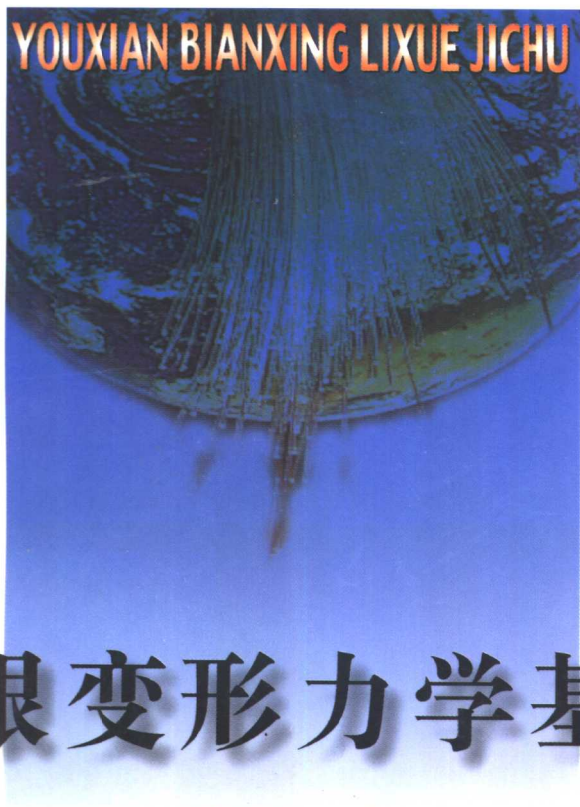


YOUXIAN BIANXING LIXUE JICHU



有限变形力学基础

陈至达 著



中国矿业大学出版社

YOUXIAN BIANXING LIXUE JICHU

有限变形力学基础

陈至达 著

中国矿业大学出版社

责任编辑 姜志方

责任校对 杜锦芝

图书在版编目(CIP)数据

有限变形力学基础/陈至达著. — 徐州:中国矿业
大学出版社,2000.10

ISBN 7 - 81070 - 133 - 9

I. 有… II. 陈… III. 有限变形 IV. O344.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 55870 号

中国矿业大学出版社出版发行

(江苏徐州 邮政编码 221008)

出版人 解京选

中国矿业大学印刷厂印刷 新华书店经销

开本 850×1168 1/32 印张 8.75 字数 225 千字

2001 年 2 月第 1 版 2001 年 2 月第 1 次印刷

印数 1~1000 册 定价 15.00 元

序 言

在目前理工科大学的课程中,普遍开设弹塑性力学课程,在这类课程中,变形几何学多数以小变形作为数学基础。因在人类生活空间内,如建筑、运输工具、工作机械等等主要设备都以安全可靠为主,工作载荷引起的允许形状改变都属小变形,故微小形变的弹塑性力学有非常广阔的应用范围。

但在自然现象中,从物理中的可变形基本粒子到地球表面的巨大造山运动,都属大变形运动。甚至一张薄纸在空中随风飘扬,要描述其运动就要用到大变形大转动的可变形体运动学,而且这是一个十分困难的数学问题。在工程中,如金属的锻压冲模,工件的切削,岩土工程的破坏,矿物开采与岩层形变沉陷等等无数问题都是大变形力学研究的范围。

大变形力学的名称在学术上常称为有限变形力学(mechanics of finite deformation),以区别于经典的无穷小形变力学(mechanics of infinitesimal deformation)。20 世纪,美国Truesdell教授致力于促进有理(或称理性)力学(rational mechanics)的发展,他的目标是应用严格的数学方法建立整个连续体力学的统一非线性场论,其中包括固体、流变体、流体、气体物性方程的合理数学描述的研究。从体系内容而言,有限变形理论是其核心部分。但由于前期发展中,数学理论和经验实践联系不足,没有得到物理学家和力学家的充分支持。

近十多年来非线性几何场论的研究,确定了变形体一般空间

运动时,在变形体中每一点的应变与局部转动,以准确的数学公式表示,并与激光衍射频谱实验相验证,建立了完整可靠的有限变形力学理论,为开拓在工程和物理中的应用,奠定了稳固的数学力学理论基础。

本教科书内容主要为工科研究生学习而写,以平面问题为主,目的在于节省学时和让读者尽快入门。一些有关的数学分支,如微分几何、非线性偏微分方程理论、变换群等均未涉及。在讲解中有意将张量分析和力学内容结合在一起,用意是好的,但效果如何,有待进一步检验。

一门新学科的建设,是众多学者成就的集合。希望本书的读者,能继续致力于有限变形力学的理论、实验和应用的开拓。

目 录

引论	(1)
0.1 线性和非线性	(1)
0.2 位形的变换 杆系大变形的基本问题	(3)
第一章 经典小变形几何学	(7)
1.1 物体变形大小的相对性	(7)
1.2 位移的几何学	(8)
1.3 Stokes 分解定理	(11)
1.4 ϵ_{ij} 和 ω_{ij} 的几何意义和应用的局限性	(14)
第二章 经典有限变形理论的应变定义	(24)
2.1 Green 应变张量	(24)
2.2 Green 应变张量的优点与缺点	(28)
2.3 变换的极分解定理	(30)
2.4 变换的结果与变换次序性的关系	(33)
第三章 物体形变的自然拖带系描述法	(38)
3.1 刚体平面运动的 Euler 描述法	(38)
3.2 描述变形体运动的自然拖带系方法	(42)
3.3 曲线坐标系的斜变与逆变基矢, 尺规张量	(45)
3.4 基矢的空间变化率 Christoffel 符号	(51)
3.5 例 平面极坐标系的度量性质	(54)
3.6 协变导数	(57)
3.7 位移场的局部坐标系变换	(59)

3.8 例题.....	(60)
第四章 应变和转动分解定理	(72)
4.1 刚体与变形体运动的自由度.....	(72)
4.2 平面形变物体的拖带坐标的标定法.....	(73)
4.3 应变—转动的分离.....	(74)
4.4 应变—转动的分解定理(平面情况).....	(77)
4.5 物理量纲,Eddington 的张量广义量纲	(83)
4.6 张量的物理分量.....	(86)
4.7 平面有限变形应变分量与平均整旋角计算方法.....	(89)
4.8 数值分析实例:转动与伸长	(94)
4.9 数值分析实例:简单剪切、平滑.....	(98)
4.10 有限变形测量的网格法.....	(101)
4.11 线段转动的分布函数.....	(105)
4.12 乘极分解定理的适用范围.....	(109)
第五章 在自然拖带系中的应力分析.....	(114)
5.1 面力、面矩、体力、体矩.....	(114)
5.2 体积的表示	(115)
5.3 面积的表示	(117)
5.4 应力张量(平面情况)	(121)
5.5 例题	(126)
5.6 动量定理、运动方程.....	(129)
5.7 例题	(133)
5.8 动量矩定理,非对称应力与体矩的平衡.....	(136)
第六章 物性方程.....	(145)
6.1 物性方程的物理实质	(145)
6.2 热力学第一定律,能量守恒定律.....	(146)
6.3 热力学第二定律,无序性和熵.....	(147)

目 录

6.4	全量与增量物性方程	(149)
6.5	应变速率	(150)
6.6	应力速率	(155)
6.7	应变速率和应力速率计算例题	(160)
6.8	变形体的能量定律	(164)
6.9	应变能函数与余能函数、物性方程的能量表达式	(167)
6.10	线性小变形弹性定律(各向同性)	(168)
6.11	弹塑性增量物性方程(各向同性)	(174)
6.12	弹塑性流变方程	(180)
第七章	单轴弹塑性压缩大变形,形变局部化的概念	(184)
7.1	问题的提出	(184)
7.2	单轴压缩弹性大变形	(184)
7.3	单轴压缩弹塑性大变形	(192)
7.4	数值计算例	(197)
7.5	弹性形变增量和塑性形变增量计算	(200)
7.6	形变局部化的概念	(207)
第八章	剪切大变形和断裂构造	(209)
8.1	纯剪切与简单剪切	(209)
8.2	渐进剪切大变形几何学	(211)
8.3	简单剪切大变形的准确解	(218)
8.4	局部断裂区的形成和应变的重新分布	(222)
8.5	判断裂纹扩展方向的几何准则	(225)
8.6	压缩大变形破坏	(230)
8.7	空间形变裂纹扩展方向判断的一般几何准则	(232)
8.8	实验例证	(233)
附录 A	逆矩阵	(238)
附录 B	正交矩阵的性质	(241)

目 录

附录 C	各向同性张量·····	(243)
附录 D	$S-R$ 分解定理的存在性与惟一性 ·····	(245)
附录 E	平面变换的 $S-R$ 分解定理 ·····	(248)
附录 F	由正交矩阵导出转动矩阵的推导补充 ·····	(252)
附录 G	几种大位移场应变定义可用性的比较·····	(254)
附录 H	习题答案(供参考) ·····	(259)

引 论

0.1 线性和非线性

在自然现象中,本无所谓线性与非线性之分。一般来说,线性与非线性是数学家对描述某一现象所建立的各物理量的数学关系式而言。例如一根梁在某一点的挠度 y 和载荷 p 成线性关系:

$$y = k_0 p \quad (0.1)$$

k_0 为常数。当载荷大时, y 与 p 的关系不再成为比例线性关系:

$$y = k_0 p + k_1 p^2 \quad (0.2)$$

k_1 为另一常数。此时 y 与 p 的关系为非线性的。

线性关系的特点是叠加原理成立,即如在 p_1 载荷下,挠度为 y_1 ;而当载荷为 p_2 ,挠度为 y_2 ,则 $p_1 + p_2$ 所产生的挠度是 y_1 和 y_2 的叠加。

$$y_3 = y_1 + y_2 = k_0(p_1 + p_2)$$

对于(0.2)式,叠加原理不成立,令 $p = p_1$,有

$$y_1 = k_0 p_1 + k_1 p_1^2$$

而当 $p = p_2$

$$y_2 = k_0 p_2 + k_1 p_2^2$$

两者相加,可见

$$y_1 + y_2 = k_0(p_1 + p_2) + k_1(p_1^2 + p_2^2)$$

$$\neq k_0(p_1 + p_2) + k_1(p_1 + p_2)^2$$

即总挠度 y_3 不是分别两个载荷产生结果的直和。

对微分方程, 线性方程

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0.3)$$

满足叠加原理,

$$\alpha \frac{\partial(u_1 + u_2)}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_1 + u_2)$$

但是非线性方程

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial t} + \beta \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0.4)$$

不满足叠加原理(读者试自证之)。

在变形几何学中, 直线应变 ϵ 定义为

$$\epsilon = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (0.5)$$

u 为位移, 当 u 微小时, 第一次位移 u_1 和第二次位移 u_2 产生的应变可线性相加

$$\begin{aligned} \epsilon_1 + \epsilon_2 &= \frac{\partial(u_1 + u_2)}{\partial x} \\ &= \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \end{aligned}$$

当位移大时, 如定义应变 ϵ 为

$$\epsilon = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \quad (0.6)$$

则 ϵ 和 u 呈非线性关系, 叠加原理不成立

$$\begin{aligned} \epsilon_1 + \epsilon_2 &= \left[\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 \right] + \left[\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \right)^2 \right] \\ &\neq \frac{\partial}{\partial x}(u_1 + u_2) + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x}(u_1 + u_2) \right]^2 \end{aligned}$$

我们平常称(0.5)式为几何线性应变公式, 而称(0.6)式为几何非

线性应变公式。

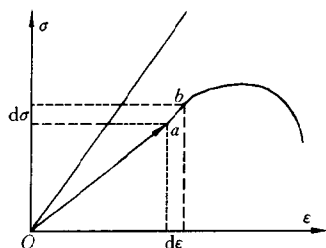


图 0.1

对于材料的物性方程,也有线性与非线性关系之分。在弹性形变条件下,应力 σ 和应变 ϵ 通常呈线性关系,但如橡皮大形变, σ 和 ϵ 可呈非线性关系。对岩土材料则以非线性表现为主,我们称之为物理非线性关系。

在计算中,非线性物理关系常用增量形式表示为在曲线上一点邻域(如图 0.1)中 a 点的应力增量 $d\sigma$ 和应变增量 $d\epsilon$ 的线性微分关系:

$$d\sigma = k(\epsilon)d\epsilon \quad (0.7)$$

$k(\epsilon)$ 为当地应变状态的函数。这是非线性关系的局部线性化。

0.2 位形的变换 杆系大变形的基本问题

一个物体具有一定形状并占据某一位置,我们称之为在空间有某一位形(configuration)。当物体受力后,它的形状和在空间的位置要发生变动,我们称之为位形的变换(transformation)。

变换的概念比普通所谓的形变有更广阔的含义。它包含了物体在空间的位置变动和形状的改变。例如一个绕定点转动的刚体,

它在空间的变换形式是绕该定点的纯转动。倘若该物体发生形变，则物体中各点位置变换的联合结果是形状改变和一般转动的复杂形式。在这种情况下，物体中任一点邻域的转动状态可以处处不同。

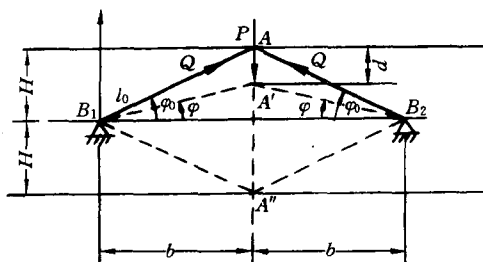


图 0.2

图 0.2 表示最简单的可变形体一维杆件的位置变换。 $B_1 A$ 和 $B_2 A$ 两杆在 A, B_1, B_2 三点是铰接的, B_1 和 B_2 为固定点。当在 A 点加压力 P , 杆件位置变换到 $B_1 A'$ 和 $B_2 A'$, 在此过程中, 杆件产生压缩, 长度缩小, 同时还有绕 B_1, B_2 点的转动。杆中的应力决定于杆件在新位形的应变变量。

设在 P 力作用下, A 点下移 d 距离至 A' 点, 杆长

$$\begin{aligned} l &= B_1 A' \\ &= \frac{b}{\cos \varphi} \end{aligned}$$

H 为 A 点的原高度。初始杆长

$$\begin{aligned} l_0 &= B_1 A \\ &= \frac{b}{\cos \varphi_0} \end{aligned}$$

以 l_0 为基准定义的应变 ϵ 值为

$$\begin{aligned}
 \varepsilon &= \frac{l - l_0}{l_0} \\
 &= \frac{l}{l_0} - 1 \\
 &= \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi} - 1
 \end{aligned}$$

杆截面的压力按弹性虎克定律计算

$$Q = \varepsilon E a$$

E 为弹性模量, a 为杆截面积。 Q 与 P 的关系由结点 A 的平衡方程求出,

$$\begin{aligned}
 2Q \cos(90^\circ - \varphi) &= P \\
 Q &= \frac{P}{2 \sin \varphi}
 \end{aligned}$$

所以有

$$P = 2Ea \sin \varphi \left(\frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi} - 1 \right)$$

上式中 $P = f(\varphi)$ 函数是非线性关系。

当压杆处在 A' 点时呈不稳定状态, 此时维持杆系平衡 $P=0$ 位置 $d=H^-$ 时, 杆系将跳回 A 点。在 $d=H^+$ 位置将跳到 A'' 点。

图 0.3 表明 $P-\varphi$ 关系。其中设 $E=200 \text{ GPa}$, $a=1 \times 1 \text{ cm}^2$ 。当 $P=-50 \text{ kN}$ (压下力) 时, 有两个平衡点。这是因为非线性关系所致, 非线性方程有两个解。过了水平线以后, P 值转为正向拉力。要注意在材料力学和小变形弹性力学中, 解答是在初始位形上的平衡关系求出的。当讨论大位移解时, 我们必须在实时(真实)平衡位置上求解。因平衡方程包含了表现待求几何位置的量(φ 角尚待求), 故方程实质为非线性的。

在本书中我们将讲解连续体有限变形的力学理论, 在数学特性上和本节所说杆件大位移的非线性数学特点主要表现是有共性的, 读者有必要详细理解本节所讲问题的特性。

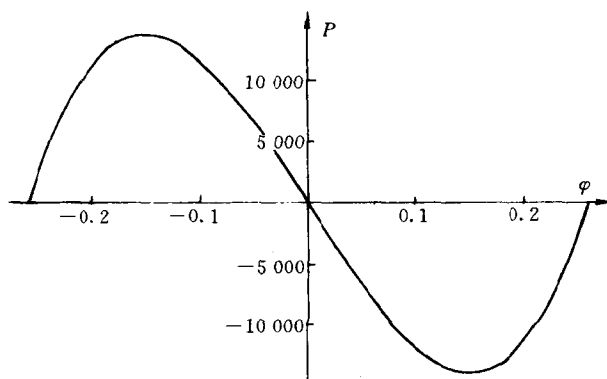


图 0.3

习 题

1. 什么叫线性函数和非线性函数？何者满足叠加原理？
2. 传统微小位移平衡方程式和大位移的平衡方程式建立的基础方式有何不同？
3. 试求 0.2 节中，结点 A 位移 d 和压力 P 的关系式，并按 0.2 节所给定的 E 、 a 值将 $P-d$ 函数作图表示。

第一章 经典小变形几何学

1.1 物体变形大小的相对性

物体运动是相对性的概念。运动是指物体在空间有位移,位移是相对某一参考物体而言,在此参考物体上,我们可以固定一个参考标架。其他物体中各点的位置变动可通过相对于此参考系的坐标变动来描述。

例如中国的泰山,如果站在山下来臆想远古泰山的造山运动,其规模是令人吃惊的。但是如果以太阳作为参考系来衡量泰山的运动又是微不足道的。变形的大小的感觉是和度量的尺规大小相关的。又例如人体中的红细胞通过血管壁孔洞,细胞由球形变形为扁平的哑铃形,变形很大,但如以整个人体为尺规来衡量,和肌肉运动变形相比,则又很小。所以变形大小的感觉衡量和所选择的参考标架的尺规有关,是一个相对性质的概念。

为了使变形大小的度量有客观性,不因参考系尺规大小感觉而变,在力学中引用应变的概念:

$$\epsilon = \frac{l - l_0}{l_0}$$

或

$$\epsilon' = \frac{l - l_0}{l}$$

l_0 和 l 各为物体变形前后的长度。应变是一个长度的比值,没有量纲,和物体尺寸大小无关,以初始长度或变形后长度为基准来衡量长度的改变量($l-l_0$),线长度的应变定义和角度的应变定义组成应变张量(Strain tensor)。

在力学的发展史中,应变的定义有许多,但多数因其不合理性,未得到采用。合理的应变定义应满足下列要求:

- ① 有明显的几何意义;
- ② 各分量要构成分量。当参考标架改变时,各分量的变换必须遵守一定规律,不能有随意性;
- ③ 有相应的合理应力张量定义和应变张量相洽构成能量不变量。

经典的线性小变形的 Cauchy 应变分量定义满足上述要求。但当位移很大时,它失去合理的几何意义,需要引入更精确的数学定义。

1.2 位移的几何学

设物体 B_0 由初始位置移到 B 的位置。物体中一点 $P \rightarrow P'$ 。今选择参考系(标架) $\{x, y\}$ 。 P 点的位置矢量为 r , 当 $P \rightarrow P'$, $r \rightarrow R$, 位移矢量为 u ,

$$u = R - r \quad (1.1)$$

以分量表示:

$$\left. \begin{aligned} u_x &= \bar{x} - x \\ u_y &= \bar{y} - y \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

$(\bar{x}, \bar{y})$ 是 P' 点在 $\{x, y\}$ 系中的坐标。

因为物体总体外观的形变是由内部各点的局部形变构成。今考察在 P 点邻域改变(见图 1.2)。 $\overline{PM}$ 微元线段经位移、转动与伸长变为 $\overline{P'M'}$ 。 M 点相对于 P 点的位移增量 Δu 展成级数表示为