職工業餘初級中學

平面幾何課本

工人出版社

〔4277〕

平面幾何課本

編譯者	前東北人民政府教育部
改編者	工人出版社課本組
出版者	工人出版社 北京西總布胡同三十號
發行者	新華書店
印刷者	工人日報社印[redacted]

1—3,068

一九五四年三月北京[redacted]

一九五四年三月北京第一[redacted]

（定價 三千一[redacted]

出版者的話

一、本書是依據前東北人民政府教育部編譯的初級中學平面幾何教科書改編而成。原書是根據蘇聯七年制中學及十年制中學六——九年級幾何教科書第一卷編譯的。

二、原書在每個大單元之後附有相當數量的習題，並在教科書之外另有習題本。本書針對職工業餘學校學習時間不多的情況，將習題作了適當的選擇，分配在各章節的後面。全書共分三十一個練習，部分練習選取的習題可能還是多一些，教師們可以按照本校本班的具體情況再作選擇。原書作圖題部分及軌跡部分例題較少，本書補充了一些淺近的例題，並删去了原書較深的例題。

三、本書按照一般情況估計，講完全書約需八十小時。

目　錄

緒　論

1. 幾何圖形　空間的一部分，各方面都有限制的，叫做幾何體.

把幾何體和周圍的空間隔開的是面.

把面的一部分和鄰接的部分隔開的是綫.

把綫的一部分和鄰接的部分隔開的是點.

幾何體、面、綫和點，不能孤立地存在．當然，我們可以抽象地把面看成與幾何體不發生關係，綫與面不發生關係，點與綫不發生關係．這樣，我們就可以想像到面沒有厚薄，綫沒有寬窄和厚薄，點沒有長短、寬窄和厚薄.

我們周圍的東西，譬如說桌子、椅子、黑板、書本，都有不同的輕重、軟硬、顏色等等．現在我們不去管它們的輕重、軟硬、顏色等等，只去研究它們在空間佔的位置、它們的大小和形狀，這樣我們可以把每一件東西想像成一個幾何體．例如一個櫃子，我們就可以把它只當作一個長方體看待，不管它是什麼木頭做的，不管它上面漆的什麼顏色，不管它有多重等等．這時我們只看到這個長方體有一定的位置和大小、形狀，也就是說它在空間佔據了一個有限部分，它的上下左右前後各方面都是有限制的．把櫃子當幾何體看待時，它的上下左右前後就有六個面，把它和周圍的空間隔開；每兩個相接的面被一條稜隔開，這就是綫；櫃子的每一個角尖隔開了三條綫，每一個角尖就是一點.

在空間存在的點、綫、面或體以及由它們組成的一定形

狀，叫做幾何圖形．幾何圖形可以在空間移動而不改變它的形狀大小．如果把一個幾何圖形移到另一個圖形上重疊起來，兩形處處相重合，那末這兩個圖形就叫做全等形．

2.幾何學 研究幾何圖形的各種性質的科學，叫做幾何學．這個名詞是由希臘語翻譯過來的，它原來的意思是測地學．因為從前幾何學主要的目的是測量地面上的距離、面積，所以才給它起這個名詞．

平　面

3.平面 在各種面裏，我們最熟悉的是平面．它的形象，正如窗上平滑的玻璃面，或池子裏平靜的水面等．

平面有下列的性質：平面的任何部分，可以放到同一平面或另一平面的別的位置上，使它所有的點全落在上面完全密合，並且放過去的部分可以預先翻摺．

直　線

4.直線 最簡單的線是直線．直線的概念，大家都很熟悉，可以把它想像成一條拉緊的線，或是由一個小孔透出來的光線．下面所講的直線的基本性質是和這個想像一致的．

經過空間的任意兩點，可以引一條直線，並且只能引一條直線．

由這一個性質可以推想到：假如有兩條直線，把其中的一條放到另一條上，使一條直線上的兩點，落到另一條直線的兩點上，那末，這兩條線上的各個點就完全相重合．因為，如果這

兩條直綫不完全重合，就等於說經過兩點可以引出不同的兩條直綫——這是不可能的.

依照同理可以知道，兩條直綫僅能相交於一點.

直綫對於平面有下面的性質：如果在平面上取任意兩點，經過這兩點引一直綫，則直綫上的各點都在這平面上.

5. 無限直綫、射綫、綫段 通過兩點的直綫，可以向兩方面無限延長，叫做無限直綫（通稱直綫）.

通常以表示直綫上某兩點的大寫字母來表示該直綫，如：直綫“AB”或“BA”(圖1).

一直綫上任意兩點間的有限部分，叫做直綫的綫段，這兩點叫做綫段的端點；綫段通常是用表示它的兩端點的兩個字母來表示，如綫段 CD (圖2). 有時直綫或綫段也用一個小寫字母來表示，如：直綫“a”綫段“l”等.

圖 1

圖 2

為了簡便起見，直綫的綫段，通常就叫做綫段.

有時一直綫的一端是固定點，如點 A (圖3)，他端可以任意延長；也可以說，這直綫是由一定點 A 向一定方向射出的，所以叫做射綫（或半直綫）.

圖 3

6. 相等綫段與不等綫段 如果把兩綫段重疊起來，它們的兩端分別相重合時，兩綫段就相等. 例如我們把綫段 AB 放到綫段 CD (圖4) 上，先使點 A 與點 C 重合，使綫段 AB 落到

圖 4

CD 上，假如這時 B 端和 D 端相重合，則綫段 AB 和綫段 CD 就相等，否則兩綫段就不相等.

要在一直綫上截取一綫段使它等於已知綫段時，必須使用圓規.圓規是作圖時經常使用的儀器.

7. 綫段和 連續使用截取與已知綫段相等的綫段的方法，可以作出一條綫段等於若干綫段的和.例如要作一綫段等於三條已知的綫段 AB、CD、EF 之和(圖 5)，就用下面的方法.

在一直綫 l 上取任意一點 M，由此點截取等於 AB 的綫段 MN，再由點 N 向同一方向截取等於 CD 的綫段 NP，再截等於 EF 的綫段 PQ. 這時綫段 MQ 就是 AB、CD、EF 各綫段的和.用相同的方法，可得任意條綫段的和.

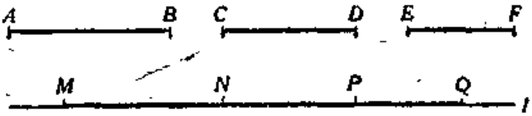

圖 5

綫段和與數字和有完全相同的性質：例如它與各相加綫段的次序無關(交換律)；如果先求出某幾個相加綫段的和，再相加，則總和的值仍舊不變(結合律).例如：

$$AB+CD+EF=AB+EF+CD=EF+CD+AB=\cdots\cdots;$$

$$AB+CD+EF=AB+(CD+EF)=CD+(AB+EF)=\cdots\cdots$$

8. 綫段的運算 由綫段和的概念，可以引出綫段差以及不名數與綫段的乘法、除法的概念.例如綫段 AB 與 CD 的差(若 $AB>CD$) 是第三條綫段，它與 CD 的和等於 AB.數字 3 與綫段 AB 的乘積，是三條綫段的和，其中每一綫段都等於 AB. 用數字 3 除 AB 所得的商是 AB 的三分之一.以

下依此類推.

練 習 一

下面的習題先用幾何的方法作圖, 然後再用算術的方法驗證:(以米爲單位的題, 作圖時可以用一厘米代表一米)

1. 三根木棍各長 4.8 米、3.4 米和 5.8 米, 如果接成一根直棍, 求共長多少?

2. 有松木長 20.25 米, 把它一頭鋸掉 3.75 米以後, 又鋸掉 7.4 米, 還剩多少?

3. 綫段長 20 米, 由 A 端截去綫段 AC 長 5.1 米, 由 B 端截去綫段 BD 長 7.9 米, 求綫段 CD 的長是多少?

4. 已知二綫段 a, b, 求作長爲 $3a+2b$ 的綫段.

5. 過點 M 向同方向引兩條綫段, MN 長 10 厘米, MP 長 16 厘米, 求這兩條綫段的中點相距幾厘米?

6. 已知二綫段 a, b 的和爲 s, 差爲 d, 問用什麼方法能求得二綫段 a, b 的長.

7. 一個長 14 厘米的綫段被它上面的一點分成兩個綫段, 這兩個綫段長度的比爲 2:5, 求這一點與原綫段的中點相距幾厘米?

8. 把綫段 AB 延長到 C, 使 AC 的長爲 AB 的 5 倍, 求 AB 與 BC 的比.

圓 的 概 念

9. 圓　假如把圓規開到任意程度, 一脚放在平面上的任意一點 O (圖 6), 圍繞這一點旋轉圓規時, 則插有鉛筆或粉筆

頭的另一脚就在平面上畫出一條連續不斷的曲綫．曲綫上的各點與點 O 的距離都相等，這條曲綫叫做圓，也叫做圓周．點 O 叫做圓心．連結圓心和圓上各點的綫段 OA、OB、OC 叫做半徑．同圓的半徑都相等．

用同一半徑所畫的圓全相等，因爲假如把它們的圓心重疊起來，兩圓上的各個點是全相重合的．

通過圓上任意兩點的直綫（MN，圖 6）叫做割綫．

連結圓上任意兩點的綫段（AB），叫做弦．

通過圓心的弦（AE）叫做直徑．

直徑等於二半徑的和，同圓的所有直徑都相等．

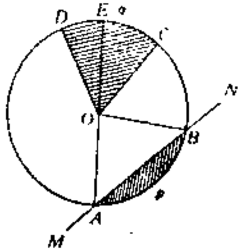

圖 6

圓的任意一部分（如 ApB）叫做弧．

連結一弧兩端的綫段（AB）叫做這弧所對的弦．

普通弧用符號⌒表示；寫作 $\overset{\frown}{ApB}$．

平面上圓所圍的一部分，叫做圓面．

兩個半徑所截圓面的一部分（圖 6 上有陰影綫的部分 COD）叫做扇形．用割綫截下的圓面的一部分（ApB）叫做弓形．

10. 等弧與不等弧　同圓（或等圓）中的兩弧重疊起來，如果它們兩端分別相重合，那末這兩弧就相等．假如把 $\overset{\frown}{AB}$（圖 7）放到 $\overset{\frown}{CD}$ 上，使點 A 與點 C 相重合，$\overset{\frown}{AB}$ 落在 $\overset{\frown}{CD}$ 上，若是點 B 與點 D 相重合，那末

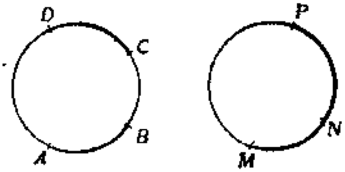

圖 7

兩弧上的各點也必然重合，因為它們到圓心的距離是相等的；所以$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$．如果 B 和 D 不相重合，那末兩弧就不相等，而成為另一弧一部分的弧是小弧．

11．弧的和　同圓的幾個弧之和，可以用半徑相同的另一弧來表示，這個弧的組成部分與已知各弧對應相等．譬如由圓上任意一點 M（圖7）截取 $\overset{\frown}{MN}$ 等於 $\overset{\frown}{AB}$，然後由點 N 向同一方向截取 $\overset{\frown}{NP}$ 等於 $\overset{\frown}{CD}$；這樣，$\overset{\frown}{MP}$ 就等於 $\overset{\frown}{AB}$ 與 $\overset{\frown}{CD}$ 的和．用相同的方法可得出三個或更多的弧的和．

相同半徑的弧相加，它們的和在同一圓上，有時可能容納不開，那末一弧的一部分就會與另一弧的一部分相重合，這時各弧的和大於一個圓．譬如 $\overset{\frown}{AmB}$ 和 $\overset{\frown}{CnD}$（圖8）相加時，它們的和是一個整個圓與 $\overset{\frown}{AD}$ 所成的弧．

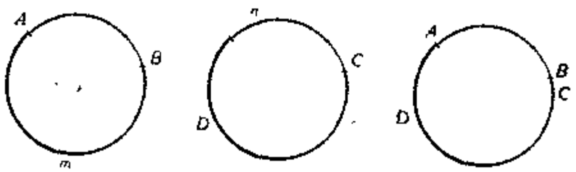

圖 8

弧的相加也像綫段的相加一樣，具有可交換和可結合的性質．

由弧的和的概念可引出弧的差的概念，及不名數與弧的乘法和除法等等的概念．

12．幾何學的分類　幾何學分為兩部分：<u>平面幾何學</u>和<u>立體幾何學</u>．平面幾何學研究全部在同一平面上的圖形的性質；立體幾何學研究各部分不全在同一平面上的圖形的性質．

第一章 直綫形

I 角

基本概念

13. 角 由一點引出兩條射綫（圖 9 裏的 OA 和 OB）所構成的圖形叫做角. 這兩條射綫（OA 和 OB）叫做角的邊. 射出綫的點（O）叫做角的頂點. 角的大小决定於它的兩邊張開的程度，與邊的長短無關. 我們應該把兩邊想像成可以由頂點無限延長出去的.

角的記法一般是用三個字母，當中的一個字母，是頂點的字母，在兩邊上的兩個字母分別放在兩旁，例如角"AOB"（圖 9）或角"BOA". 如果在同一個頂點沒有其他的角時，我們也可僅用角頂的一字母來表示角.

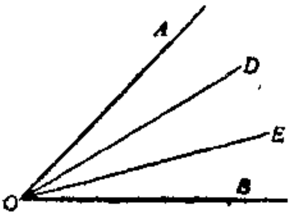

圖 9

角的邊把角所在的平面分成兩部分，一部分叫做角的內部，另一部分叫做角的外部. 通常角的內部可以用下法來解釋，即在角的兩邊上取任意二點 A、B（圖 9）；把 A、B 連結起來，則連綫 AB 一定落在角 AOB 的內部. 但也有時必須把平面的另一部分算做角的內部. 在這兩種情形裏通常都加以特別的說明，指出算做角的內部的是平面的哪一部分.

在圖 10、11 裏面，就表明着這兩種情形，圖中有陰影綫的部分，就是角的內部.

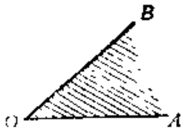

圖 10

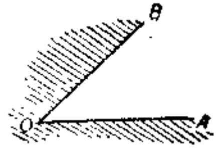

圖 11

若由角頂（圖 9）在角內引任意的直綫 OD、OE……，在這時所成的角 AOD、DOE、EOB……可以看做角 AOB 的一部分.

"角"可以用符號 $\angle$ 來記它. 例如角 AOB，通常寫作 $\angle AOB$.

14. 等角與不等角 根據全等幾何圖形的一般定義(§1)，兩角相疊時如果重合，則兩角相等. 例如，我們把 $\angle AOB$ 移到 $\angle A'O'B'$ 上重疊起來(圖 12)，使頂點 O 落到 O' 上，邊 OB 落

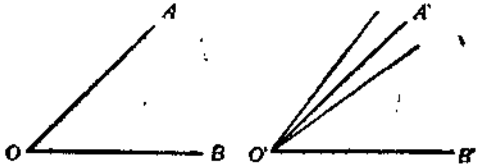

圖 12

到 $O'B'$ 上，再使兩角的內部放置在直綫 $O'B'$ 的同旁，如果邊 OA 和邊 $O'A'$ 相重合，則兩角相等；如果邊 OA 落到 $\angle A'O'B'$ 內部或外部，兩角就不相等，這時一個角成為另一角的一部分，前一個角就是小角.

15. 角的和 $\angle AOB$ 與 $\angle A'O'B'$ 和的求法如下(圖 13)：作 $\angle MNP$ 等於已知的第一角 AOB，再以 N 為頂點，NP 為一邊，在 $\angle MNP$ 的外部作 $\angle PNQ$ 等於已知的第二角 $A'O'B'$，這時 $\angle MNQ$ 就是 $\angle AOB$ 與 $\angle A'O'B'$ 的和. 這個角的內部是原來兩角的內部合成的，這兩個角含有公共邊（NP）. 用相

同的方法可得出三個角或多數角的和。

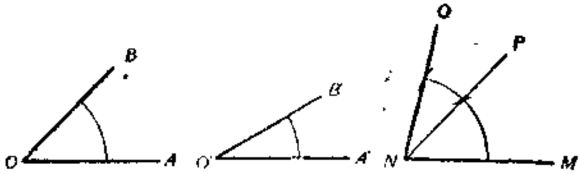

圖 13

求角的和與求綫段的和同樣，也可以應用交換律與結合律。

有時，從角的頂點作一射綫把已知角分做二等份，這條射綫叫做角的平分綫（或二等分綫）（圖 14）。

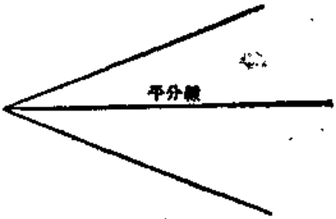

圖 14

16. 角的概念的擴大 在求角的和的時候，可能遇到幾種特殊情形，現在分別的來研究一下：

1. 可能有這樣的現象：幾個角（例如 $\angle AOB$、$\angle BOC$、$\angle COD$）相加以後（圖 15），$\angle COD$ 的一邊 OD，變成了 $\angle AOB$ 的一邊 OA 的延長綫，這時得出來的圖形是由一點（O）向相反方向引出來的兩射綫 OA、OD 所組成，並且兩射綫互為延長綫，這樣的圖形也叫做角（平角）。

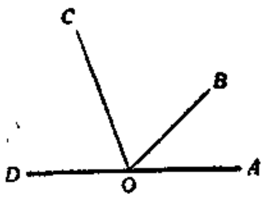

圖 15

2. 有時幾個角（例如 $\angle AOB$、$\angle BOC$、$\angle COD$、$\angle DOE$與$\angle EOA$）

相加以後(圖 16)，$\angle EOA$ 的一邊 OA 與 $\angle AOB$ 的一邊 OA 相重合．這樣，幾個相互鄰接的角圍繞一點(O)所組成的圖形，也叫做角(周角)．

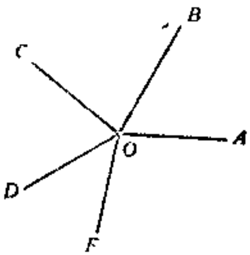

圖 16

3．最後，也會發生這樣的情形，許多角的和，不但在公共頂點周圍成爲一個周角，而且圍繞着這個公共角頂重疊到兩周、三周……．這個和等於一個周角或幾個周角加上別的角．

角的量法

17．圓心角 由圓的兩個半徑所組成的角叫做圓心角．如 $\angle AOB$ (圖 17)，這個角與它兩邊所夾的弧互相對應．

圓心角與它的對應弧有下面的兩種關係：

在同圓或等圓裏：

(1) 如果圓心角相等，則所對的弧也相等．

(2) 反過來，如果弧相等，則所對的圓心角也相等．

假定 $\angle AOB = \angle COD$ (圖 18)，我們來說明 $\overset{\frown}{AB}$ 與 $\overset{\frown}{CD}$

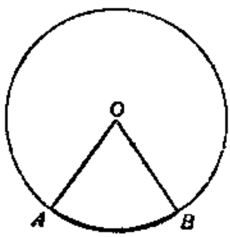

圖 17

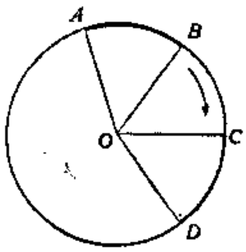

圖 18

也相等.

假設我們把扇形 AOB 圍繞着圓心 O, 依箭頭的方向旋轉, 使半徑 OA 與 OC 相重合, 這時根據角的相等關係, 半徑 OB 就和 OD 相重合, 所以 $\overset{\frown}{AB}$ 與 $\overset{\frown}{CD}$ 也相合; 也就是它們都相等.

第二種關係, 也很容易用疊合法得出.

根據以上的關係, 可以說明下面的問題.

設 AOB 是一個任意角(圖 19), 以點 O 爲圓心, 任意長作半徑畫一個弧與角的兩邊交於兩點 C、D, 這時 $\angle AOB$ 就是 $\overset{\frown}{CD}$ 所對的圓心角.

假設這個弧是五度 (在圖上的度數是放大的), 這時假如把各分點和圓心連結起來, $\angle AOB$ 就很明顯的分成五個等份, 即五度.

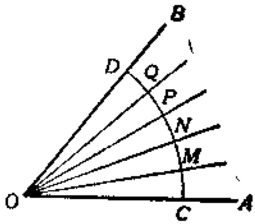

圖 19

因此, 角是用它所對應的弧來量.

如果在 $\overset{\frown}{CD}$ 上取 M、N、P、Q 各點, 把弧分爲相等的五段, 則各段弧 CM、MN、NP、PQ、QD 的對應圓心角 COM、MON、NOP、POQ、QOD 也一定相等.

18. 弧與角的度數 任意一個圓, 如果把它的周分成 360 等分, 過每一個分點引一半徑, 則圍繞着圓心可以得到360個圓心角和對應弧. 因爲這些圓心角的對應弧相等, 所以這些圓心角也都相等. 這樣在圓上所得每一段弧長叫弧的一度, 而每段弧所對的每個圓心角叫做角的一度. 這就是說: 弧的一度是圓周的 $\frac{1}{360}$, 而角的一度是一度弧所對的圓心角.

把一度(弧或是角)再分成 60 等分, 每份叫做一分; 把一分再分成 60 等分, 每份叫做一秒.