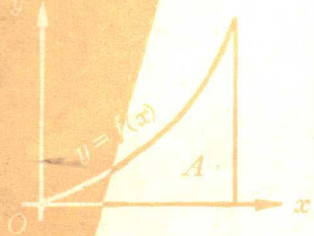


# 无限的数学

秦 元 勋

北 京 出 版 社

# 无 限 的 数 学

秦 元 勋

北 京 出 版 社

每届中学生数学竞赛之前，北京市中学生数学竞赛委员会都要邀请一些著名数学家为中学生数学爱好者作辅导报告。这些报告深受广大师生的欢迎。特将其编成《北京市中学生数学竞赛辅导报告汇集》，予以出版。

本书是秦元勋同志为北京市1978年中学生数学竞赛所作的辅导报告。

无 限 的 数 学

秦 元 勋

*

北 京 出 版 社 出 版

北京市新华书店发行

北京印刷一厂印刷

*

787×1092毫米 32开本 1印张 18,000字

1979年1月第1版 1979年1月第1次印刷

印数 1—100,000

书号：7071·577 定价：0.10元

# 目 录

恩格斯在《自然辩证法》中指出："在一切理论成就中，未必再有什么象十七世纪下半叶微积分的发明那样被看作人类精神的最高胜利了."经过三个世纪，微积分已经成为现代自然科学和技术的基础工具之一．在实现四个现代化的伟大斗争中，微积分应当普及到中学和广大工农兵群众中去，成为象加减乘除一样的常识．

下面介绍三个概念：无穷（无穷大和无穷小）、积分和微商．

## §1 由"愚公移山"的寓言引出"无穷大"的概念

我们大家都很熟悉"愚公移山"这个寓言．智叟的观点是："你们父子数人要挖掉这样两座大山是完全不可能的."愚公的观点是："我死了以后有我的儿子，儿子死了，又有孙子，子子孙孙是没有穷尽的．这两座山虽然很高，却是不会再增高了，挖一点就会少一点，为什么挖不平呢？"

愚公的观点给革命人民带来了很多的启发．这里牵涉到矛盾的两个方面．矛盾的一个方面是山．对于愚公父子数人来说，山的确很高．这就是智叟所看到的一面．但矛盾还有

另一个主导的方面，这就是愚公子子孙孙每天挖山不止，而山是不会再增高的，挖一点就少一点，为什么挖不平呢？三大革命的实践证明了：革命人民的力量是无穷的，愚公的观点是真理，智叟的观点已经破产。

这里，从革命实践中，我们已经体会到“无穷”这个概念的含义。现在，我们要用数学的语言来描述它。

在山的一方，它是很高的，它的体积例如说有$N$立方米，$N$可以是任何一个很大的数（百万、千万、万万等等），但不会再增高了，也就是说$N$是一个固定的数。

在愚公这一方，他的子子孙孙是没有穷尽的，每天挖山不止。例如每天挖1立方米，1，2，3，4……这样不断地挖下去，总有一天要把$N$立方米的山挖完。

这两个方面合在一起便是：任意取一个很大的数目$N$，不管取多大，但取了之后便固定下来；另一方面有一个不断增加的过程1，2，3，4，…… $n$，……，不断数下去，总有一个时候要数到$n>N$。

这个不断发展的过程（相当于每天挖山不止）及其后果（相当于总有一天要挖平）便是无穷大的概念。在数学上用$\infty$的符号来记它，读作“无穷大”。这个过程可以用式子

$$n \longrightarrow \infty$$

来表示，读作“$n$趋于无穷大”。

当然，在上面的例子中是用最简单的算术级数即1，2，3，4，……来表示这个无穷的过程的。实际上有各种各样向无穷大发展的可能性。例如生物繁殖，如果不加控制，可能以几何级数增长。1生2，2生4，4生8，……如此下去，这

样得到一个几何级数系列：

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\cdots\cdots,\ 2^n,\cdots\cdots \qquad (n\text{ 为正整数})$$

这也是一种向无穷大发展的过程．这样当 $n\longrightarrow\infty$ 时，也有

$$2^n\longrightarrow\infty.$$

这类过程，在原子核裂变的链式反应中也是经常出现的．

总之，无穷大是表示一个不断发展的过程及其后果的概念．

## §2 由"一分为二"的思想引出"无穷小"的概念

伟大导师毛主席教导我们："事物都是一分为二的"．三大革命实践反复证明了这一真理．在物理学中，物质分解为分子，分子分解为原子，原子分解为原子核和电子，……不断可分下去，没有穷尽．

我国古代名家有一种论断："一尺之棰，日取其半，万世不竭"．

用数学的语言来描述这个无限的过程，就是：设有一条线段，长度为 1．

第一天，一分为二，得 $\frac{1}{2}=\frac{1}{2^1}$；

第二天，一分为二，得 $\frac{1}{4}=\frac{1}{2^2}$；

第三天，一分为二，得$\frac{1}{8}=\frac{1}{2^3}$；

……

第 $n$ 天，一分为二，得$\frac{1}{2^n}$；

…… （$n$ 为正整数）

如此下去，这样也得到一个无穷的过程，但是和"无穷大"的过程相反，这是一个"无穷小"的过程。

具体地说，

$$2^1,\ 2^2,\ 2^3,\cdots\cdots,\ 2^n,\cdots\cdots \qquad (n\text{ 为自然数})$$

是一个"无穷大"的过程，亦即任取一个大正数 $N$，不管 $N$ 多大，总有一个自然数 $n$，能够使得

$$2^n>N.$$

相反地有

$$\frac{1}{2^1},\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2^3},\cdots\cdots,\frac{1}{2^n},\ \cdots\cdots \qquad (n\text{ 为自然数})$$

是一个"无穷小"的过程，亦即任取一个小正数 $\varepsilon$*，不管 $\varepsilon$ 多小，总有一个自然数 $n$，使得

$$0<\frac{1}{2^n}<\varepsilon.$$

证明是不难的．取一个自然数 $n>\frac{1}{\varepsilon}>0$，则有

$$2^n>n>\frac{1}{\varepsilon}>0,$$

或

$$0<\frac{1}{2^n}<\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

* 希腊字母，读作"艾普西龙"。

在"无穷大"的情形，我们引入一个记号∞．在"无穷小"的情形，我们不需要再引入新记号．事实上，我们可以证明下面的

**定理** 设 $a$ 是一个确定的数，如果

$$|a|<\frac{1}{2^n}, \qquad (n\text{ 为所有自然数})$$

则

$$a=0.$$

**证明** 用反证法．如果 $a\neq0$，则 $|a|\neq0$，故 $|a|>0$，$\frac{1}{|a|}$为确定的正数．而已知

$$2^1,\ 2^2,\ 2^3,\cdots\cdots,\ 2^n,\cdots\cdots$$

是一个"无限大"的过程，故必有自然数 $n$ 使

$$2^n>\frac{1}{|a|},$$

即

$$|a|>\frac{1}{2^n}. \qquad (n\text{ 为某个自然数})$$

这与假设

$$|a|<\frac{1}{2^n} \qquad (n\text{ 为所有自然数})$$

相矛盾．故必有

$$a=0. \qquad \text{证毕.}$$

因此，不必引入新记号可有：当 $n\to\infty$，则

$$2^n\to\infty,\ \text{并且}\ \frac{1}{2^n}\to0.$$

## § 3 积分——无穷多个无穷小相加

下面用三个例子来说明积分的概念．

**例 1．** 求正方形的面积．

取边长为 1 的正方形，其面积记为 $A_0$，如图 1．

$$A_0=1\times1=1.$$

将这个正方形一分为二，得两个长方形，高为 1，底为 $\frac{1}{2}$，如图 2；再对这些长方形一分为二，得到 4 个长方形，高为 1，底为 $\frac{1}{2^2}$，如图 3；……．如此下去，一般得到 $2^n$ 个长方形，高为 1，底为 $\frac{1}{2^n}$，如图 4．

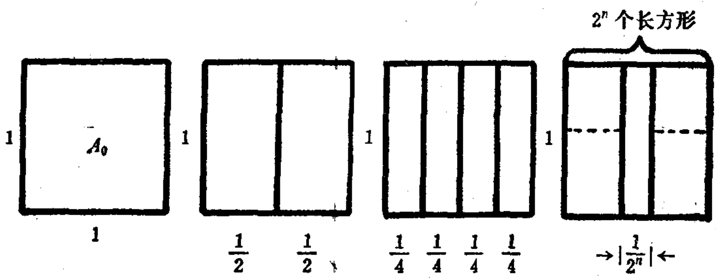


图 1　　图 2　　图 3　　图 4

长方形面积为高×底，由此，上述各图的面积可依次计

算如下：

$$1\times1=1,$$

$$1\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{2}=1,$$

$$1\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{4}=1,$$

……

$$\underbrace{1\times\frac{1}{2^n}+1\times\frac{1}{2^n}+\cdots+1\times\frac{1}{2^n}}_{2^n\text{项}}=1.$$

即 $$A_0=1.$$

当 $n$ 不断增大，则分块数 $2^n$ 不断增加，这是一个“无穷大”的过程．每块面积为 $\frac{1}{2^n}$，$n$ 不断增大，则 $\frac{1}{2^n}$ 不断减少，这是一个“无穷小”的过程．合并起来，便得到一个概念：

无穷多个无穷小量相加可以得一个数．

这便是“积分”的概念．

这个例子中每列可以相加，并均得 1．当然没有人用这样的办法去算正方形的面积 $A_0$．这里只不过用它来说明，无限多个等式描述了一个求面积的过程．

下面我们要进一步研究用无限多个不等式来求面积的过程．

**例 2**．求三角形的面积．

取夹边长为 1 的直角三角形，如图 5，其面积用 $A_1$ 记．

$$A_1=\frac{1\times1}{2}=\frac{1}{2}.$$

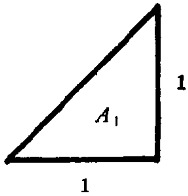


图 5

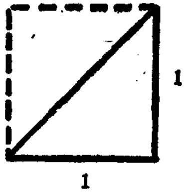


图 6

将这个三角形补成方形（图 6），可以看出，

$$0<A_1<1\times 1. \tag{1}$$

将图 5 中的三角形一分为二，如图 7，得到一个小三角形 $A_1^2$和一个梯形 $A_2^2$。

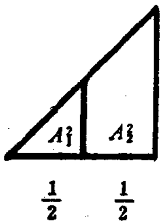


图 7

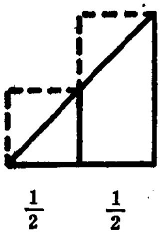


图 8

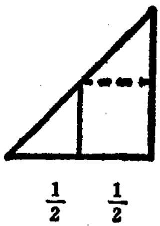


图 9

将 $A_1^2$ 补成正方形，将 $A_2^2$ 补成长方形，如图 8；又将 $A_2^2$ 切成正方形，如图 9。则可以看出，

$$0<A_1^2<\frac{1}{2}\times\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}<A_2^2<\frac{1}{2}\times\frac{2}{2}.$$

而 $$A_1=A_1^2+A_2^2.$$

故有不等式

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}<A_1<\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{2}. \tag{2}$$

将图 7 再一分为二得到图 10，即将该三角形分为一个小三角形 $A_1^4$ 和三个梯形 $A_2^4$，$A_3^4$，$A_4^4$。将这些小块补方如图 11

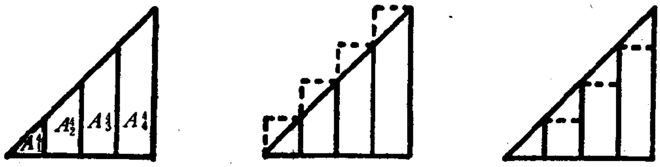


图 10　　图 11　　图 12

或切方如图 12，则有

$$0<A_1^4<\frac{1}{4}\times\frac{1}{4},$$

$$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}<A_2^4<\frac{1}{4}\times\frac{2}{4},$$

$$\frac{1}{4}\times\frac{2}{4}<A_3^4<\frac{1}{4}\times\frac{3}{4},$$

$$\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}<A_4^4<\frac{1}{4}\times\frac{4}{4}.$$

而 $$A_1=A_1^4+A_2^4+A_3^4+A_4^4,$$

故有

$$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}<A_1$$

$$<\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{4}{4}, \qquad (3)$$

……

将上面三个不等式(1)、(2)、(3)整理一下，得到

$$0<A_1<1\times 1,$$

$$\frac{1}{2^2}<A_1<\frac{1+2}{2^2},$$

$$\frac{1+2+3}{2^4}<A_1<\frac{1+2+3+4}{2^4},$$

……

一般地可以得到

$$\frac{1+2+\cdots+(2^n-1)}{2^{2n}}<A_1<\frac{1+2+3+\cdots+2^n}{2^{2n}}.$$

($n$ 为正整数)

当 $n=0$，1，2 时，即得上面三个不等式(1)、(2)、(3)。

由等差级数求和公式有

$$1+2+3+\cdots+2^n=\frac{2^n\times(2^n+1)}{2}.$$

故 $$\frac{1+2+3+\cdots+2^n}{2^{2n}}=\frac{2^n\times(2^n+1)}{2\times 2^{2n}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{n+1}};$$

$$\frac{1+2+3+\cdots+(2^n-1)}{2^{2n}}=\frac{1+2+\cdots+2^n}{2^{2n}}-\frac{2^n}{2^{2n}}$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{n+1}}\right)-\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}.$$

亦即有

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}<A_1<\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{n+1}},$$

或

$$-\frac{1}{2^{n+1}}<A_1-\frac{1}{2}<\frac{1}{2^{n+1}}.$$

故

$$\left|A_1-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2^{n+1}}. \qquad (n\text{ 为所有自然数})$$

注意到 $A_1$ 为边长一定的直角三角形的面积，是一个定数，因此 $A_1-\frac{1}{2}$ 也是一个定数．由§2的定理知

$$A_1-\frac{1}{2}=0,$$

或

$$A_1=\frac{1}{2}.$$

这样，用无穷多个不等式，求出了一个结果．当然，没有人用这样的办法去求三角形的面积．这里只不过以它来说明用无限多个不等式求出面积的过程．

有了上面这两个例子，了解了这种方法，我们可以进一步来看下面一个例子了．

**例 3**．求曲线 $y=x^2$ 下面的三角形的面积．

在 $x$-$y$ 平面上，用三条直线 $x=0$，$y=0$，$x=1$ 和一条抛物线 $y=x^2$ 围成一个三角形如图 13．其面积用 $A_2$ 记．求 $A_2$．

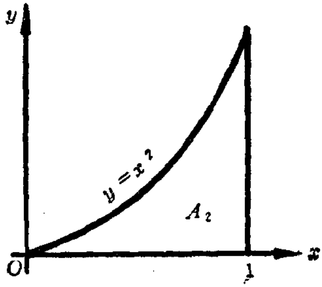


图 13

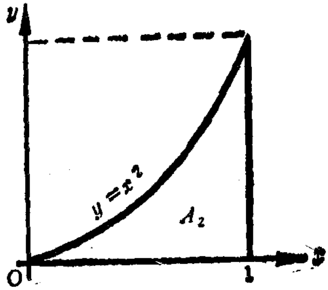


图 14

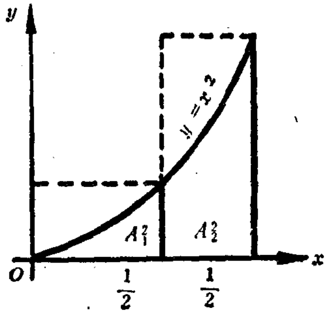


图 15

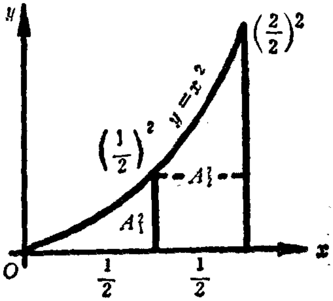


图 16

将曲边三角形补成方形如图 14．可以看出

$$0<A_2<1\times1. \tag{1}$$

将曲边三角形分为两块，即小曲边三角形 $A_1^2$ 和曲边梯形 $A_2^2$．将这些小块补方，如图 15 所示；将它们切方如图 16 所示．则

$$0<A_1^2<\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2<A_2^2<\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{2}\right)^2.$$

而
$$A_2=A_1^2+A_2^2,$$

故有

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2<A_2<\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{2}\right)^2. \tag{2}$$

将这种分割进行下去，一般分为 $2^n$ 块．将它们补平及切平，则得到

$$\frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{2^n}\right)^2+\frac{1}{2^n}\left(\frac{2}{2^n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{2^n}\left(\frac{2^n-1}{2^n}\right)^2$$

$$<A_2<\frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{2^n}\right)^2+\frac{1}{2^n}\left(\frac{2}{2^n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{2^n}\left(\frac{2^n}{2^n}\right)^2, \tag{3}$$

$n$ 为正整数．当 $n=0$，$n=1$ 时，就是上面已得的不等式(1)、(2)．记

$$I_n=\frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{2^n}\right)^2+\frac{1}{2^n}\left(\frac{2}{2^n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{2^n}\left(\frac{2^n}{2^n}\right)^2$$

$$=\frac{1}{(2^n)^3}[1^2+2^2+3^2+\cdots+(2^n)^2],$$

则有不等式

$$I_n-\frac{1}{2^n}\left(\frac{2^n}{2^n}\right)^2<A_2<I_n.$$

计算 $I_n$ 前要先证明一个高阶等差级数的公式：

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+m^2=\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}.$$

（$m$ 为正整数）

这个级数求和有很多证法．下面用数学归纳法来证明．

首先 $m=1$ 时，等式左方为