高等学校数学学习辅导教材

GAODENG XUEXIAO SHUXUE XUEXI FUDAO JIAOCAI

微积分习题全解

WEIJIFEN XITI QUANJIE

人大·微积分修订版

王丽燕 秦禹春/编 著

大连理工大学出版社

高等学校数学学习辅导教材

微积分习题全解

（人大·微积分修订版）

国家理科基地创名牌课程课题组组编

王丽燕　秦禹春　编著

大连理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分习题全解 / 王丽燕,秦禹春编著 . —大连 : 大连理工大学出版社，2002.11
(高等学校数学学习辅导教材)
ISBN 7-5611-2202-0

Ⅰ. 微… Ⅱ. ①王… ②秦… Ⅲ. 微积分—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. O172-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 080087 号

大连理工大学出版社出版
地址:大连市凌水河 邮政编码:116024
电话:0411-4708842 传真:0411-4701466 邮购:0411-4707955
E-mail:dutp@mail.dlptt.ln.cn URL:http://www.dutp.com.cn
大连理工印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:140mm×203mm 印张:7 字数:222 千字
印数:1 ~10 000
2002 年 11 月第 1 版 2002 年 11 月第 1 次印刷

责任编辑:刘 杰 责任校对:杜 娟
封面设计:王福刚

定 价:9.80 元

前　　言

《高等数学》是大学理工科、经济学、管理学等门类各专业学生必修的基础课，也是硕士研究生入学考试的一门必考科目。为了帮助广大读者学好《高等数学》、扩大课堂信息量、提高应试能力，我们根据原国家教委审定的普通高等学校“高等数学课程教学基本要求”(教学大纲)，编写了融学习指导和考研为一体的具有工具书性质的《微积分习题全解》。

本书按照被全国许多院校采用的赵树嫄主编的《微积分》(修订本)(中国人民大学出版社)的章节顺序，分为九章，每章的习题都作了较为详尽的解答，有的题还给出了多种解法及其注意事项。编写这本书的目的是方便读者对照和分析。值得提醒一下，解题能力需要亲自动手，通过本身的实践，积累经验，本书使用了中国人民大学出版社出版的赵树嫄主编的《微积分》(修订本)中的全部习题，在此表示衷心的感谢！本书得到了**“国家理科基地创建名牌课程”**项目经费的资助，还得到国家理科基地国内访问学者、沈阳工业学院沙萍、长春大学敬石心教授的热情帮助，浙江万里学院徐园芬老师提供了部分习题解答。张金利、李海燕同志做了大量的校对工作。本书还得到了大连大学教务处徐晓鹏同志和数学系赵植武

同志、浙江万里学院教务处的关怀，大连理工大学出版社给予有力的支持，编著者在此向他们一并表示衷心的感谢。

限于编者的水平，错漏不当在所难免，诚恳期望同行和读者不吝批评指正。

秦禹春
浙江大学数学系
2002 年 6 月

目　　录

第一章　函　数

(A)

1.按下列要求举例：

(1)一个有限集合。

解　$A=\{x|x$ 为太阳系九大行星$\}$。

(2)一个无限集合。

解　$B=\{x|x$ 为自然数$\}$。

(3)一个空集。

解　$C=\{x|x>0$ 且 $x<-1\}$。

(4)一个集合是另一个集合的子集。

解　$D_1=\{x|x$ 为整数$\}$，$D_2=\{x|x$ 为奇数$\}$，则 $D_2\subset D_1$。

2.用集合的描述法表示下列集合：

(1)大于 5 的所有实数集合。

解　$A=\{x|x>5,x\in R\}$。

(2)圆 $x^2+y^2=25$ 内部(不包含圆周)一切点的集合。

解　$B=\{(x,y)|x^2+y^2<25,x\in R,y\in R\}$。

(3)抛物线 $y=x^2$ 与直线 $x-y=0$ 交点的集合。

解　$C=\{(x,y)|y=x^2$ 且 $x-y=0,x,y\in R\}$。

3.用列举法表示下列集合：

(1)方程 $x^2-7x+12=0$ 的根的集合。

解　$A=\{3,4\}$。

(2)抛物线 $y=x^2$ 与直线 $x-y=0$ 交点的集合。

解　$B=\{(1,1),(0,0)\}$。

(3)集合$\{x||x-1|\leqslant 5$ 的整数$\}$。

解　$C=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6\}$。

4. 下列哪些集合是空集？

$A=\{x|x+1=0\}$，$B=\{x|x^2+1=0, x$ 为实数$\}$，$C=\{x|x>1$ 且 $x<0\}$，$D=\{x|x>0$ 且 $x<1\}$，$E=\{(x,y)|x^2+y^2=1$ 且 $x+y=3, x,y$ 均为实数$\}$。

解　$A=\{x|x=-1\}\neq\varnothing$

$B=\{x|x^2+1=0, x$ 为实数$\}=\varnothing$

$C=\{x|x>1$ 且 $x<0\}=\varnothing$

$D=\{x|x>0$ 且 $x<1\}=\{x|0<x<1\}\neq\varnothing$

对于集合 E

由 $\begin{cases}x^2+y^2=1\\ x+y=3\end{cases}$　得 $y^2-3y+4=0, \Delta=-7<0$

所以 $y^2-3y+4=0$ 无实数解，即 $E=\varnothing$。

5. 写出 $A=\{0,1,2\}$的一切子集。

答：$\{0\},\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\},\{1\},\{2\},\{0,1,2\},\varnothing$为$\{0,1,2\}$的子集。

6. 如果 $A=\{0,1,2\}$，$B=\{1,2\}$下列各种写法哪些是对的，哪些不对？

$1\in A, 0\overline{\in} B, \{1\}\in A, 1\subset A, \{1\}\subset A, 0\subset A, \{0\}\subset A, \{0\}\subset B, A=B, A\supset B, \varnothing\subset A, A\subset A$。

答：正确的有：$1\in A, 0\overline{\in} B, \{1\}\subset A, \{0\}\subset A, A\supset B, \varnothing\subset A, A\subset A$。

错误的有：$\{1\}\in A, 1\subset A, 0\subset A, \{0\}\subset B, A=B$。

因元素对集合的关系是属于和不属于，集合对集合的关系是包含和不包含。

7. 设 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{1,3,5\}$，$C=\{2,4,6\}$求：(1)$A\cup B$；(2)$A\cap B$；(3)$A\cup B\cup C$；(4)$A\cap B\cap C$；(5)$A-B$。

解　(1)$A\cup B=\{1,2,3,5\}$

(2)$A\cap B=\{1,3\}$

(3)$A\cup B\cup C=\{1,2,3,4,5,6\}$

(4)$A\cap B\cap C=\{1,2,3\}\cap\{1,3,5\}\cap(2,4,6)=\varnothing$

(5)$A-B=\{1,2,3\}-\{1,3,5\}=\{2\}$

8. 如果 A 表示某单位会英语人的集合，B 表示会日语的人的集合，那么 A'，B'，$A-B$，$(A\cup B)'$，$(A\cap B)'$各表示什么样的人的集合？

答　A'表示该单位不会英语的人的集合。

B'表示该单位不会日语的人的集合。

$A-B$ 表示该单位会英语但不会日语的人的集合。

$(A\cup B)'$表示该单位既不会英语也不会日语的人的集合。

$(A\cap B)'$表示该单位或不会英语或不会日语的人的集合。

9. 如果 $A=\{x|3<x<5\}$，$B=\{x|x>4\}$，求：

(1)$A\cup B$；(2)$A\cap B$；(3)$A-B$。

解　(1)$A\cup B=\{x|x>3\}$

(2)$A\cap B=\{x|4<x<5\}$

(3)$A-B=\{x|3<x\leqslant 4\}$

10. 如果$A=\{(x,y)|x-y+2\geqslant 0\}$，

$B=\{(x,y)|2x+3y-6\geqslant 0\}$，

$C=\{(x,y)|x-4\leqslant 0\}$，

在坐标平面上标出 $A\cap B\cap C$ 的区域。

解　$x-y+2\geqslant 0$，即 $y\leqslant x+2$

$2x+3y-6\geqslant 0$，　即 $y\geqslant \dfrac{6-2x}{3}$

$x-4\leqslant 0$，　　即 $x\leqslant 4$

所以 $A\cap B\cap C$ 为图 1-1 中阴影部分的三角形区域。

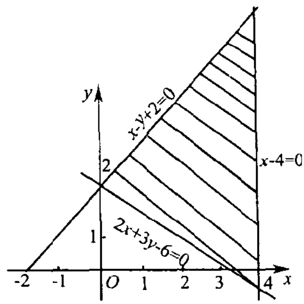

图 1-1

11. 如果$U=\{1,2,3,4,5,6\}$，

$A=\{1,2,3\}$，$B=\{2,4,6\}$，求(1)A'；(2)B'；(3)$A'\cup B'$；(4)$A'\cap B'$。

解　(1)$A'=(4,5,6)$

(2)$B'=\{1,3,5\}$

(3)$A'\cup B'=\{1,3,4,5,6\}$

(4)$A'\cap B'=\{5\}$

12. U，A，B 同第 11 题，验证 $A-B=A\cap B'$。

解　$A-B=\{1,2,3\}-\{2,4,6\}=\{1,3\}$

又因　　　$A\cap B'=\{1,2,3\}\cap\{1,3,5\}=\{1,3\}$

所以　　　$A-B=A\cap B'$

13. 如果 A 是非空集合，下列各式哪些是对的，哪些不对？

$A\cup A=A$，$A\cap A=A$，$A\cap A=\varnothing$，$A\cup\varnothing=A$，$A\cup\varnothing=\varnothing$，$A\cup U=U$，$A\cap U=A$，$A\cap\varnothing=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$，$A-A=A$，$A-A=\varnothing$。

答：正确的有：$A\cup A=A$，$A\cap A=A$，$A\cup\varnothing=A$，

$A\cup U=U$，$A\cap U=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$，$A-A=\varnothing$。

错误的有：$A\cap A=\varnothing$，$A\cup\varnothing=\varnothing$，$A\cap\varnothing=A$，$A-A=A$

14. 已知集合 $A=\{a,3,2,4\}$，$B=\{1,3,5,b\}$。若 $A\cap B=\{1,2,3\}$，求 a，b。

解 因 $A\cap B=\{a,3,b\}=\{1,2,3\}$，所以 A 和 B 中必包括 1，2，3 三个元素。

所以 $a=1$，$b=2$

15. 调查了某地区 100 个乡，其中 70 个乡小麦亩产量在 250 公斤以上，以集合 A 表示这些乡；40 个乡棉花亩产量在 60 公斤以上，以集合 B 表示这些乡；小麦亩产量在 250 公斤以上而棉花亩产量在 60 公斤以下的有 55 个乡。试用集合关系表示下列各类乡，并计算出各类型乡的数目：

(1)麦、棉两项亩产量均达到上述指标的乡；

(2)小麦亩产量未达到 250 公斤以上而棉花亩产量在 60 公斤以上的乡；

(3)麦、棉中至少有一项达到上述指标的乡；

(4)麦、棉两项均未达到上述指标的乡。

解 参见图 1-2。

(1)$A\cap B$。乡数$=40-25=15$。

(2)$B-A=A'B$。乡数$=30-(60-55)=25$

(3)$A\cup B$。乡数$=100-(60-55)=95$

(4)$(A\cup B)'$。乡数$=40-[30-(60-55)]=15$

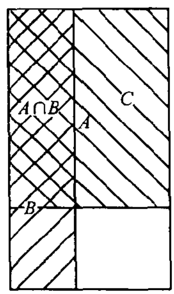

图 1-2

16. 如果 $A=\{a,b,c,d\}$，$B=\{c,d,e\}$，$C=\{d,e,f\}$，验证：

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

证明 由 $B\cup C=\{c,d,e,f\}$，得

$$A\cap(B\cup C)=\{c,d\}$$

又因 $$A\cap B=\{c,d\},A\cap C=\{d\}$$

所以 $$(A\cap B)\cup(A\cap C)=\{c,d\}$$

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

17. 用第 8 题的集合 A 与集合 B，验证摩根律。

证明 (i)若某人 $a\in(A\cup B)'$，这说明 a 既不会英语也不会日语，即 $a\in$

A' 且 $a\in B'$，亦即 $a\in A'\cap B'$，从而 $(A\cup B)'\subset A'\cap B'$。

反之，若 $a\in A'\cap B'$，说明 a 既不会英语也不会日语，所以 $a\overline{\in}A\cup B$，即 $a\in(A\cup B)'$，从而 $A'\cap B'\subset(A\cup B)'$。

综上 $(A\cup B)'=A'\cap B'$。

(ii) 若某人 $a\in(A\cap B)'$，说明 a 或不会英语或不会日语，即 $a\in A'$ 或 $a\in B'$，亦即 $a\in A'\cup B'$，从而 $(A\cap B)'\subset A'\cup B'$。

反之，若 $a\in A'\cup B'$，说明 a 或不会英语或不会日语，即 $a\overline{\in}A\cap B$，亦即 $a\in(A\cap B)'$，从而 $A'\cup B'\subset(A\cap B)'$。

综上，$(A\cap B)'=A'\cup B'$。

18. 用集合运算律证明：$X\cup(X\cap Y)'\cup Y=U$。

证明

$$\begin{aligned}X\cup(X\cap Y)'\cup Y&=X\cup(X'\cup Y')\cup Y\\&=[(X\cup X')\cup Y']\cup Y=[U\cup Y']\cup Y\\&=U\cup Y=U\end{aligned}$$

19. 如果 $A=\{a,b,c,d\}$，$B=\{a,b,c\}$，求 $A\times B$。

解 $A\times B=\{a,b,c,d\}\times\{a,b,c\}$

$=\{(a,a),(b,a),(c,a),(d,a),(a,b),(b,b),(c,b),(d,b),(a,c),(b,c),(c,c),(d,c)\}$

20. 如果 $X=Y=\{3,0,2\}$，求 $X\times Y$。

解 $X\times Y=\{(3,3),(0,3),(2,3),(3,0),(0,0),(2,0),(3,2),(0,2),(2,2)\}$

21. 设集合 $A=\{$北京，上海$\}$，$B=\{$南京，广州，深圳$\}$。求 $A\times B$ 与 $B\times A$。

解 $A\times B=\{$(北京，南京)，(北京，广州)，(北京，深圳)，(上海，南京)，(上海，广州)，(上海，深圳)$\}$

$B\times A=\{$(南京，北京)，(南京，上海)，(广州，北京)，(广州，上海)，(深圳，北京)，(深圳，上海)$\}$

22. 设集合 $X=\{x_1,x_2,x_3\}$，$Y=\{y_1,y_2\}$，$Z=\{z_1,z_2\}$，求 $X\times Y\times Z$。

解 $X\times Y\times Z=\{(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_1,z_1),(x_3,y_1,z_1),(x_1,y_2,z_1),(x_2,y_2,z_1),(x_3,y_2,z_1),(x_1,y_2,z_2),(x_2,y_2,z_2),(x_3,y_2,z_2),(x_1,y_1,z_2),(x_2,y_1,z_2),(x_3,y_1,z_2)\}$

23. 解下列不等式：

(1)$x^2<9$

解　$-3<x<3$

(2)$|x-4|<7$

解　$-7<x-4<7$， 从而$-3<x<11$

(3)$0<(x-2)^2<4$

解　$(x-2)^2-4<0, x(x-4)<0, 0<x<4$，

因为$(x-2)^2>0$，所以 $x\neq2$，从而 $0<x<4$ 且 $x\neq2$。

(4)$|ax-x_0|<\delta$　($a>0, \delta>0, x_0$ 为常数)。

解　$-\delta<ax-x_0<\delta, x_0-\delta<ax<x_0+\delta$

因为 $a>0$，所以$\dfrac{x_0-\delta}{a}<x<\dfrac{x_0+\delta}{a}$

24. 用区间表示满足下列不等式的所有 x 的集合：

(1)$|x|\leqslant3$　(2)$|x-2|\leqslant1$　(3)$|x-a|<\varepsilon$　(a 为常数，$\varepsilon>0$)

(4)$|x|\geqslant5$　(5)$|x+1|>2$

解　(1)$[-3,3]$　(2)$[1,3]$　(3)$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$　(4)$(-\infty,-5]\cup[5,+\infty)$　(5)$(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$

25. 用区间表示下列点集，并在数轴上表示出来：

(1)$I_1=\{x\,|\,|x+3|<2\}$　(2)$I_2=\{x\,|\,1<|x-2|<3\}$

解　(1)$(-5,-1)$(见图 1-3)　　(2)$(-1,1)\cup(3,5)$(见图 1-4)

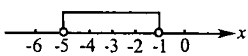

图 1-3

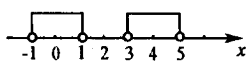

图 1-4

26. $y=\lg(-x^2)$是不是函数关系，为什么？

答：不是函数关系。

因为 x 无论为何实数，$-x^2\leqslant0$，$\log_a x$ 的定义域为 $x>0$，又因为定义域不能是空集，所以不是函数关系。

27. $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$与 $y=x+1$ 是不是相同的函数关系，为什么？

答：不是相同函数，因为 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$的定义域为 $x\neq1$，$y=x+1$ 的定义域

为 $x\in R$，定义域不同，所以不是相同函数。

28. 确定下列函数定义域：

(1) $y=\sqrt{9-x^2}$

解 因为 $9-x^2\geqslant 0$， 所以 $-3\leqslant x\leqslant 3$

(2) $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$

解 $\begin{cases}1-x^2\neq 0\\x+2\geqslant 0\end{cases}$ $\begin{cases}x\neq\pm 1\\x\geqslant -2\end{cases}$ 所以 $x\geqslant -2$ 且 $x\neq\pm 1$

(3) $y=\dfrac{-5}{x^2+4}$

解 $x^2+4\neq 0$，所以 $x\in R$

(4) $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$

解 因为 $-1\leqslant\dfrac{x-1}{2}\leqslant 1$，所以 $-1\leqslant x\leqslant 3$

(5) $y=1-e^{1-x^2}$

解 x 取任意实数，函数均有意义，所以定义域为 $x\in R$。

(6) $y=\dfrac{\lg(3-x)}{\sqrt{|x|-1}}$

解 $\begin{cases}3-x>0,\\|x|-1>0,\end{cases}$ $\begin{cases}x<3,\\|x|>1,\end{cases}$ $\begin{cases}x<3,\\x>1 \text{ 或 } x<-1,\end{cases}$

所以定义域为 $1<x<3$ 或 $x<-1$。

(7) $y=\sqrt{\lg\dfrac{5x-x^2}{4}}$

解 $\begin{cases}\lg\dfrac{5x-x^2}{4}\geqslant 0,\\\dfrac{5x-x^2}{4}>0,\end{cases}$ $\begin{cases}\dfrac{5x-x^2}{4}\geqslant 1,\\x(5-x)>0,\end{cases}$ 故 $\begin{cases}x^2-5x+4\leqslant 0\\0<x<5\end{cases}$

所以 $\begin{cases}1\leqslant x\leqslant 4,\\0<x<5,\end{cases}$ 即定义域为 $1\leqslant x\leqslant 4$

(8) $y=\dfrac{\arccos\dfrac{2x-1}{7}}{\sqrt{x^2-x-6}}$

解　由 $\begin{cases} -1\leqslant\dfrac{2x-1}{7}\leqslant 1, \\ x^2-x-6>0, \end{cases}$ 有 $\begin{cases} -3\leqslant x\leqslant 4, \\ x<-2 \text{ 或 } x>3, \end{cases}$

所以定义域为 $-3\leqslant x<-2$ 或 $3<x\leqslant 4$

29. 已知 $f(x)=x^2-3x+2$。求 $f(0),f(1),f(2),f(-x),f\left(\dfrac{1}{x}\right)$，$f(x+1)$。

解　$f(0)=2,f(1)=0,f(2)=0,f(-x)=x^2+3x+2$

$f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{3}{x}+2$

$f(x+1)=(x+1)^2-3(x+1)+2=x^2-x$

30. 设 $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$，求 $f[f(x)]$ 和 $f\{f[f(x)]\}$

解　$f[f(x)]=\dfrac{f(x)}{1-f(x)}=\dfrac{\dfrac{x}{1-x}}{1-\dfrac{x}{1-x}}=\dfrac{x}{1-2x}$

$f\{f[f(x)]\}=f\left(\dfrac{x}{1-2x}\right)=\dfrac{\dfrac{x}{1-2x}}{1-\dfrac{x}{1-2x}}=\dfrac{x}{1-3x}$

31. 如果 $f(x)=x^5-2x^3+3x$，证明 $f(-x)=-f(x)$

证明　$f(-x)=-x^5+2x^3-3x=-(x^5-2x^3+3x)=-f(x)$

32. 如果 $f(x)=\dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}$，证明 $f(-x)=-f(x)$

证明　$f(-x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}=\dfrac{(e^x-1)e^{-x}}{(e^x+1)e^{-x}}=\dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}=-f(x)$

33. 如果 $f(x)=\dfrac{1-x^2}{\cos x}$，证明：$f(-x)=f(x)$

证明　$f(-x)=\dfrac{1-(-x)^2}{\cos(-x)}=\dfrac{1-x^2}{\cos x}=f(x)$

34. 如果 $f(x)=a^x$，证明

$f(x)\cdot f(y)=f(x+y),\dfrac{f(x)}{f(y)}=f(x-y)$

证明　$f(x)\cdot f(y)=a^x\cdot a^y=a^{x+y}=f(x+y)$

$\dfrac{f(x)}{f(y)}=\dfrac{a^x}{a^y}=a^{x-y}=f(x-y)$

35. 如果 $f(x)=\log_a x$，证明：

$$f(x)+f(y)=f(xy),f(x)-f(y)=f\left(\frac{x}{y}\right)$$

证明　$f(x)+f(y)=\log_a x+\log_a y=\log_a xy=f(xy)$

$$f(x)-f(y)=\log_a x-\log_a y=\log_a\frac{x}{y}=f\left(\frac{x}{y}\right)$$

36. 确定下列函数的定义域并作出函数图形：

$$(1)f(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x<0\end{cases}$$

解　定义域为 $x\in R$，图形见图 1-5。

$$(2)f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & |x|\leqslant 1,\\ x-1, & 1<|x|<2\end{cases}$$

解　定义域为 $-2<x<2$，图形见图 1-6。

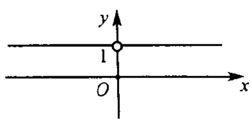

图 1-5

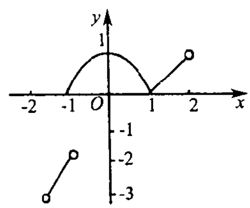

图 1-6

37. 将函数 $y=5-|2x-1|$ 用分段形式表示，作出函数图形。

解

$$y=\begin{cases}5-(2x-1), & 2x-1\geqslant 0\\ 5-(1-2x), & 2x-1<0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}6-2x, & x\geqslant\frac{1}{2}\\ 4+2x, & x<\frac{1}{2}\end{cases}$$

图形见图 1-7。

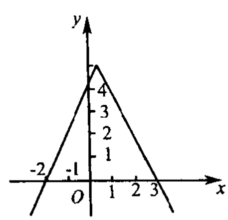

图 1-7

38. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0,\end{cases}$ 求 $f(x-1),f(x^2-1)$。

解 $f(x-1)=\begin{cases}1, & x-1<0\\ 0, & x-1=0\\ 1, & x-1>0\end{cases}=\begin{cases}1, & x<1\\ 0, & x=1\\ 1, & x>1\end{cases}$

$$f(x^2-1)=\begin{cases}1, & x^2-1<0\\ 0, & x^2-1=0\\ 1, & x^2-1>0\end{cases}=\begin{cases}1, & -1<x<1\\ 0, & x=\pm1\\ 1, & x>1 \text{ 或 } x<-1\end{cases}$$

39. 设 $\varphi(x+1)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2x, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$ 求 $\varphi(x)$。

解 $\varphi(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & 0\leqslant x-1\leqslant 1\\ 2(x-1), & 1<x-1\leqslant 2\end{cases}$

$$=\begin{cases}(x-1)^2, & 1\leqslant x\leqslant 2\\ 2(x-1), & 2<x\leqslant 3\end{cases}$$

40. 作隐函数关系 $x^2+(y-3)^2=1$ 的图形，求出其两个 y 是 x 的函数的单值支的显函数关系。

解 因为 $x^2+(y-3)^2=1, y=3\pm\sqrt{1-x^2}$

所以 $$y_1=3+\sqrt{1-x^2}$$

$$y_2=3-\sqrt{1-x^2}$$

图形见图 1-8。

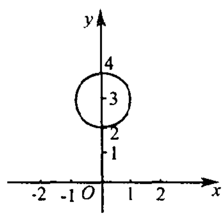

图 1-8

41. 设一矩形面积为 A，试将周长 S 表示为宽 x 的函数，并求其定义域。

解 $S=2x+\dfrac{2A}{x}$，定义域为 $x>0$。

42. 在半径为 r 的球内嵌入一圆柱，试将圆柱的体积表示为其高的函数，并确定此函数的定义域。

解 设 V 为圆柱体积，h 为圆柱的高，r 为球半径，r' 为圆柱底面半径。

则 $$r'=\sqrt{r^2-\frac{h^2}{4}}, V=\pi(r')^2h=\pi h\left(r^2-\frac{h^2}{4}\right)$$

因为 $r^2-\frac{1}{4}h^2>0$，所以 $0<h<2r$ 为 $V=\pi h\left(r^2-\frac{h^2}{4}\right)$ 的定义域。

43. 用铁皮做一个容积为 V 的圆柱形罐头筒，试将它的全面积表示成半径的函数，并确定此函数的定义域。

解　设全面积为 S，底面半径为 r，高为 h，$h=\frac{V}{\pi r^2}$，$S=2\pi rh+2\pi r^2$

$=2\left(\frac{V}{r}+\pi r^2\right)$，$r>0$。

44. 拟建一个容积为 V 的长方体水池，设它的底为正方形，如果池底所用材料单位面积的造价是四周单位面积造价的 2 倍，试将总造价表示成底边长的函数，并确定此函数的定义域。

解　设总造价为 T，底边长为 a，高 h，容积 V，面积 S，单位面积造价 b，

则　$V=a^2h$，$h=\frac{V}{a^2}$

$T=a^2\cdot 2b+4ah\cdot b=\left(2a^2+\frac{4V}{a}\right)b$，　定义域为 $a>0$。

45. 设生产与销售某产品的总收益 R 是产量 x 的二次函数，经统计得知，当产量 $x=0,2,4$ 时，总收益 $R=0,6,8$，试确定总收益与产量 x 的函数关系。

解　因为 R 是 x 的二次函数，所以设

$$R=ax^2+bx+c$$

则 $\begin{cases}0=a\times 0+b\times 0+c,\\ 6=a\times 2^2+b\times 2+c,\\ 8=a\times 4^2+b\times 4+c,\end{cases}$　得 $\begin{cases}a=-\frac{1}{2},\\ b=4,\\ c=0,\end{cases}$

所以 $R=-\frac{1}{2}x^2+4x$

46. 某商品供给量 Q 对价格 P 的函数关系为 $Q=Q(P)=a+b\cdot c^P$，今知当 $P=2$ 时，$Q=30$；$P=3$ 时，$Q=50$；$P=4$ 时，$Q=90$。求供给量 Q 对价格 P 的函数关系。

解　因为 $Q=a+b\cdot c^P$，所以 $\begin{cases}30=a+b\cdot c^2 & ①\\ 50=a+b\cdot c^3 & ②\\ 90=a+b\cdot c^4 & ③\end{cases}$

③－②得　　$40=b\cdot c^3(c-1)$　　④