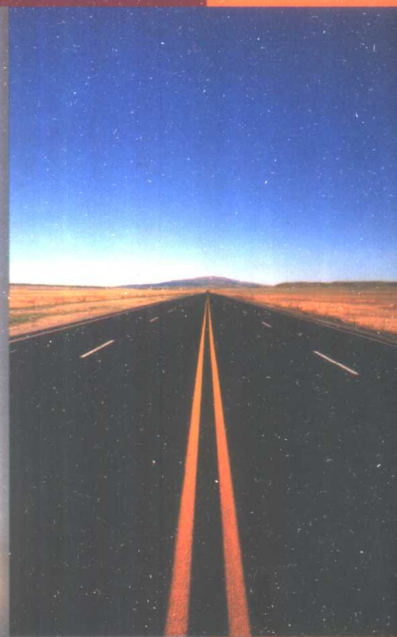
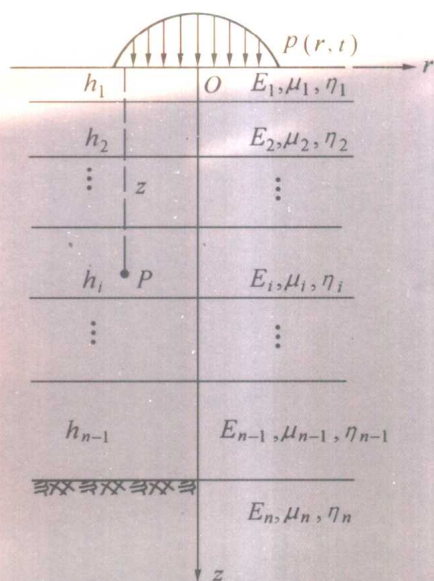


路桥结构理论与工程系列丛书

# 层状粘弹性体系力学

郭大智 任瑞波 编著



哈尔滨工业大学出版社

# 层状粘弹性体系力学

郭大智 任瑞波 编著

哈尔滨工业大学出版社  
哈尔滨

## 内容提要

本书主要介绍线粘弹性理论在层状体系中的应用,内容包括:模型理论,本构方程,轴对称圆形荷载作用下的层状粘弹性体系应力与位移的力学分析,非轴对称圆形荷载作用下的层状粘弹性体系应力与位移的力学计算等。本书是《层状弹性体系力学》的姊妹篇。

本书可供高等学校道路工程专业的高年级学生、研究生及从事道路工程的设计、研究人员参考。

### 图书在版编目(CIP)数据

层状粘弹性体系力学.郭大智等编著.

—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2001.10

ISBN 7-5603-1656-5

I.层… II.郭… III.层状体系-粘弹性-弹性力学 IV.0343

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 057937 号

出版发行 哈尔滨工业大学出版社  
社 址 哈尔滨市南岗区教化街 21 号 邮编 150006  
传 真 0451—6414749  
印 刷 地矿部黑龙江省测绘印制中心印刷厂  
开 本 787×1092 1/16 印张 17 字数 410 千字  
版 次 2001 年 10 月第 1 版 2001 年 10 月第 1 次印刷  
书 号 ISBN 7-5603-1656-5/TU·26  
印 数 1~3 000  
定 价 28.00 元

## 前 言

路面力学是拟定与研究沥青路面和水泥混凝土路面设计方法的理论基础,它包括层状弹性体系力学和层状粘弹性体系力学两大部分。为了适应培养研究生与开展路面设计理论和方法研究的需要,上海同济大学朱照宏教授、西安长安大学王秉纲教授和哈尔滨工业大学郭大智教授撰写了《路面力学计算》,并于1985年9月由人民交通出版社正式出版。这本书主要介绍均质体、双层体系和三层体系应力与位移的分析方法,为在我国普及路面力学知识起到了较大的促进作用。近几十年来,路面力学得到极大发展,尤其是我国的道路工作者做出卓越的成绩,将路面力学向前推进一大步。

1962年前后,为了建立柔性路面设计的理论基础,国内对层状弹性体系理论积极开展研究工作。为此,1963年该专题被列入国家十年科研规划重点课题的第2115项。当时,朱照宏教授利用轴对称洛甫位移函数求得双层和三层弹性体系在单圆均布垂直荷载作用下的应力与位移分量表达式;吴晋伟高级工程师根据轴对称苏斯威尔位移函数也导出双层和三层弹性体系在单圆均布垂直荷载作用下的应力和位移分量解析解。应当指出,这两种解法尽管表达式有所不同,但其计算结果却完全相同,而且是非常实用和有效的。1973年左右,笔者采用非轴对称洛甫位移函数得到双层和三层弹性体系在单圆均布单向水平荷载作用下的应力与位移分量理论解。这些成果虽然只是学习消化国外文献的结果,但它为我国今后的研究工作打下了良好的基础。

采用位移函数法求解应力与位移分量一般解时,必须满足如下两条要求:一是必须找出应力与位移分量同位移函数的关系式;二是位移函数必须为某一微分方程的解,否则,无法利用位移函数求解。因此,笔者和钟阳教授根据拉梅方程式,采用积分变换方法,分别以不同的物理量作为基本变量求解。在笔者的方法中,采用位移分量作为基本变量求解;钟阳教授先求得体积变形的解,然后再利用体积变形和位移分量的关系式求得位移分量的一般解。这两种解法大同小异,均属位移法求解。另外,钟阳教授还根据状态方程提出传递矩阵法,导出应力与位移分量的一般解。这三种求应力与位移一般解的方法,不仅解法新颖,而且应用广泛。

随着国民经济的高速发展,高等级公路也得到迅速发展。高等级公路必须修筑高等级路面,才能适应交通量高速发展的需要。高等级路面的路面层数往往超过三层,有的路面层数达到七层之多。因此,对于多层弹性体系的应力与位移如何计算,是一个急需解决的问题。在这方面,吴晋伟高级工程师提出“反力递推法”,笔者提出“系数递推法”,王凯教授提出“递推回代法”。这三种解法

均优于“矩阵解法”。

1964年,由于路面弯沉仪在我国全面推广应用,需要解决双圆和多圆荷载作用下的应力和位移分量的计算问题,笔者采用“两次坐标变换法”,导出多圆荷载作用下某点的应力和位移叠加公式。

在分析单圆均布单向水平荷载下层状弹性体系表面( $z=0$ )圆形周边( $r=\delta$ )处的应力时,发现其中某些应力值为无穷大。产生这种理论值与实际值不符的原因在于单向均布水平荷载在周边处有“突变”。笔者提出高次抛物面荷载,只要该荷载中的荷载系数取值适当,就会避免这种现象的发生。因此,有必要将这些成果加以总结,编辑成册。由于需要添加的内容较多,故决定编写《路面力学中的工程教学》、《层状弹性体系力学》、《层状粘弹性体系力学》三本书。

层状粘弹性体系力学是连续介质力学的一个重要组成部分,它是研究层状粘弹性体系因受外部荷载作用而发生的应力与位移。

层状粘弹性体系力学可分为层状线粘弹性体系理论和层状非线性粘弹性体系理论两大部分。本书只介绍层状线性粘弹性体系理论。考虑到本书不仅可以作为道路工程专业研究生的教材,而且还可供道路工程技术人员参考,因此,在编写时,注重基本概念、基础内容和基本方法。全书共分三篇,第一篇为粘弹性的基本理论;第二篇为层状粘弹性体系轴对称课题的应力与位移分析;第三篇为层状粘弹性体系非轴对称课题的应力与位移分析。

在本书编写过程中,曾得到侯云、郭玉青、谭忆秋、王彩霞、吴思刚、冯德有、王志永、姜丽伟、胡慧红等人的大力帮助,在此深表感谢。

本书除了可供高等学校道路工程专业高年级学生、研究生学习使用外,还可供从事路面工程设计、研究工作的人员学习参考之用。由于编者水平有限,书中的不妥之处在所难免,敬请读者批评指正,以便进一步修正补充。

郭大智  
2001年3月



## 作者简介

郭大智，哈尔滨工业大学教授。1936年出生于湖北武汉。1961年大学毕业，留校工作三十多年来，一直从事路面设计理论与方法的研究工作，先后进行了“柔性路面设计方法和计算参数”、“半刚性基层上沥青路面”、“柔性路面可靠度分析”等课题的理论分析工作，在层状弹性体系力学和层状粘弹性体系力学计算中独创了简捷可行的“郭大智解法”，所研制的“沥青路面设计与验算软件系统”（APDS系统），现已在全国各大公路设计研究院广泛使用。并参加1986年《公路柔性路面设计规范》和1997年《公路沥青路面设计规范》的编写工作。曾获国家科技进步二等奖，国家教委科技进步一等奖和多项省部级科技进步奖。1985年荣获建设部科技先进工作者称号，1991年获国务院颁发的政府特殊津贴。

# 目 录

## 第一篇 粘弹性的基本理论

第一章 基本概念	1
第一节 工作假设	1
第二节 粘弹性	2
第三节 蠕变和应力松弛	3
第四节 滞后与能耗	4
第二章 粘弹性模型理论	6
第一节 基本元件	6
第二节 麦克斯威尔模型	7
第三节 开尔文模型	11
第四节 三参量固体模型	13
第五节 伯格斯模型	18
第六节 广义麦克斯威尔模型	24
第七节 开尔文链	34
第八节 蠕变柔量和松弛模量	43
第九节 粘弹性模型的结构公式	47
第三章 积分型本构关系	48
第一节 线性叠加原理	48
第二节 卷积和斯蒂尔吉斯卷积	49
第三节 积分型本构方程	50
第四章 动态性能与温度效应	54
第一节 复模量和复柔量	54
第二节 粘弹性材料的能耗	60
第三节 材料函数之间的关系	62
第四节 时温等效原理	69
第五章 三维本构方程	73
第一节 张量简介	73
第二节 三维本构方程	77
第三节 几种典型模型的蠕变函数和松弛函数	80
第六章 线粘弹性理论的基本方程式	87
第一节 准静态平衡方程式	87

第二节	几何方程 .....	88
第三节	三维本构方程 .....	90
第四节	拉梅方程式 .....	96
第五节	对应原理 .....	97
第六节	相容条件 .....	99

## 第二篇 轴对称层状粘弹性体系力学分析

第七章	应力和位移的粘弹性一般解 .....	101
第一节	位移函数法 .....	101
第二节	郭大智积分变换解法 .....	104
第三节	钟阳积分变换解法 .....	107
第四节	传递矩阵解法 .....	111
第八章	轴对称粘弹性半空间体分析 .....	118
第一节	轴对称粘弹性半空间体的应力与位移一般解 .....	118
第二节	轴对称垂直荷载下的粘弹性半空间体 .....	119
第三节	长期固定圆形轴对称垂直荷载下的应力与位移 .....	120
第四节	半矩形波荷载的粘弹性半空间体分析 .....	129
第五节	半正弦波荷载的粘弹性半空间体分析 .....	132
第九章	双层粘弹性体系的力学分析 .....	138
第一节	轴对称层状粘弹性体系的一般解 .....	138
第二节	双层粘弹性连续体系的力学分析 .....	140
第三节	双层粘弹性完全滑动体系分析 .....	143
第四节	古德曼模型在双层粘弹性体系中的应用 .....	145
第十章	多层粘弹性体系的应力与位移 .....	148
第一节	多层粘弹性连续体系的系数递推法 .....	148
第二节	第一界面滑动、其余界面连续的系数递推法 .....	153
第三节	古德曼模型在系数递推法中的应用 .....	156
第四节	层状粘弹性体系的反力递推法 .....	161
第五节	古德曼模型在反力递推法中的应用 .....	167

## 第三篇 非轴对称空间课题的应力与位移

第十一章	水平荷载下的一般解 .....	170
第一节	位移函数法 .....	170
第二节	非轴对称空间课题一般解的郭大智解法 .....	176
第三节	非轴对称空间课题一般解的钟阳解法 .....	183
第四节	传递矩阵解法 .....	189
第五节	单向水平荷载作用下的一般解 .....	203



第六节	圆形单向水平荷载下的一般解·····	204
<b>第十二章</b>	<b>圆形单向水平荷载下的粘弹性半空间体·····</b>	<b>208</b>
第一节	圆形单向均布水平荷载下的应力与位移·····	208
第二节	半球形单向水平荷载下的应力与位移·····	220
第三节	刚性承载板单向水平荷载下的粘弹性半空间体·····	224
<b>第十三章</b>	<b>圆形单向水平荷载下的双层粘弹性体系分析·····</b>	<b>230</b>
第一节	双层粘弹性连续体系的应力与位移·····	230
第二节	双层粘弹性完全滑动体系分析·····	235
第三节	古德曼模型在双层粘弹性体系中的应用·····	237
<b>第十四章</b>	<b>多层粘弹性体系的非轴对称课题·····</b>	<b>243</b>
第一节	多层粘弹性连续体系的系数递推法·····	243
第二节	古德曼模型在系数递推法中的应用·····	248
第三节	非轴对称空间课题的反力递推法·····	252
第四节	古德曼模型在反力递推法中的应用·····	258
<b>附录</b>	<b>拉氏反变换的数值解法·····</b>	<b>263</b>
<b>参考文献</b>	·····	264

# 第一篇 粘弹性的基本理论

## 第一章 基本概念

粘弹性力学的发展已有 40 年的历史,从 20 世纪 70 年代以来,国际上已有许多学者开始考虑应用材料的流变性质,进行路面设计研究。路面在多数情况下经受的是动荷载,且为多次重复的瞬时荷载。沥青面层材料在高温季节呈粘弹性体,在荷载作用下具有明显的应变滞后和应力松弛现象。因此,考虑时间和温度两大因素,对沥青面层高温季节的稳定性进行验算极为重要。运用粘弹性理论,就能从理论上进一步阐明路基路面结构体系的力学性能和建立更加完善的验算方法。

本章所介绍的一些基本概念,对今后进一步探讨层状粘弹性体系的应力与位移,具有重要意义。

### 第一节 工作假设

为了从层状粘弹性体系力学中的已知量求得未知量,必须建立这些已知量与未知量之间的关系,以及各未知量之间的关系,从而导出一套可求解的方程。在推导方程时,如果精确考虑各方面的因素,则推出的方程将会非常复杂,甚至无法求解。因此,通常应按照研究对象的性质,联系求解问题的范围,做出若干基本假设,略去暂时不考虑的次要因素,使得方程易于求解。与层状弹性体系一样,层状粘弹性体系也采用如下类似的五条基本假设。

#### 一、关于理想粘弹性、完全均匀和各向同性的假设

若物体在外力作用下产生变形,其中弹性固体的应变为一定值,它与时间因素无关;粘性液体的应变则以等应变速率随时间变长而增加。卸载后,弹性固体将恢复原状,粘性液体呈现滞弹性恢复,有时还会留存在物体中不可恢复的应变。在此假定中,理想粘弹性是指层状粘弹性体系为线粘弹性体,完全服从三维本构方程,其材料参数不随应力或应变而变。而完全均匀是指每层由同一材料组成,并具有相同的材料参数。因此,其材料参数不随坐标位置而变。所谓各向同性是指同一点在所有方向上的材料参数相同,它不随方向而变。

根据这条假设,层状粘弹性体系力学所研究的对象为线粘弹性体,完全服从三维本构方程,其材料参数为常数。

#### 二、关于连续性假设

这条假设认为物质充满物体的整个空间,没有任何空隙,不考虑物质的原子结构,更不

考虑物质的分子运动。这样,可以应用连续函数来描述其应力、形变与位移等物理量的变化规律。实际上,一切物体均由微粒组成,都不符合这条假设。但是,只要微粒的尺寸以及相邻微粒之间的距离远远比物体本身的尺寸小,那么这条假设所引起的误差不会显著。

### 三、关于自然应力状态等于零的假设

按照这个假设,在施加外荷之前,假定存在于物体内的初应力等于零。换句话说,在层状粘弹性体系理论中所求的应力不是物体的实际应力,而仅仅是在未知初应力上的增加值。

### 四、关于微小形变和微小位移的假设

假定物体受力后,各点的位移都远远小于物体原来的尺寸,且形变和转角都远小于1。这样,在建立物体变形后的平衡方程时,就可用变形前的尺寸代替变形后的尺寸,而不致引起显著的误差。同时,转角和形变的二次幂或乘积都可以忽略不计。这个假设使得层状粘弹性体系力学中的代数方程和微分方程均可简化为线性方程。

### 五、关于无穷远处应力、形变和位移等于零的假设

根据这条假设,当 $r$ 趋于无穷大时,层状粘弹性体系中的应力、形变和位移等于零;当 $z$ 趋向无穷大时,其应力、形变和位移也等于零。实际上,路基路面结构体系中,在离荷载足够远处,其应力、形变和位移就等于零。这就是说,实际结构要比层状粘弹性体系的应力、形变和位移收敛速度快得多。

## 第二节 粘弹性

研究工程结构在外部因素作用下的应力、变形和位移时,需要考虑力学条件、几何条件和物理条件等,前两者与材料的性质无关,它们不能确定物体在荷载作用下的应力和应变状态。刻画物性的物理条件,反映材料的宏观性能,是根据工程实际和试验研究所得到的材料性能参数加以抽象化的数学表达。通常所说的物理条件,是指描述物体的应力-应变-时间-温度关系的方程式,所以又称本构方程或本构关系。

有两类众所周知的材料:弹性固体和粘性流体。弹性固体具有确定的形状,在静载作用下发生的变形与时间无关,卸除外力后能完全恢复原状。从能量的观点来说,外力在弹性体变形过程中所做的功,全部以弹性势能方式储存,且能在卸除外载过程中释放出来。粘性流体没有确定的形状,或取决于容器,外力作用下形变随时间而发展,产生不可逆的流动。

实际上,许多材料(如沥青、岩石和土壤等地质材料)常同时具有弹性和粘性两种不同机理的形变,综合地体现粘性流体和弹性固体两者的特性,材料的这种性质称为粘弹性。

材料的粘弹性可分为线性和非线性两大类。若材料性能表现为线弹性和理想粘性特性的组合,则称之为线性粘弹性。如果以虎克(Hooker)体(线弹性)和牛顿(Newton)流体(理想粘性)为两端来构成材料谱系,则介于这两者之间的均属于线粘弹性材料。

一切固体都会或多或少地流变,在一定的条件下,沥青、岩石均发生流动与变形。在有关的条件中,最重要的是时间与温度。

### 第三节 蠕变和应力松弛

为了描述材料的粘弹性行为,首先研究最简单的应力、应变随时间变化的现象。

#### 一、蠕变

在一定的应力作用下,弹性固体的应变为一定值,不随时间而变;对于理想粘性流体,变形则以等应变率随时间而增加。

实际材料往往是在恒定应力作用下,应变随时间而增加,这种现象称为蠕变,又称为徐变。不同材料或同一材料在不同条件下有着不同程度的蠕变。图 1.1(a)中示出在定应力  $\sigma_0$  作用下的蠕变曲线  $ABC$ ,  $\epsilon = f(t, \sigma)$ , 其中  $t$  表示时间,  $\epsilon_0$  表示弹性变形。有些材料(如金属材料)在高温下发生显著的蠕变现象,它可分为瞬时蠕变(应变率随时间增加而减小)、稳态蠕变(应变率几乎为一常数)和加速蠕变(应变率随时间迅速增大)三个阶段,如图 1.1(b)所示。

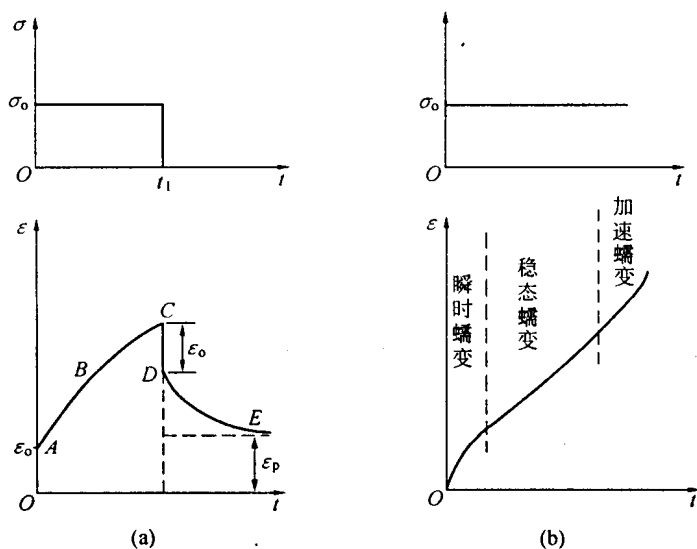


图 1.1

由此可见,为了保持路面平整,不应选用易产生蠕变的材料。

若在某一时刻卸去荷载,弹性固体将恢复原样,如果不考虑惯性,则应变瞬时为零,称之为回复。对于粘弹性材料,在  $t = t_1$  时刻除去外力,则在瞬时弹性变形恢复(CD)后,有逐渐回复的过程(DE),如图 1.1(a)所示。这种蠕变的回复现象,有时又称为滞弹性恢复或延滞回复。留存于物体中不可恢复的应变( $\epsilon_p$ ),由回复曲线的渐近值确定。

蠕变是多数工程材料所具有的行为之一。修筑于斜坡处的沥青路面有可能在经历一段时间之后发生开裂,这是由于自重应力使沥青路面产生蠕变变形,而该变形发展超过材料的允许限度而引起损坏。同样,水泥混凝土也有可能产生蠕变。

## 二、应力松弛

当应变恒定时,应力随时间而减小的现象称为应力松弛,它与蠕变现象相对应。图 1.2 表示一般应力松弛过程,开始时应力很快衰减,而后逐渐降低并趋于某一恒定值。从流变机理方面看,粘性流动将使其应力经过足够长的时间后衰减至零。因此可以说,在一定应变条件下,应力较快趋于零的材料是流体;而经过相当长时间后应力衰减至某一定值的材料,则为固体。

多数工程材料,都具有应力松弛的能力。对于某些工程结构,应力松弛有利于结构的安全。例如,冬季降温时,沥青路面由于收缩变形而产生的温度应力,而沥青混合料具备的应力松弛能力使得温度应力逐渐衰减,从而保证路面应力不至于超过材料允许值而发生开裂。因此,与水泥混凝土路面不同,沥青路面可以不必设置伸缩缝。对于预应力混凝土结构,钢索的应力松弛则可能降低预应力混凝土的设计强度,在设计中就必须考虑应力松弛来确定预应力的极限强度。

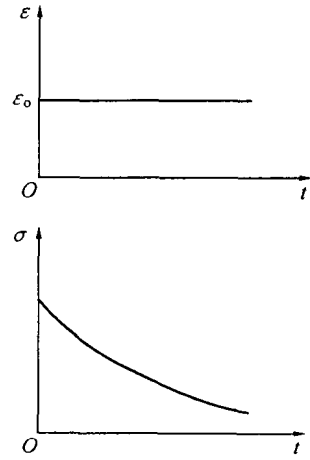


图 1.2

## 第四节 滞后与能耗

### 一、滞后

工程结构不仅要承受不变的应力或应变输入,有时也要承受交替循环的应力或应变输入,在工程动力学中,这样交替循环的应力或应变输入一般称之为振动。对于粘弹性材料,当输入交替循环的应力时,其响应仍为交替循环的应变,但通常会发生所谓的滞后现象。

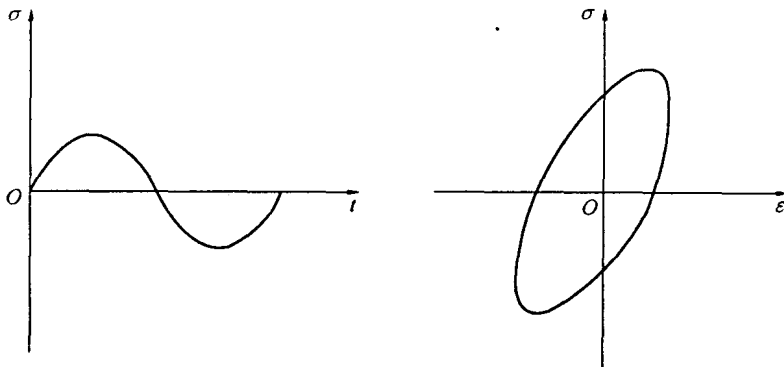


图 1.3

滞后现象,可以用图 1.3 加以说明。在输入交替循环应力时,加载过程的应力 - 应变曲线与卸载过程的应力 - 应变曲线形成如图 1.3 所示的首尾相接的环线,一般称为滞后环线。

## 二、能耗

众所周知,外力作用产生的功使材料内部积累一定的能量,这一能量的大小可用应力 - 应变曲线下的面积来代表。显然,在交替循环的应力作用下,加荷过程得到的能量与卸荷过程释放的能量并不平衡,前者大于后者面积。两者的面积差(即滞后环线所包围的面积)代表一个加荷循环过程中材料的能量损耗,这一损耗主要用于克服分子之间的内摩擦,损耗的能量转变为热能。换句话说,能量的损耗是由于材料本身具有粘性性质所致。

除了蠕变、回复、应力松弛、滞后和能耗等外,材料的粘弹性能还可用速率效应来表示,即讨论应变速率对应力的影响,或应力速率对应变的影响。

## 第二章 粘弹性模型理论

在单轴应力作用下,粘弹性材料的力学性能可由弹性元件和粘性元件按一定规则构成的模型来描述。本章将讨论一维本构方程的建立,以及应用这些模型描述粘弹性材料的力学性质。

### 第一节 基本元件

材料的粘弹性性质,可采用模型理论来表示和描述。这些力学模型是由离散的弹性元件(弹簧)和粘性元件(阻尼器或粘壶)按不同连接方式组合而成。

#### 一、理想弹性元件

弹性元件用弹簧表示,它代表虎克固体,如图 2.1 所示。若以  $\sigma$  表示应力, $\epsilon$  表示应变,则弹性元件服从虎克定律

$$\sigma = E\epsilon \quad (2.1.1)$$

其中,  $E$  为与弹性有关的常数(MPa)。

如以  $\sigma$  表示正应力, $\epsilon$  表示正应变,则上式中的  $E$  即为杨氏弹性模量。如以  $\sigma$  表示剪应力 $\tau$ , $\epsilon$  表示剪应变 $\gamma$ 的一半,则上式中的  $E$  应改为  $2G$ ( $G$  为剪切弹性模量),故上式可改写为下式

$$\sigma = 2G\epsilon \quad (2.1.2)$$

由此可见, $\sigma$  与  $\epsilon$  的值一一对应。如果  $\sigma$  保持一定, $\epsilon$  也保持不变;反之亦然。

理想弹性元件的应力应变关系不随时间而发生变化,呈现出瞬时弹性变形和瞬时回复,如图 2.2 所示。显然,理想弹性材料不产生蠕变和应力松弛。当输入交变应力时,响应的应变也不产生滞后现象。

#### 二、粘性元件

粘性元件用阻尼器(或粘壶)表示,它代表牛顿液体,如图 2.3 所示。若以  $\sigma$  表示应力, $\epsilon$  表示应变, $\dot{\epsilon}$  表示应变速率,则粘性元件服从牛顿粘性定律

$$\sigma = \eta \dot{\epsilon} \quad (2.1.3)$$

其中, $\eta$  为与粘性有关的常数(Pa·s);用“ $\cdot$ ”表示对时间  $t$  的常微分或偏微分。

如以  $\sigma$  表示正应力,则  $\epsilon$  表示正应变, $\dot{\epsilon}$  表示正应变速率, $\eta$  为粘度系数。如以  $\sigma$  表示剪应力 $\tau$ , $\epsilon$  代表剪应



图 2.1

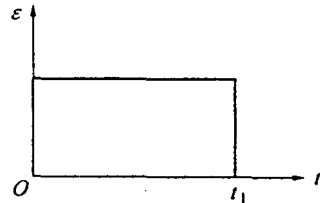
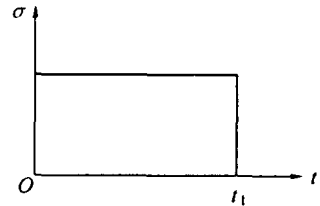


图 2.2

变  $\dot{\gamma}$  的一半,  $\dot{\epsilon}$  为剪应变速率  $\dot{\gamma}$  的一半, 则上式中的  $\eta$  应改为  $2\eta$ , 故上式可改写为下式

$$\sigma = 2\eta\dot{\epsilon} \quad (2.1.4)$$

对于粘性元件来说,  $\sigma$  和  $\dot{\epsilon}$  具有一一对应的关系, 但  $\sigma$  与  $\epsilon$  并无直接的关系。

若对粘性元件作用有  $\sigma = \sigma_0 H(t)$ , 其中,  $H(t)$  为阶梯函数, 则式(2.1.3)可写为下式

$$\dot{\epsilon} = \frac{\sigma_0}{\eta}$$

对上式作拉氏变换, 并注意下列关系式

$$L[f'(t)] = sf(s) - f(0)$$

$$\epsilon(0) = 0$$

则有

$$s\bar{\epsilon}(s) = \frac{\sigma_0}{\eta s}$$

即

$$\bar{\epsilon}(s) = \frac{\sigma_0}{\eta s^2}$$

对上式施加拉氏反变换, 并注意下列关系式

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] = t$$

则可得

$$\epsilon = \frac{\sigma_0}{\eta} t \quad (2.1.5)$$

上式表明, 当  $t < 0$  时, 阻尼器处于静止状态; 只有当  $t > 0$  时, 才开始产生变形。因此, 阻尼器与弹簧不同, 它不具有瞬时应变, 其应变响应呈稳态流动, 如图 2.4(a) 所示。

在  $\epsilon = \epsilon_0 H(t)$  条件下, 并注意  $\frac{dH(t)}{dt} = \delta(t)$ , 则由式(2.1.3)可得

$$\sigma = \eta\epsilon_0\delta(t) \quad (2.1.6)$$

因此, 阻尼器受阶跃应变作用时, 应力为无限大而后瞬时变为零, 如图 2.4(b) 所示。由于不可能产生无穷大的应力, 所以实际上不能瞬时使粘性元件产生有限应变。

## 第二节 麦克斯威尔模型

麦克斯威尔(Maxwell)模型是由一个弹性元件和一个粘性元件串联而成的力学模型, 如图 2.5 所示。这一模型的连接方式类似于电工学中的串联电路, 在粘弹理论中也把这种连接方式称为串联。麦克斯威尔模型, 又称为松弛模型, 它是模型理论中的一种基本模型。

在应力  $\sigma$  作用下, 麦克斯威尔模型的本构方程可根据等截面应力相等的原则来建立。若弹簧的应变为  $\epsilon_1$ , 阻尼器的应变为  $\epsilon_2$ , 则麦克斯威尔模型的总应变  $\epsilon$  为两者之和, 即

$$\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2$$

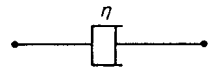


图 2.3



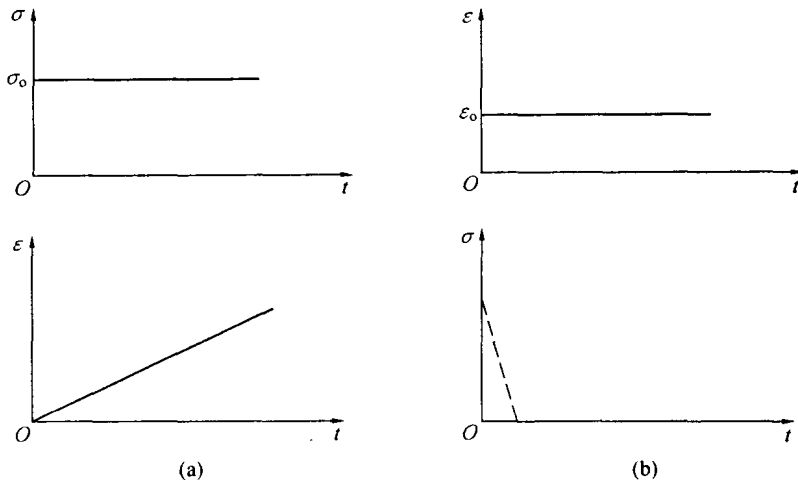


图 2.4

对上式两端求导,并注意下列对时间  $t$  的导数表达式

$$\dot{\epsilon}_1 = \frac{\dot{\sigma}_1}{E}$$

$$\dot{\epsilon}_2 = \frac{\dot{\sigma}}{\eta}$$

则可得

$$\sigma + \frac{\eta}{E} \dot{\sigma} = \eta \dot{\epsilon} \quad (2.2.1)$$

或

$$\sigma + p_1 \dot{\sigma} = q_1 \dot{\epsilon} \quad (2.2.2)$$

式中  $p_1 = \frac{\eta}{E}$ ;

$$q_1 = \eta.$$

上两式为麦克斯威尔模型的本构方程。若  $E \rightarrow \infty$ , 则弹簧成为刚体, 麦克斯威尔体转化为牛顿体; 若  $\eta \rightarrow \infty$ , 则阻尼器成为刚体, 麦克斯威尔体转化为虎克体。如果已知材料参数分别为  $E$  和  $\eta$ , 则可利用该微分型的本构方程来分析其蠕变、回复和应力松弛等现象。

### 一、蠕变

在常应力  $\sigma = \sigma_0 H(t)$  作用下, 当  $t > 0$  时, 则有  $\sigma = \sigma_0, \dot{\sigma} = 0$ , 故式(2.2.2)可改写为下式

$$\dot{\epsilon} = \frac{\sigma_0}{q_1}$$

对上式施加拉氏变换, 并注意下述拉氏变换的微分性质

$$L[f'(t)] = s\tilde{f}(s) - f(0)$$

则可得

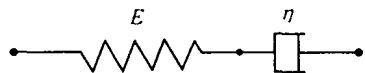


图 2.5