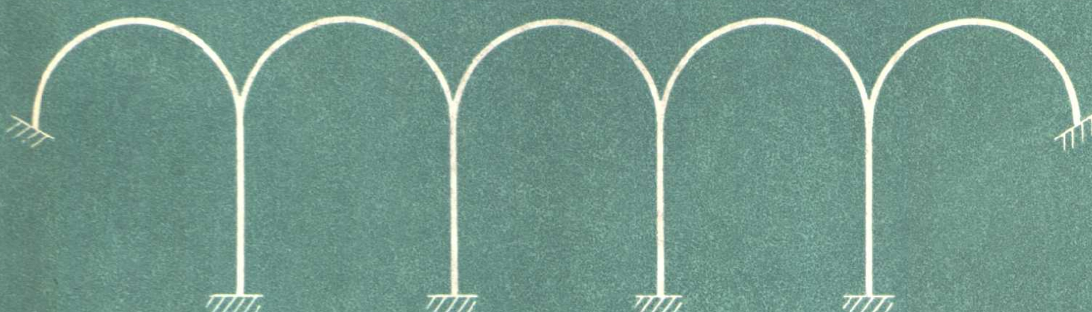
超静定结构力学

王坚白



水利电力出版社

内 容 提 要

本书论述超静定结构的基本原理和解题方法，并着重说明物理概念和在工程中的应用。内容包括：鉴定超静定结构次数的计算方法，结构变位计算，力法、变位法、力矩分配法计算超静定结构，影响线计算，空腹桁架，弹性基础上的结构，结构稳定学，结构振动学等十章。各章末尾都有习题。

本书可供水工、土建工程技术人员和高等院校有关专业的师生参考。

超静定结构力学

王 坚 白

*

水利电力出版社出版

（北京德胜门外六铺炕）

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

水利电力出版社印刷厂印刷

850×1168毫米 32开本 $15\frac{1}{4}$印张 402千字

1979年11月第一版 1979年11月北京第一次印刷

印数 00001—19150 册 每册 1.85 元

书号 15143·3514

前　言

本书系根据作者二十余年来学习国内外结构力学著作（特别是作者的老师钱令希先生与俞忽先生的著作）的心得以及解决工程问题时的一些研究成果写成。全书共分十章，内容涉及到超静定结构力学的若干基本问题，以供有关专业的设计、科研单位和大专院校师生参考。

书中除介绍超静定结构基本理论和基本解法外，还着重介绍了工程设计中常用结构的常用解法，并在全书引用了较多的结构实例，力求结合工程实际进行理论讲解。

书的最后一章介绍结构振动学，作者希望通过本章使读者对结构振动学能获得较完整的概念，掌握地震作用下结构振动的一种基本分析方法。

本书原稿承华东水利学院、原水电部第十一工程局、第二工程局和大连工学院及清华大学等单位的同志审阅，提了许多宝贵意见，谨致谢意。

由于个人水平所限，对于书中疏忽错误之处，欢迎读者批评指正。

作　者

一九七七年十一月于北京

目　录

前　言
第一章　鉴定结构超静定次数的方法 …………………………… 1
§1-1　超静定结构定义、鉴定结构超静定次数方法之一 ………… 1
§1-2　鉴定结构超静定次数方法之二 …………………………… 2
第二章　结构变位的计算 …………………………………… 11
§2-1　结构变位的种类及计算变位的基本假定 ……………… 11
§2-2　结构变位的普遍计算方法 ……………………………… 12
§2-3　结构变位的特殊计算方法 ……………………………… 29
第三章　力法计算超静定结构 ……………………………… 56
§3-1　力法 ……………………………………………………… 56
§3-2　弹性中心法 ……………………………………………… 74
第四章　变位法计算超静定结构 …………………………… 103
§4-1　变位法原理 ……………………………………………… 103
§4-2　变位法计算刚架实例 …………………………………… 118
§4-3　变位法计算超静定桁架 ………………………………… 138
§4-4　混合法 …………………………………………………… 154
第五章　力矩分配法 ………………………………………… 157
§5-1　力矩分配法 ……………………………………………… 157
§5-2　力矩一次分配法 ………………………………………… 173
§5-3　多跨多层刚架的计算方法——平均刚度法 …………… 194
§5-4　升船机高排架 …………………………………………… 201
第六章　超静定结构影响线计算 …………………………… 208
§6-1　影响线计算的基本方法 ………………………………… 208
§6-2　影响系数法计算刚架影响线 …………………………… 211
§6-3　改进后的机动法计算刚架影响线 ……………………… 214
第七章　空腹桁架 …………………………………………… 220
§7-1　不对称空腹桁架 ………………………………………… 220

§7-2 对称空腹桁架 ……243
第八章 弹性基础上的结构……260
§8-1 弹性基础梁 ……260
§8-2 弹性基础圆拱 ……274
第九章 结构稳定学 ……296
§9-1 概述 ……296
§9-2 抗转弹性基础及其与轴向力对弯曲影响的比拟 ……298
§9-3 结构的压弯计算 ……300
§9-4 结构失稳的准确计算法 ……330
§9-5 结构失稳近似计算法之一——逐次近似法 ……340
§9-6 结构失稳近似计算法之二——能量法 ……347
§9-7 结构失稳近似计算法之三——将无限自由度问题化作多自由度问题 ……352
§9-8 多跨多层刚架失稳近似计算的特殊方法——平均刚度法 …359
§9-9 结构各种失稳形式变位之间的关系 ……363
第十章 结构振动学 ……369
§10-1 概述……369
§10-2 具有一个自由度系统的振动……373
§10-3 具有多自由度或无限自由度的结构在简谐动荷载下的纯强迫振动……388
§10-4 结构自振频率与振型的精确计算方法……411
§10-5 结构自振频率的近似计算方法……421
§10-6 结构不同频率自振变位的正交关系……432
§10-7 具有多自由度与无限自由度的结构在任意初始条件和任意动荷载作用下的振动……442

附录1 普通弹性基础梁计算的函数表 ……459
附录2 k 为负值的弹性基础梁计算的函数表 ……473
参考资料 ……476

第 一 章

鉴定结构超静定次数的方法

§1-1 超静定结构定义、鉴定结构超静定次数方法之一

结构受外荷载作用，其支承反力和杆件内力能由静力平衡条件确定者，称为静定结构；反之，仅根据静力平衡条件不能完全确定反力和内力者，称为超静定结构。

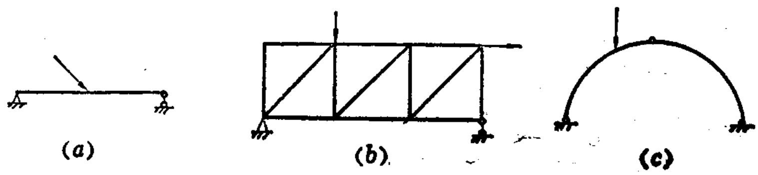


图 1-1

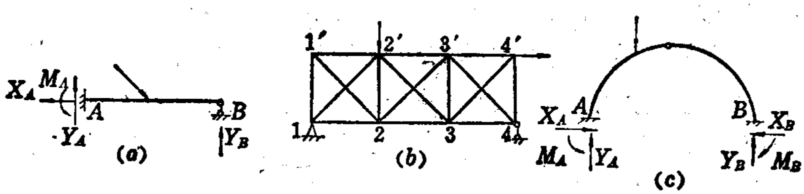


图 1-2

图 1-1 所示简支梁、桁架及三铰拱均为静定结构，它们的反力和内力均可由静力平衡条件算出。图 1-2 所示一端固定的梁、交叉腹杆桁架及单铰拱则为超静定结构，因为由静力平衡条件不能完全确定它们的反力和内力。图 1-2（ a ）的梁在外荷载作用下，支承反力有X_A、Y_A、M_A及Y_B，静力平衡条件只能确定三个反力，必须补充一个条件才能确定四个反力。图 1-2（ b ）交叉腹杆桁架的反力可由静力平衡条件确定，但杆件内力则不能。

如果去掉1′2、2′3、3′4三个杆件，它就变成了图1-1（ b ）的静定桁架，各杆件内力便可由静力平衡条件求出。现在多了三个杆件，也就多了三个杆件内力，必须另外补充三个条件才能求出全部杆件内力。所谓结构超静定的次数，就是指由静力平衡条件不能确定的结构多余的支承反力和杆件内力的数目。

确定结构超静定次数方法之一，就是去掉超静定结构某些支承和杆件控制，使之变为静定结构，计算其相应于这些控制的反力和内力的数目，就是超静定次数。例如图 1-2（ a ）梁，去掉左边固定端的嵌固控制，变成图 1-1（ a ）的静定简支架，相应于嵌固控制的，有一个反力M_A，故图1-2（ a ）梁为一次超静定结构。图1-2（ b ）桁架中将1′2、2′3、3′4三个杆件去掉控制，变成了图 1-1（ b ）的静定桁架，相应于此三杆控制有三个杆件轴向力，故图1-2（ b ）桁架为三次超静定结构。又如图1-2（ c ）单铰拱，去掉两个支座的嵌固控制，变成了图 1-1（ c ）三铰拱静定结构，相应于此嵌固控制有二个反力 M_A 与 M_B，故图 1-2（ c ）单铰拱为二次超静定结构。

去掉超静定结构支承和杆件某些控制使变为静定结构，可采用不同的方案，但计算超静定结构次数的结果是一样的。例如图1-2（ a ）梁，我们也可去掉右边滚动支承控制，使变成静定悬臂梁，相应于滚动支承控制有一个反力Y_B，故图1-2（ a ）梁为一次超静定结构，结果和上面一样。读者只要熟悉各种静定结构的形式，应用上述方法，是不难求得各种超静定结构的超静定次数的。

§1-2　鉴定结构超静定次数方法之二

本节介绍比较自由度和控制度以鉴定结构超静定、静定或不稳定的方法。

一、鉴定结构性质的方法

结构由各种形式的杆件组成，杆件与杆件相交处为节点。杆

件与节点分割开时二者都可以自由移动和转动，杆件与节点接合起来，二者都受到了控制。根据杆件和节点自由度总数和二者接合的控制度总数相互比较，就可以鉴定任何杆件结构是超静定、静定或不稳定，并确定超静定或不稳定的次数。兹分述于下：

（1）杆件的自由度：任何结构杆件在平面内均可以发生三向变位，即两个分向的移动和绕某一点的转动。因此，对于任何杆件，其自由度数均为三。

（2）节点的自由度：任何结构节点在平面内也可以有三向变位。对于刚接节点，三向变位中任何一种变位均将使连接于节点的杆件发生变动。但对于铰接节点，节点只有两个分向的移动将使连接于节点的杆件发生变动。铰接节点可看作铰接处的枢轴，它绕本身的转动对结构杆件不起影响。因此对于刚接节点，我们采取自由度为三；对于铰接节点，我们采取自由度为二。

（3）接合的控制度：杆件与节点的接合可以分为刚接与铰接。当刚接时，杆件与节点间的三向相对变位（二分向的相对移动及相对转动）均不可能发生，这种接合的控制度我们采取为三。当铰接时，杆件与节点间只有二分向的相对移动不可能发生，这种接合的控制度我们采取为二。在某些特殊情况下，结构的接合也可以看作是杆件与杆件的接合或节点与节点的接合，它们的刚接与铰接的控制度数和上面相同。在下面例题二中我们将看到一个这样的例子。

（4）支托结构的基础与支承：任何平面杆件结构必须连接或支承于不动的基础上，它在平面内才是固定的。为了观念一致，基础与结构的杆件直接刚接或铰接时，它可视为结构系统中的一个特殊节点，这个节点是不动的，其自由度为零。当结构通过滚动支承或铰接支承连接于基础时，滚动支承可视为结构系统中的一根铰接杆件，铰接支承可视为结构系统中的二根铰接杆件，它们一端连接于不动节点，另一端连接于可动节点。

（5）鉴定结构性质的公式：设平面杆件结构之刚接点数为v，铰接点数为u，杆件数（包括支承的杆件在内）为w，杆件刚

接端为m，杆件铰接端为n。根据前面分析可得：

$$结构自由度总数=3w+3v+2u$$

$$结构控制度总数=3m+2n$$

$$s=(3m+2n)-(3w+3v+2u) \qquad (1-1)$$

根据s的数值可判定结构性质如下：

当$s<0$时，结构为不稳定，一般情况下其绝对数值即为不稳定的次数；在特殊情况下，可能为不稳定的超静定，不稳定的次数等于s的绝对值加超静定次数。

当$s=0$时，结构为静定；在特殊情况下可能为不稳定的超静定，其不稳定的次数即为超静定次数。

当$s>0$时，结构为超静定，其数值即为超静定的次数。在特殊情况下结构可能不稳定，不稳定次数为s_1，则结构的超静定次数等于$s+s_1$。

（6）节点的选定：应用前面公式鉴定结构性质，正确选定节点是很重要的。为了不致发生错误，兹将选定节点的原则简述于下：

1）凡二杆件相交于一点，此二杆件系铰接接合时，此二杆件应分别计算，此点应视为铰接节点；

2）凡二杆件相交于一点，当此二杆件系刚接接合时，此二杆件可视为一个连续杆件，此点可不视为节点；

3）凡三杆件或三杆件以上交于一点，当一部分杆件在此点一端为刚接，另一部分杆件在此点一端为铰接时，此点应视为刚接节点。此点可想像为图1-3之形状，刚接杆件焊接于节点之下部，铰接杆件连接于节点上部之枢轴上；

4）凡三杆件或三杆件以上交于一点，各杆件在此点均为铰接时，此点应视为铰接节点。

二、例题

【例 1-1】 求图1-4所示结构的超静定次数。

【解】 在此结构中1与2为不动节点，其自由度为零。3、4、5、6、8、9、10共7个节点为刚接节点，7为铰接节

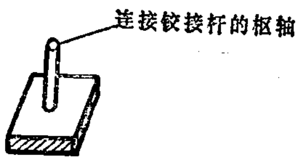


图 1-3

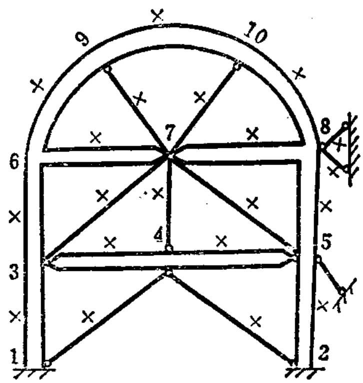


图 1-4

点，杆件数量包括支承杆件在内为21个（每杆边有×号），刚接接合为18个，铰接接合为24个。根据公式（1-1）得：

$$s=(3\times18+2\times24)-(3\times21+3\times7+2\times1)=16$$

在本结构中 $s>0$，且结构无不稳定的情形，故本结构为16次超静定结构。

【例 1-2】 求图1-5所示结构的超静次数。

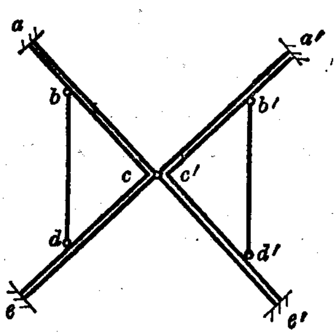


图 1-5

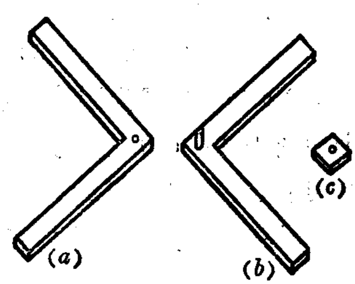


图 1-6

【解】 本题结构中，a、a' 及 e、e' 为不动节点，b、b' 及 d、d' 为刚接节点，但在点 1 处的接合我们可以理解为下列四种情形：

1）点 c 可视为一个铰接节点，bcd 及 $b'c'd'$ 各视为一个整

体杆件，其形状如图1-6（a）、（b），此二杆件通过枢轴1铰接在一起。如此，结构共有4个刚接节点，一个铰接节点，杆件数量为8，刚接接合数为12，铰接接合数为6，根据公式(1-1)得：

$$s=(3\times12+2\times6)-(3\times8+3\times4+2\times1)=10$$

2）bcd及$b'c'd'$各视为一整体杆件，bcd如图1-6（a）的形状，$b'c'd'$为图1-6（b）的形状，即杆件本身带焊接的短钢筋条作为接合之枢轴。此两杆件不与铰接节点接合，而系杆件与杆件直接铰接在一起，故点1不算作铰接节点。如此，结构有4个刚接节点，无铰接节点，杆件数量为8，刚接接合数为12，铰接接合数（包括杆件与杆件铰接接合在内）为5。根据公式（1-1）得：

$$s=(3\times12+2\times5)-(3\times8+3\times4)=10$$

3）点1视为一个铰接节点，点1旁之c与c'各视为刚接节点如图1-6（c）。此两刚接节点与铰接节点1互相铰接在一起。杆件bc与cd分别视为两杆件，与节点c刚接；杆件$b'c'$与$c'd'$亦分别视为两杆件，与节点c刚接。如此，结构有6个刚接节点，一个铰接节点，杆件数量为10，刚接接合数为16，铰接接合数（包括节点与节点接合在内）为6。根据公式（1-1）得：

$$s=(3\times16+2\times6)-(3\times10+3\times6+2\times1)=10$$

4）c与c'各视为刚接节点，其中一个如图1-3之形状，另外一个如图1-6（c）之形状，此两刚接节点直接铰合，点1不算作铰接节点。bc与cd以及$b'c'$与$c'd'$均分别视为单独杆件，与节点c及c'刚接。如此，结构有6个刚接节点，没有铰接节点，杆件数量为10，刚接接合数为16，铰接接合数（包括节点与节点铰合）为5。根据公式（1-1）得：

$$s=(3\times16+2\times5)-(3\times10+3\times6)=10$$

由上面计算可知，将本题中点1理解为上述四种不同情形，所得s值是一样的。今$s>0$，且结构无不稳定的情形，故本题结构为10次超静定结构。

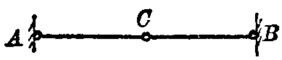


图 1-7

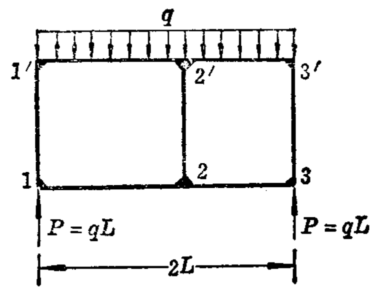


图 1-8

【例 1-3】 试鉴定图1-7结构的性质。

【解】 此结构有一个可动铰接节点C，两根杆件，杆端铰接接合数为 4 ，无刚接节点与刚接接合。根据公式（1-1）得：

$$s=2\times4-(3\times2+1\times2)=0$$

此结构的外荷载如有垂直于ACB的分力，则结构不稳定，C点可以在垂直方向移动,不稳定次数为一。外荷载如果是作用于ACB轴向上的力，此结构可以保持稳定，但杆件内力不能由静力平衡条件求出，尚须补充一个变形一致条件才能求出，故为一次超静定结构。

【例 1-4】 试鉴定图1-8结构的性质。

【解】 此结构 2 与$2'$为两个刚接点，杆件数为 3 ，刚接接合数为 6 ，无铰接节点及铰接接合。根据（1-1）式得：

$$s=6\times3-(3\times3+2\times3)=3$$

此结构未与基础相连，在平面内可以移动和转动，不稳定次数s_1为 3 。但在图1-8外荷载保持平衡的条件下结构可以保持稳定，杆体内力是超静定的，超静定次数为$s+s_1=3+3=6$。

【例 1-5】 设结构系统有v个刚接节点，u个铰接节点，两端刚接之杆件数为w_1，一端刚接一端铰接之杆件数为w_2，两端铰接之杆件数为w_3，铰接支承数为P，滚动支承数为q，试导出鉴定结构性质的公式。

【解】 杆件总数$w=(w_1+w_2+w_3+2P+q)$

刚接接合总数$m=2w_1+w_2$

铰接接合总数$n=w_2+2w_3+4P+2q$

根据前面公式（1-1）得：

$$s=[3(2w_1+w_2)+2(w_2+2w_3+4P+2q)]$$
$$-[3(w_1+w_2+w_3+2P+q)+3v+2u]$$
$$\therefore s=(3w_1+2w_2+w_3+2P+q)-(3v+2u) \qquad (1-2)$$

根据 s 小于零，等于零或大于零即可鉴定结构不稳定、静定或超静定，和公式（1-1）相同。

公式（1-2）的物理意义很明显，这就是某些书刊上将节点当作自由体，将杆件当作控制以鉴定结构性质的公式。刚接和铰接节点的自由度分别为三与二。两端刚接杆给结构三度控制，一端刚接一端铰接杆给结构二度控制，两端铰接杆给结构一度控制，每一个铰接支承给结构二度控制，每一个滚动支承给结构一度控制。

三、鉴定结构性质公式的力学数学本质

前面鉴定结构性质的公式（1-1），可以从力学数学上说明其本质。在杆件结构中，我们取各杆端内力为未知数。对于每一个刚接杆端，内力可分解为水平分力、垂直分力及弯矩三个未知数；对于每一个铰接杆端，内力可分解为水平分力与垂直分力两个未知数。设结构系统刚接杆端数为m，铰接杆端数为n，故内力未知数总数为$(3m+2n)$，它等于结构控制度总数。对于每个结构杆件，杆端内力与作用于杆件上的外荷载根据静力平衡条件可列出三个方程式。设杆件数量为w，故共可列出$3w$个方程式。又对于结构的每个刚接节点，由作用于节点的杆端内力与外荷载的平衡条件，可列出三个方程式，对于每个铰接节点，可列出两个方程式。设结构刚接节点与铰接节点的数目分别为v与u，故考虑节点静力平衡条件共可列出$(3v+2u)$个方程式。结构系统根据静力平衡条件总共可列出$(3w+3v+2u)$个方程式，这个数目就是结构自由度总数。由前面公式（1-1）可看出，式中 s 代表结

构中杆端内力未知数的数目减去静力平衡条件建立的联立方程式的数目。

当 $s<0$ 时，内力未知数的数目少于联立方程式的数目。在此种情况下，一般说来，除非取全部未知数或一部分未知数为无穷大，方程式是不可能有解答的，因为在联立方程式中，任意取出两组方程式组合，只要方程式数目与未知数数目相等时就可以得到未知数的两组解答，而这两组解答通常是矛盾的。因此当 $s<0$ 时，结构是不稳定的。要使未知数能够得到解答，它必须与方程数相等，显然我们必须补充 $|s|$ 个未知数，因此 s 的绝对值即代表不稳定的次数。在特殊情形下，当作用于结构的外荷载选择恰当，由静力平衡条件列出的方程组中可能出现 $|s|$ 个方程式对于其他方程式是相依的，这样联立方程组中未知数就变成可解的了。这种情形代表不稳定结构的危形稳定的情形。在更特殊的情形下，当结构保持危形稳定时，如果出现 $|s|+s_1$ 个方程式对于其他方程式是相依的，则联立方程组中内力未知数多于独立方程式的数目，需要补充 s_1 个条件才能将内力解出，这就是不稳定的超静定结构的情形。

当 $s=0$ 时，内力未知数的数目正好等于联立方程的数目。在此种情况下，内力未知数通常可求得固定的解答，因此结构是稳定的。在特殊情形下，若结构杆件组合不得当，联立方程中也可能出现一个或数个方程式对于其他的方程式是矛盾方程式，因此未知数中有一部分或全部是无穷大，否则未知数不可能有解答。这说明当结构满足静定必须条件 $s=0$ 时，它也可能是不稳定的结构。在这种不稳定的结构中，如果外荷载选择得恰当，那么联立方程中原来的一个或数个矛盾方程式可能全部变为对于其他方程式的相依方程式，这样内力的未知数就不可能出现无穷大的解答了，结构因此保持了危形稳定。但在这种情形下，方程组中出现了一个或数个相依方程式，因此内力未知数的数目多于独立方程式的数目，内力变成了有无穷多的解答，我们必须根据结构变形的边界条件另外补充一个或数个方程式，内力未知数才能有

固定解答。这就说明了当 $s=0$ 时结构可能是不稳定的超静定结构，其不稳定次数即等于超静定次数。

当 $s>0$ 时，内力未知数的数目多于由静力平衡条件建立的联立方程式的数目，因此内力未知数的解答将有无穷多。若联立方程式中无矛盾方程式或相依方程式，那么我们必须根据结构变形的边界条件补充 s 个方程式，内力未知数才可以获得固定的解答。这就说明当 $s>0$ 时结构是超静定的，若无不稳定的情形时，超静定次数等于 s。在特殊情况下由于结构杆件组合不恰当，联立方程式中可能出现 s_1 个方程式对于其他方程式为矛盾方程式，除非一部分或全部内力未知数为无穷大，方程不可能有解答，这说明 $s>0$ 时仍可能出现不稳定的结构。如果外荷载选择得恰当，上述 s_1 个矛盾方程式全部变成了对其他方程式的相依方程式，则内力未知数就不会出现无穷大的解答了。但此时独立方程式的数目比原来少了 s_1 个，比内力未知数的数目少了 $(s+s_1)$ 个，必须根据变形边界条件补充 $(s+s_1)$ 个方程式才能求得内力未知数的固定解答。这说明当 $s>0$ 时，在特殊情况下结构不稳定，不稳定次数为 s_1，则结构超静定的次数等于 $(s+s_1)$。

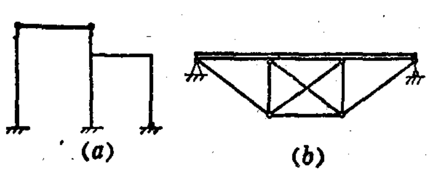
习　题

习题1-1　试分析习题图1-1所示两结构超静定次数。

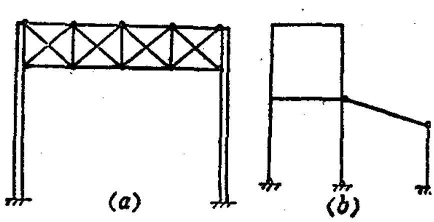
习题1-2　试说明公式（1-2）的力学数学本质。

习题1-3　用公式（1-1）计算习题图1-2所示两结构的超静定次数。

习题1-4　试用公式（1-2）计算习题1-2两结构的超静定次数。



习题图 1-1



习题图 1-2

第 二 章

结构变位的计算

§2-1 结构变位的种类及计算变位的基本假定

分析超静定结构，首先需要知道结构变位的计算，因为除了静力平衡条件外，必须补充变位连续条件才能解出超静定反力或内力。

平面结构中任何一点（杆件的某个截面或杆件相交的节点）可以有三向变位，即转动（角变位）和二个分向的位移（线变位）；任何二点之间可以有三向相对变位，即相对转动（相对角变位）和二个分向的相对位移（相对线变位）。

一般情况下，结构在外荷载及其他因素（如温度变化、支座沉陷等）影响下，其变位与结构本身尺寸相比是微小的，变位对结构形式尺寸影响极微。下面各章节的结构计算理论，都是根据结构变位微小这样一个前提建立的，假定变位后结构形式尺寸仍维持不变，外荷载不因结构变位而改变方向及相互间的位置和距离。

结构变位的计算还有两个基本假定：

1）假定结构完全处于弹性阶段，结构内的应力和应变服从虎克定理，成正比的关系。在某一定的外荷载作用下，各处的应力和外荷载大小是成正比的，而结构每点的变位则是由于结构各部分发生了应变而产生的，与应变大小成正比。因此在某一定的外荷载作用下，结构的变位与外荷载大小成正比；

2）假定结构变位微小，服从叠加原理，即在多个外荷载和其他因素作用下结构的变位，等于每个外荷载或其他因素单独作

用时结构的变位叠加起来。由叠加原理我们可以直接得到这样的结论：在多个外荷载作用下结构最终的变位，与各外荷载加之于结构的先后次序无关。

根据上面的基本假定，下面一节我们推导结构变位的普遍计算方法。这些基本假定，在结构变位微小的情况下，经实验验证基本上是符合实际情况的。

§2-2 结构变位的普遍计算方法

一、外功与内能、功能互等定理一

当结构受外荷载作用时，结构将发生变位，外荷载在结构上将随着移动，对结构作了功，这就是外功。外荷载可以由一组力和力矩组成，用P_1、P_2……P_n表示（这里P_i可代表力，也可代表力矩）。结构在外荷载作用处相应于P_1、P_2……P_n方向，发生的最终变位为Δ_1、Δ_2……Δ_n。如果P_i为力，则Δ_i为线变位；如果P_i是力矩，则Δ_i为角变位。外荷载是由零逐渐增加的，变位也是由零逐渐增加的，故外功W为：

$$W=\frac{1}{2}P_1\Delta_1+\frac{1}{2}P_2\Delta_2+\cdots\cdots\frac{1}{2}P_n\Delta_n=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}P_i\Delta_i \qquad (2\text{-}1)$$

结构在外荷载作用下，杆件各处产生应力和应变，将外功变为应变能（即内能）储藏于结构内。试取结构杆件中任一小段ds（图2-1）研究，作用在ds两边的截面上有弯矩M、切力Q及轴向力N。由材料力学可知，在M作用下ds两边的截面相对转动角度$d\theta=Mds/EI$，I为截面惯性矩。由于M作用，在ds段储藏的能为：

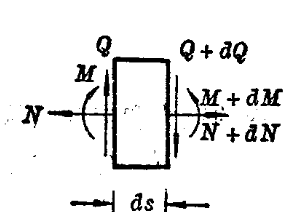


图 2-1

$$dU_M=\frac{1}{2}M\cdot d\theta=\frac{M^2ds}{2EI}$$