

壳体开孔的 理论与实验

徐秉汉 裴俊厚 朱邦俊 著

壳体开孔的理论实验

徐秉汉 裴俊厚 朱邦俊 著



国防工业出版社

内 容 简 介

本书是一本论述壳体开孔理论与实验问题的专著。作者系统地推导了在正交非主曲率坐标下壳体的基本方程式,给出了满足工程需要的壳体开孔解析解和数值有限元解。特别是壳体受均匀外压(或内压),孔边有各种加强措施的带肋壳体开单圆孔、排圆孔、斜交孔等结构的应力及承载能力的设计计算方法,并编制了便于工程设计使用的曲线图谱和简便计算公式。除理论方法外,书中尚详细地介绍了作者及其同事们所进行过的系统的实验研究工作。

本书中的研究成果除可直接用作水下船舶和水中兵器开孔结构的设计计算方法外,还可供化工机械、核工业、航空、建筑等部门设计开孔结构时参考使用,亦可用作高等院校有关专业教师和研究生的参考用书。

壳体开孔的理论及实验

徐秉汉 裴俊厚 朱邦俊 著

责任编辑 胡万忱

*

国防工业出版社出版

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

850×1168 印张14¹/₂ 381千字

1987年4月第一版 1987年4月第一次印刷 印数:0,001—1,540

统一书号:15034·3177 定价:3.90元

序 言

壳体开孔的应力分析，在壳体理论上是个颇复杂的问题，而在工程实际上又是个现实而重要的问题。诸如潜水器、潜艇、鱼雷、核反应堆压力壳、锅炉、各种压力容器以及某些航天和建筑的壳体结构等的设计中经常会遇到壳体结构开孔的问题。当开孔尺度较大时，壳体上将产生局部高应力区，通常称之为应力集中。这将严重地降低了壳体的承载能力。由于这一问题的严重性，因此它在近代力学研究中，吸引了国内外很多学者从事多方面的理论探索和实验研究。四十年代后期，苏联学者鲁里叶（Липпе）从扁壳理论出发，导出了圆柱壳开小圆孔的解。由于它仅适用于很小的圆孔，而且限于自由孔（孔边无加强措施），所以只是在理论上做了个开端，距离实际应用尚有很大距离。六十年代和七十年代中，我国为了国防工程的需要，曾组织各方面力量对上述问题进行了研究。除了对各种理论方法作系统的探索外，还进行了大量而细致的模型实验。获得了在深海受力条件下，满足工程尺度要求的设计计算方法。本书系统地总结了这些研究内容，为工程界服务。

本书是一本论述壳体开孔问题的专著。它的主要章节和内容是中国船舶科学研究中心多年来在壳体开孔理论与实验研究方面所取得的成果的总结。书中的部份章节亦反映了我国以著名力学家钱令希教授为首的壳体开孔课题小组的成果。

由于本书是直接为从事壳体结构设计的工程师而写的，因此作者在写这本书的过程中特别注意了下述特点：

1. 理论与实际相结合，落实于工程应用。作者针对壳体开孔问题，系统地介绍了壳体理论，并推导了正交非主曲率坐标中的基本方程。求解过程中广泛地利用了前人的技巧，获得了满足工

程需要的近似理论解,特别是壳体受均匀外压(或内压),孔边有各种加强措施的近似解,并编制了便于工程设计应用的曲线图谱和简便的计算公式。对于若干在理论上难于处理的实际工程问题,如斜交孔、排孔等,作者通过计算与实验亦提供了设计上可采用的近似的处理方法,供工程设计使用。

2. 计算与实验并重,互相引证。作者对解析解进行了大量具体计算,又与数值有限元法的结果进行了对比,二者结果相当接近。在单孔问题上用解析的近似解法能很快地获得结果,但在复杂的排孔情况下,数值有限元法则具有更好的适应能力。在开展理论计算工作的同时,中国船舶科学研究中心的水下结构课题组和试验室尚进行了大量细致的模型试验工作。实验结果和计算结果吻合良好,说明二者的成果均是可信赖的。同时,实验工作又推动了理论工作的发展。作者在近似理论解法的推导中,亦正是利用了基于实验中所观察到的结构受力变形特点,据此引入简化假设,而使复杂的问题简化。另外,对有些复杂的目前在理论上尚难于很好解决的问题,如开孔壳体结构的承载能力等,作者通过实验与分析亦获得了可供使用的设计计算方法。

全书共分五章。

第一章详细推导了薄壳理论的基本方程式。与迄今国内已出版的弹性薄壳理论的书不同,作者是在正交非主曲率坐标系中导出的壳体基本方程式。这是本书的理论基础。本书就是从这些方程出发来求解壳体开孔问题的。

第二章论述壳体开孔问题的解析解法。内容包括鲁里叶的圆柱壳开小圆孔问题的解(作者修正了鲁里叶解中的计算错误);钱令希教授的圆柱壳开圆孔问题的解,以及作者推广、引伸钱教授的解,而导出的两个正交圆柱壳在内压力 p 作用下的应力计算公式。

第三章针对工程上常常遇到的围壁或围壁、加厚板组合加强的球壳或圆柱壳开孔问题,通过引入基于试验研究而提出的近似假定,仅利用初等函数就导出了壳体开孔问题的近似理论计算公式。将近似理论公式进一步简化,又导出简化公式,并给出设计

计算图谱，使用方便，且与大量试验结果相吻合。这是本书的重点。

第四章论述了壳体开孔问题的有限元分析。并借助SAP-5等程序对圆柱壳开单孔或多孔等复杂的开孔问题作了数值计算。

第五章详细介绍了壳体开孔的试验研究工作。

由于设计的模型尺度大，数量多，因此，测得的数据是极其宝贵的。总结这部份试验研究工作对指导壳体开孔的理论研究、试验研究都具有重要意义。尤其需指出的是，在壳体开孔稳定性问题目前国内、外尚未很好解决之时，作者依据自己的试验研究，提出了在静水外压力作用下有孔环肋圆柱壳破坏压力的估算公式，供设计计算使用。著者在撰写本章内容时，尚引用了中国船舶科学研究中心王宇强、冯元修、洪海宝、姚有顺、朱根兴、徐绚、丁永官等同志的研究报告。

本书的部份内容在出版前业已编入我国水下船舶结构设计计算规则，并在实践中使用了多年。部份章节内容亦已被编入高等院校的教科书。

本书中的研究成果，除可直接用作水下船舶和水中兵器开孔结构的设计计算方法外，还可供化工机械、核工业、航空、建筑等部门设计开孔结构时参考使用。亦可用作高等院校有关专业教师和研究生的参考书。

对书中的不足之处，著者诚恳地欢迎广大读者批评指正。

目 录

第一章 薄壳理论的基本方程	1
§ 1 曲面理论的基本知识	1
1.1 曲面的第一基本型	1
1.2 曲面的第二基本型	3
1.3 曲面理论的基本公式	6
1.4 z 曲面上的单位矢量	11
§ 2 壳体的位移与应变	12
2.1 中曲面的位移与应变	12
2.2 z 曲面的位移与应变	17
§ 3 壳体上的内力和力矩	21
§ 4 壳体的平衡方程式	26
§ 5 壳体的变形协调方程	31
§ 6 壳体的边界条件	36
§ 7 壳体的近似理论与简化方程	47
第二章 壳体开孔问题的解析分析	60
§ 1 圆柱壳开小圆孔问题的解	60
1.1 求解圆柱壳开小圆孔问题的基本方程式及其解	60
1.2 开有一个小圆孔的圆柱壳的应力分析	67
§ 2 圆柱壳开圆孔问题的解	82
2.1 坐标系	83
2.2 基本方程式及其解	84
2.3 U_{nm} 、 V_{nm} 及其导数的计算	92
2.4 自由孔边	103
2.5 刚性环加固边	114
2.6 应力系数的计算	126
2.7 两个正交的圆柱壳在内压力 p 作用下的应力分析	132
§ 3 用边界系数法计算球形潜水器观察窗结构的应力	151
3.1 观察窗加强构件的受力分析	151
3.2 环-球壳连接处的变形协调条件	152
3.3 边界系数的计算	154

3.4 球壳应力的计算	159
附录2.1 k'_0 公式的推导	163
附录2.2 板中刚性圆环加强的圆孔附近的应力系数	166
第三章 围壁或围壁、加厚板组合加强的壳体开孔的近似计算方法	173
§ 1 承受沿径向均匀分布线载荷的圆柱壳的有效长度	174
§ 2 正交非主曲率坐标系中圆柱壳的基本方程式	185
2.1 圆柱壳在正交非主曲率坐标系 ρ 、 θ 中拉梅系数 A_1 、 A_2 、法截线曲率 k_ρ 、 k_θ 以及扭转曲率 $k_{\rho\theta}$ 的计算	185
2.2 圆柱壳在正交非主曲率坐标系中的基本方程式	189
§ 3 围壁加强的圆柱壳开孔应力系数的计算	191
3.1 近似简化假定	191
3.2 壳体的变分方程式	194
3.3 基本方程式的解	199
3.4 待定系数的确定	203
3.5 围壁加强的圆柱壳开孔应力系数的计算	212
§ 4 围壁加强的球壳开孔的应力系数的计算 (解法一)	219
4.1 球壳的基本方程式及其解	220
4.2 待定系数的确定	223
4.3 应力系数的计算	228
4.4 应力系数计算公式的退化问题	234
§ 5 围壁加强的球壳开孔的应力系数的计算 (解法二)	235
5.1 近似简化假定	235
5.2 基本方程式及其解	236
5.3 解中待定常数的确定	236
5.4 应力系数的计算	241
§ 6 围壁、加厚板组合加强的圆柱壳开孔的应力集中的计算方法	243
6.1 近似简化假定	243
6.2 基本方程式及其解	244
6.3 待定常数的确定	245
6.4 应力集中系数的计算	258
6.5 应力集中系数的退化问题	261
§ 7 围壁、加厚板组合加强的球壳开孔的应力计算	263
7.1 简化假定及基本方程式的解	263
7.2 待定常数的确定	265

7.3 应力系数的计算	269
7.4 应力系数的退化问题	272
§ 8 近似计算方法的可靠性分析	275
附录3.1 有效长度系数 ξ	280
附录3.2 平板开圆孔用围壁和加厚板组合加强的应力计算	284
附录3.3 ψ_0 、 ψ_u 的计算值	296
第四章 圆柱薄壳开孔有限元分析	297
§ 1 求解薄壳问题的有限元方法	297
1.1 薄板问题的基本关系式	297
1.2 薄壳问题的泛函	306
1.3 薄壳问题的有限元方法	312
§ 2 圆柱薄壳开孔有限元分析	337
2.1 围壁加强的圆柱壳单个正交圆孔	339
2.2 围壁加强的圆柱壳双排连续开孔	344
2.3 自升式钻井船圆柱桩腿开孔在轴向拉力作用下的应力计算	357
§ 3 曲壳单元在壳体结构中的应用	359
3.1 曲壳单元的几何近似	360
3.2 曲壳单元的位移场	362
3.3 整体坐标中的应变	365
3.4 局部坐标中的应变与应力	366
3.5 单元的刚度矩阵	371
3.6 等效节点载荷	378
3.7 应力计算	379
3.8 曲壳单元的应用	380
第五章 壳体开孔的试验研究	385
§ 1 在静水压力作用下圆柱壳开自由圆孔的强度试验	386
1.1 自由圆孔强度试验概述	386
1.2 自由孔的边界条件	387
1.3 自由孔边界试验的主要试验结果	389
§ 2 圆柱壳开有围壁加强的圆形切口的模型试验	395
2.1 影响测试数据稳定性的诸因素	396
2.2 加强围壁有效面积的试验分析	401
2.3 系列模型试验的主要结果及分析	404
§ 3 开孔区域附近的环形肋骨与孔口应力集中的相互影响	415
§ 4 开有围壁加强的圆形切口的环肋圆柱壳在静水外压 时破坏压力的确定	419

§ 5 沿壳体母线开有多个用围壁加强的圆形孔口的圆柱壳	428
5.1 用围壁加强的单排连续开孔	429
5.2 用围壁加强的双排连续开孔	435
§ 6 壳体开孔的光弹性试验	440
6.1 用量纲分析的方法确定相似准则	440
6.2 光弹性壳体模型的制作	443
6.3 光弹性冻结实验	444
6.4 光弹性圆柱壳开孔模型的试验结果	446
参考文献	453

第一章 薄壳理论的基本方程

由于水下船舶, 诸如潜艇、潜水器、水下武器以及海洋工程中的壳体结构等, 其曲率半径 R 与壳厚 h 之比, 一般在 $30 \leq R/h \leq 250$ 的范围内, 因此可以引用薄壳理论的基本方程式。

薄壳理论通常采用如下所述的基本假定:

1) 变形前垂直于中曲面的壳体直线纤维, 变形后仍垂直于变形后的中曲面;

2) 与中曲面平行的平行曲面上的法向应力与其它应力相比可略去不计。

在求解壳体开孔问题时, 有时采用正交非主曲率坐标, 因此在本章的叙述中, 除一般的正交主曲率坐标系统中的壳体方程外, 尚给出正交非主曲率坐标系统中的有关参数与方程。

§ 1 曲面理论的基本知识

1.1 曲面的第一基本型

如图 1.1 所示, 曲面上任意点 P 的位置可以用该点的矢量 $\vec{R}$ 来确定

$$\vec{R} = \vec{R}(\alpha_1, \alpha_2) \quad (1.1)$$

其中 α_1, α_2 通常称为曲线坐标, 亦称高斯坐标。

当坐标 α_1 保持不变值, 即 $\alpha_1 = \alpha_{1_0}$, 而 α_2 发生变化, 这时矢量方程就可确定位于所考虑曲面内的空间曲线, 这样的线称为 α_2 线; 同样, 当坐标 α_2 保持不变值, $\alpha_2 = \alpha_{2_0}$ 时, 而 α_1 发生变化, 此时矢量方程就可确定位于所考虑曲面内的空间曲线, 这样的线称为 α_1 线。

若在矢量 $\vec{R}$ 的终点处, 置一直角坐标系 (x, y, z) , 则

$$\vec{R} = x(\alpha_1, \alpha_2)\vec{i} + y(\alpha_1, \alpha_2)\vec{j} + z(\alpha_1, \alpha_2)\vec{k} \quad (1.2)$$

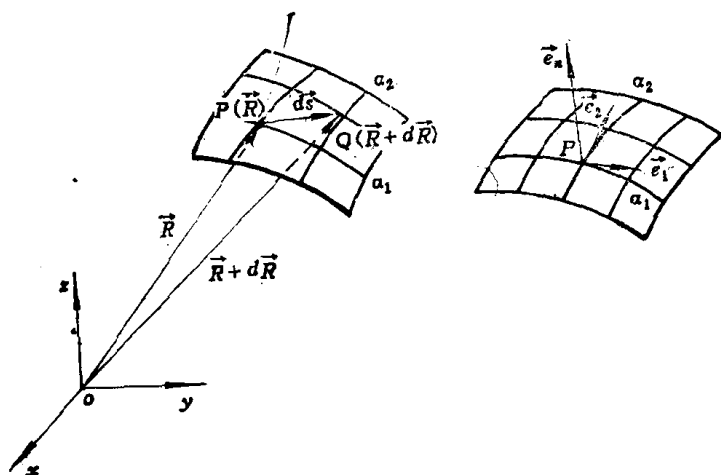


图1.1 矢量坐标

其中 $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ 分别为设置于 x , y , z 轴正方向的单位坐标矢量。

现在我们来讨论矢量 $\vec{R}$ 对 α_1 , α_2 的导数。为此引入符号

$$\begin{aligned}\vec{R}_{,\alpha_1} &= \frac{\partial \vec{R}}{\partial \alpha_1} \\ \vec{R}_{,\alpha_2} &= \frac{\partial \vec{R}}{\partial \alpha_2}\end{aligned}\quad (1.3)$$

显然 $\vec{R}_{,\alpha_1}$, $\vec{R}_{,\alpha_2}$ 必在相应点上分别与 α_1 线, α_2 线相切。

考虑曲面上无限接近的两点 $P(\vec{R})$, $Q(\vec{R} + d\vec{R})$ (见图1.1)。

两点之间的弧长 $\widehat{PQ}$ 是一个矢量 $d\vec{s}$, 且

$$d\vec{s} = d\vec{R} \quad (1.4)$$

由式 (1.1) 得

$$d\vec{R} = \vec{R}_{,\alpha_1} d\alpha_1 + \vec{R}_{,\alpha_2} d\alpha_2 \quad (1.5)$$

于是, 曲面上任意曲线弧长微分的平方为

$$d\vec{s}^2 = d\vec{R}^2 = \vec{R}_{,\alpha_1}^2 d\alpha_1^2 + 2\vec{R}_{,\alpha_1} \cdot \vec{R}_{,\alpha_2} d\alpha_1 d\alpha_2 + \vec{R}_{,\alpha_2}^2 d\alpha_2^2 \quad (1.6)$$

式中 “ $\cdot$ ” 表示两个不同矢量的标量积; 矢量的平方亦指矢量本身的标量积。引入记号

$$\begin{aligned}
 A_1^2 &= R_{,\alpha_1}^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha_1} \right)^2 \\
 A_2^2 &= R_{,\alpha_2}^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha_2} \right)^2
 \end{aligned} \quad (1.7)$$

在后面的叙述中, α_1, α_2 总是取为壳体变形前中曲上的正交曲线坐标。在这种情况下, 有

$$\vec{R}_{,\alpha_1} \cdot \vec{R}_{,\alpha_2} = 0 \quad (1.8)$$

这样式 (1.6) 可写成

$$I = d\vec{s}^2 = A_1^2 d\alpha_1^2 + A_2^2 d\alpha_2^2 \quad (1.9)$$

方程 (1.9) 就是在正交曲线坐标下, 表示曲线弧长的第一基本型。其中 A_1, A_2 在微分几何上称为拉梅系数。

现在引入与 α_1 线, α_2 线在 P 点相切的单位坐标矢量 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 和在该点与曲面垂直的法向单位坐标矢量 $\vec{e}_n$ (见图1.1), 显然有

$$\left. \begin{aligned}
 \vec{e}_1 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial \vec{R}}{\partial \alpha_1} = \frac{1}{A_1} \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha_1} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \alpha_1} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial \alpha_1} \vec{k} \right) \\
 \vec{e}_2 &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial \vec{R}}{\partial \alpha_2} = \frac{1}{A_2} \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha_2} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \alpha_2} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial \alpha_2} \vec{k} \right) \\
 \vec{e}_n &= \vec{e}_1 \times \vec{e}_2
 \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

式中“ $\times$ ”表示矢量积。三个单位坐标矢量 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_n$ 称为曲面的基矢量。

1.2 曲面的第二基本型

设 P 为曲面 Σ 上的任意点, 过 P 点的任意平面 π 截曲面 Σ 得截线 c (见图 1.2)。曲面的方程仍用式 (1.1) 来表示, 而曲线 c 的方程可写成参数形式

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= \alpha_1(s) \\
 \alpha_2 &= \alpha_2(s)
 \end{aligned} \quad (1.11)$$

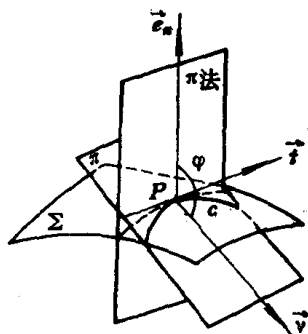


图1.2 曲面的第二基本型

其中参数 s 为曲线 c 的弧长。这根曲线在其切线方向的单位矢量 $\vec{i}$ 为

$$\vec{t} = \frac{d\vec{R}}{ds} = \vec{R}_{,\alpha_1} \frac{d\alpha_1}{ds} + \vec{R}_{,\alpha_2} \frac{d\alpha_2}{ds} \quad (1.12)$$

再对 s 微分一次, 得

$$\begin{aligned} k\vec{v} = \frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{d^2\vec{R}}{ds^2} = \vec{R}_{,\alpha_1\alpha_2} \left(\frac{d\alpha_1}{ds} \right)^2 + 2\vec{R}_{,\alpha_1\alpha_2} \frac{d\alpha_1}{ds} \frac{d\alpha_2}{ds} \\ + \vec{R}_{,\alpha_2\alpha_2} \left(\frac{d\alpha_2}{ds} \right)^2 + \vec{R}_{,\alpha_1} \frac{d^2\alpha_1}{ds^2} + \vec{R}_{,\alpha_2} \frac{d^2\alpha_2}{ds^2} \end{aligned} \quad (1.13)$$

$\frac{d\vec{t}}{ds}$ 表示曲线 c 的曲率矢量, 它与矢量 $\vec{t}$ 正交, 并作用在曲线 c 的主法线方向内, 因此可以写成 $k\vec{v}$ 的形式。其中 $\vec{v}$ 为曲线 c 的主法线方向内的单位矢量, 而 k 就是曲率。

将式 (1.13) 与 $\vec{e}_n$ 进行标量相乘, 并注意到关系式

$$\vec{e}_n \cdot \vec{v} = \cos \varphi \quad (1.14)$$

式中 φ 表示 c 的主法线单位矢量 $\vec{v}$ 与曲面在 P 点处的法线单位矢量 $\vec{e}_n$ 之间的夹角 (见图 1.2)。于是得到

$$\begin{aligned} k \cos \varphi = \vec{e}_n \cdot \vec{R}_{,\alpha_1\alpha_1} \left(\frac{d\alpha_1}{ds} \right)^2 + 2\vec{e}_n \cdot \vec{R}_{,\alpha_1\alpha_2} \frac{d\alpha_1}{ds} \frac{d\alpha_2}{ds} \\ + \vec{e}_n \cdot \vec{R}_{,\alpha_2\alpha_2} \left(\frac{d\alpha_2}{ds} \right)^2 \end{aligned} \quad (1.15)$$

令

$$\left. \begin{aligned} L &= \vec{e}_n \cdot \vec{R}_{,\alpha_1\alpha_1} \\ M &= \vec{e}_n \cdot \vec{R}_{,\alpha_1\alpha_2} \\ N &= \vec{e}_n \cdot \vec{R}_{,\alpha_2\alpha_2} \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

或利用式 (1.1), 式 (1.10), 上式可写成

$$L = \frac{1}{A_1 A_2} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha_1^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha_1^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha_1^2} \\ \frac{\partial x}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial y}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial z}{\partial \alpha_1} \\ \frac{\partial x}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial y}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial z}{\partial \alpha_2} \end{vmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned}
 M &= \frac{1}{A_1 A_2} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} & \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} \\ \frac{\partial x}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial y}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial z}{\partial \alpha_1} \\ \frac{\partial x}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial y}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial z}{\partial \alpha_2} \end{vmatrix} \\
 N &= \frac{1}{A_1 A_2} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha_2^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha_2^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha_2^2} \\ \frac{\partial x}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial y}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial z}{\partial \alpha_1} \\ \frac{\partial x}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial y}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial z}{\partial \alpha_2} \end{vmatrix}
 \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

又因为

$$\vec{e}_n \cdot \vec{R}_{,\alpha_1} = 0$$

$$\vec{e}_n \cdot \vec{R}_{,\alpha_2} = 0$$

由此可导出

$$\begin{aligned}
 \vec{e}_n \cdot \vec{R}_{,\alpha_1 \alpha_1} + (\vec{e}_n)_{,\alpha_1} \cdot \vec{R}_{,\alpha_1} &= \vec{e}_n \cdot \vec{R}_{,\alpha_1 \alpha_2} + (\vec{e}_n)_{,\alpha_2} \cdot \vec{R}_{,\alpha_1} = \vec{e}_n \cdot R_{,\alpha_2 \alpha_1} + \\
 (\vec{e}_n)_{,\alpha_1} \cdot \vec{R}_{,\alpha_2} &= \vec{e}_n \cdot R_{,\alpha_2 \alpha_2} + (\vec{e}_n)_{,\alpha_2} \cdot \vec{R}_{,\alpha_2} = 0
 \end{aligned}$$

这样可得出 L , M , N 的另一种表达形式

$$\left. \begin{aligned}
 L &= -(\vec{e}_n)_{,\alpha_1} \cdot \vec{R}_{,\alpha_1} \\
 M &= -(\vec{e}_n)_{,\alpha_1} \cdot \vec{R}_{,\alpha_2} = -(\vec{e}_n)_{,\alpha_2} \cdot \vec{R}_{,\alpha_1} \\
 N &= -(\vec{e}_n)_{,\alpha_2} \cdot \vec{R}_{,\alpha_2}
 \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

将式 (1.16) 代入式 (1.15), 并注意到式 (1.9), 则得

$$k \cos \varphi = \frac{L d\alpha_1^2 + 2M d\alpha_1 d\alpha_2 + N d\alpha_2^2}{A_1^2 d\alpha_1^2 + A_2^2 d\alpha_2^2} = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{I}} \quad (1.19)$$

上式右边的分子

$$\mathbf{I} = L d\alpha_1^2 + 2M d\alpha_1 d\alpha_2 + N d\alpha_2^2 \quad (1.20)$$

在微分几何上称为曲面的第二基本型, 用以表征曲面上曲线的曲率。

当用式 (1.19) 求曲面的法曲率 (曲面与其法向平面相交所得曲线即法截线的曲率) 时, 在这种情况下, φ 等于 0 或 π , 因

此 $\cos \varphi = \pm 1$ 。现在来考虑 $\varphi = \pi$ 的情形, 即: 我们规定矢量 $\vec{e}_n$ 应当指向曲面的凸方向, 而这时曲率为正的情形。设法截线的曲率半径为 R , 则

$$\frac{1}{R} = - \frac{L d\alpha_1^2 + 2M d\alpha_1 d\alpha_2 + N d\alpha_2^2}{A_1^2 d\alpha_1^2 + A_2^2 d\alpha_2^2} \quad (1.21)$$

对于 α_1 线、 α_2 线, 由 (1.21) 式得

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{1}{R_{\alpha_1}} = - \frac{L}{A_1^2} \\ k_2 &= \frac{1}{R_{\alpha_2}} = - \frac{N}{A_2^2} \end{aligned} \quad (1.22)$$

式中 k_1 、 k_2 分别称为沿 α_1 、 α_2 坐标线的曲面法截线的曲率。令

$$k_{12} = \frac{1}{R_{1.2}} = - \frac{M}{A_1 A_2} \quad (1.23)$$

并称 k_{12} 为曲面的扭转曲率。当 $k_{12} = 0$, 即 $M = 0$ 时, k_1 , k_2 即为曲面的主曲率, R_{α_1} , R_{α_2} 即为主曲率半径。

1.3 曲面理论的基本公式

曲面的第一基本型表示曲面上曲线的弧长, 曲面的第二基本型表征曲面上曲线的曲率, 它们可以完全确定曲面的几何性质。曲面的两个基本型包含着两类基本量, 如果曲面是光滑而连续的, 那么这些基本量之间存在着某种关系。现在我们就来导出这些关系。

首先我们来计算单位矢量 $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_n$ 的一阶偏导数。

设曲面方程函数 $\vec{R}(\alpha_1, \alpha_2)$ 在 (α_1, α_2) 域内是连续的, 并且具有三阶连续导函数, 按式 (1.10) 有

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \vec{e}_1}{\partial \alpha_1} &= \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial \vec{R}}{\partial \alpha_1} \right) = \frac{1}{A_1} \frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial \alpha_1^2} + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{1}{A_1} \right) \frac{\partial \vec{R}}{\partial \alpha_1} \\ \frac{\partial \vec{e}_2}{\partial \alpha_1} &= \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial \vec{R}}{\partial \alpha_2} \right) = \frac{1}{A_2} \frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{1}{A_2} \right) \frac{\partial \vec{R}}{\partial \alpha_2} \\ \frac{\partial \vec{e}_1}{\partial \alpha_2} &= \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial \vec{R}}{\partial \alpha_1} \right) = \frac{1}{A_1} \frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{1}{A_1} \right) \frac{\partial \vec{R}}{\partial \alpha_1} \\ \frac{\partial \vec{e}_2}{\partial \alpha_2} &= \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial \vec{R}}{\partial \alpha_2} \right) = \frac{1}{A_2} \frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial \alpha_2^2} + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{1}{A_2} \right) \frac{\partial \vec{R}}{\partial \alpha_2} \end{aligned} \right\} \quad (1.24)$$

单位矢量的一阶偏导数本身还是一个矢量。它们可以用其在单位坐标矢量方向上的投影分量来表示

$$\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial \alpha_1} = \sum_{j=1}^3 a_{ij} \vec{e}_j \quad (1.25)$$

$$\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial \alpha_2} = \sum_{j=1}^3 b_{ij} \vec{e}_j \quad (i = 1, 2, 3, \vec{e}_3 = \vec{e}_n)$$

其中

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial \alpha_1} \cdot \vec{e}_j \\ b_{ij} &= \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial \alpha_2} \cdot \vec{e}_j \end{aligned} \quad (1.26)$$

它们都是 (α_1, α_2) 的纯量函数。由于单位坐标矢量的正交性, 得

$$\delta_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \begin{cases} 1 & \text{当 } i = j \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } i \neq j \text{ 时} \end{cases} \quad (1.27)$$

将上式对 α_1 取偏导数, 则得

$$\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial \alpha_1} \cdot \vec{e}_j + \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial \alpha_1} \cdot \vec{e}_i = 0 \quad (1.28)$$

将 (1.25) 式的第一式代入上式,

$$\sum_{j=1}^3 (a_{ij} \cdot \vec{e}_j) \cdot \vec{e}_j + \sum_{i=1}^3 (a_{ji} \vec{e}_i) \cdot \vec{e}_i = 0$$

考虑到单位坐标矢量的正交性, 有

$$a_{ij} + a_{ji} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1.29)$$

同理, 将式 (1.27) 对 α_2 取偏导数, 则可得到

$$b_{ij} + b_{ji} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1.30)$$

由式 (1.29) 和式 (1.30) 可知, 矩阵 $\|a_{ij}\|$ 与 $\|b_{ij}\|$ 都是反对称的正方阵。根据式 (1.29), (1.26), (1.24), (1.7), (1.16), (1.22), (1.23), 我们有