的長是 a,b,c,求作三角形。

作法 先在任意直線上取 $BC=a$. 拿 C 做中心,b 做半徑畫弧,再拿 B 做中心,c 做半徑畫弧,兩弧相交於 A,A' 二點. 聯 $AB,AC,A'B,A'C$ 四直線,得 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'BC$.

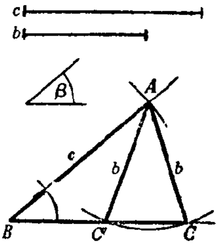


這裏所得的兩個三角形好像都是本題的解答,其實不對的。因爲題中沒有指定所求三角形的位置,$\triangle ABC$ 和 $\triangle A'BC$ 的位置雖然不同,但形狀大小完全一樣,所以只取 $\triangle ABC$ 的一種解答。

〔例五〕 已知二邊的長是 b,c,又知其中等於 b 的一邊所對的 $\angle B$ 的大小是 β,求作三角形.

作法 先在任意位置作 $\angle B=\beta$. 在 $\angle B$ 的一邊上取 $BA=c$. 拿 A 做中心,b 做半徑畫弧,同 $\angle B$ 的另一邊交於 C,C' 二點. 聯 AC,AC',得 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABC'$.

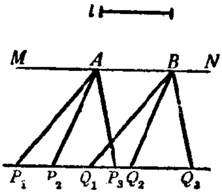
這樣所成的 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABC'$，形狀大小都不相同，才好算作是兩種解答．假使把等於 c 的 AB 線取在 $\angle B$ 的另一邊上，同法又可作成兩個三角形，因爲和前得的兩三角形分别全等，所以不能算作另外的解答．



作圖題的不定和無解

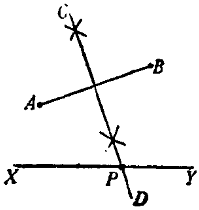
在作圖可能的問題中，有時因所設條件的情形特殊，解答的種數可以多到無窮．這樣的作圖題叫做**不定**問題．

譬如在上節的例二中，假使所設的 B 點恰巧在 MN 上，並且同 A 的距離恰巧等於 l，那末過 A, B 二點所作的任何兩平行線，同 XY 的兩交點都是所求的點，解答的種數無窮．



有時問題中的所設條件不足，適合於所設條件的圖形也可以多到無窮．這種問題也是不定問題．

例如'已知兩點 A, B，試另求一點，使距 A, B 等遠'，這就是一個不定問題．因爲我們都知道距 A,B 等遠的點可以多到無窮，並且都在 A, B 的聯線的垂直平分線 CD 上，這一條垂直平分線叫做適合所設條件的點的軌跡——就是適合所設條件的許多點集合而成的一條軌道——本題衹能求出這種點的軌跡，但不能確定所求的點



的位置。

研究這一個問題所以會不定的原因，知道是爲了所設條件的不够充足。假使在題中增一條件'且這一點須在已知直線 XY 上'，那末 CD 和 XY 的交點 P 就是所需的解答。

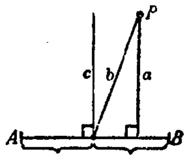
在上舉的例題中，假使 AB 直線恰巧同 XY 垂直，那末 CD 和 XY 平行，沒有交點，仍舊求不到解答。這樣因所設條件的情形特殊，結果求不出解答的作圖題，叫做**無解問題**。

作圖題無解的情形是時常會遇到的。例如在上節的例三中，假定直線 L,L' 和圓 C,C' 都不相遇，問題就成無解。又如例四的所設長度 b,c 的和不大於 a，那末所畫的兩弧相切或不相遇，$\triangle ABC$ 無法作成。例五的 b 過短，拿 A 做中心所作的弧同 $\angle B$ 的另一邊不相遇時，也成無解。

作圖題的不合理

作圖題的條件不足，解答可多到無窮，成爲不定問題，上節已經講過。假使反過來研究，作圖題的條件太多，欲求全部適合，事實上往往無法辦到，就成了**不合理**的問題。

例如在問題'過定線段 AB 外的一定點 P，求作 AB 的垂直平分線'中，求作的一直線須同時適合如下的三個所設條件：



(1) 這直線須過 P 點。

(2) 這直線須垂直於 AB。

(3) 這直線須平分 AB。

但因過 P 而垂直於 AB 的直線(a)不一定會平分 AB，過

P 而平分 AB 的直線(b) 不一定會垂直於 AB, 又 AB 的垂直平分線 (c) 不一定會過 P, 所以本題的條件太苛,無法作圖.假使在這三個條件中任意去掉一個,作圖就都可能了.

初學幾何的人,在證明定理或習題時,對於作補助線的方法往往不很明瞭,常見有如上的不合理的字句,這是應該特別注意的.

不合理的作圖題同上節所講的無解問題,在意義上是絕不相同的. 無解的問題只須擴充解的性質,譬如兩條平行線可認作相交於無窮遠點,兩個相離圓可認作相交於虛點,這樣就有意義可言;同學們將來在解析幾何學裏就會學到. 至於不合理的問題,即使把解的性質加以擴充,還是沒有意義的.

從上述的看來,作圖題中所設的條件太少,解答數就多到無窮;條件太多,解答數就少到沒有,所以所設條件必須不多不少,恰到好處,這才可以算作是一個完美的作圖題.

作圖的不能問題

幾何作圖既然受到用具和公法的限制,有些問題就無法獲得解決. 這樣的作圖題叫做**不能問題**.

譬如'三等分一個任意角',就是幾何學上最著名的一個不能問題. 這個問題看似簡單,但是幾千年來研究數學的人爲了它不知絞去多少腦汁,結果都是枉費心機,沒有方法解決.直到近世解析數學發達,才知道從這一個作圖題所引出的方程式,是不能歸於一次或二次方程式解決的,可以證明是一個作圖的不能問題. 於是對這問題的研究才算告一段落,不值