常微分方程边值问题和sturm比较理论引论

Introduction to BVP and Sturmian Comparison Theory for Ordinary Differential Equations

邓宗琦

华中师范大学出版社

常微分方程边值问题和Sturm比较理论引论

邓宗琦

华中师范大学出版社

内 容 简 介

常微分方程边值问题和Sturm比较理论是常微分方程的重要分支。据数学文摘统计，每年发表这个领域的论文约占常微分方程论文总量的七分之一。本书是在研究生、本科生（选修课）六次试用的讲义基础上修订而成的。共分七章。前三章是基础部分，后四章有相对独立性，其中有些内容可将读者带到相应领域的前沿。只要有常微分方程和泛函分析的基础知识，就能接受本书的全部内容。本书可作高等院校数学系或相近专业的研究生教材或本科生选修课教材。

常微分方程边值问题
和Sturm比较理论引论

邓 宗 琦

*

华中师范大学出版社出版
（武昌桂子山）
新华书店湖北发行所发行
华中师范大学印刷厂印刷

开本：850×1168 1/32 印张：6.375 字数：161千字
1987年6月第1版 1990年9月第2版
ISBN 7-5622-0588-4/O·65
印数1—1000 定价1.75元

序

我国数学家自解放以后在常微分方程领域中已做了大量的研究工作，但大多数属于定性理论、稳定性理论和抽象动力系统等三个方面，而对边值问题、特征值问题和比较定理等方面则关心得不够，并且也没有合适的、供数学系高年级和研究生使用的教材。邓宗琦同志这本书正符合这个需要。他编写此书时参阅了大量的专著和文献，并在华中师范大学数学系试用和修改过多次。此书取材既有古典的最基本的内容，也有较为近代的新成果，我相信它的出版一定会受到广大高等院校数学系师生的欢迎，同时也将推动国内更多的数学家在这些方面开展研究工作。

叶彦谦 1987年5月

前　言

目前，在科学技术、生产实际中提出了大量的常微分方程边值问题和Sturm比较理论问题，并吸引了不少数学工作者从事这方面的研究。据西德出版的数学文摘的不完全统计，每年发表的常微分方程边值问题和Sturm比较理论问题方面的论文约占常微分方程论文总量的七分之一。本书是想把中外文书刊的有关成果向有兴趣的读者作点介绍。本书是在为华中师范大学数学系研究生、本科生（选修课）编写的讲义基础上修订而成的。讲义曾于1981年、1982年、1983年、1986年在华中师范大学数学系1977级、1978级本科生作选修课，以及1981级常微分方程教师进修班、1983级常微分方程助教进修班、1982级和1985级研究生试用过，这次修订时吸收了每次听课者的宝贵意见；尤其是1985级研究生对本书的修订工作，付出了大量的辛勤劳动，在此谨致谢意。

本书共分六章，前三章是基础部分，以后每章都有相对的独立性。第四章是二阶常微分方程 Sturm 比较理论；第五章是 Sturm—Liouville 理论；第六章是二阶方程解的零点理论。这三章的某些内容可以将读者带到相应领域的前沿。正文之后还附有参考用的习题。

本书虽然多次试用，但由于本人学识有限，难免存在欠妥之处，恳请读者惠予指正。

本书的出版得到了本校许多部门的关心和鼓励，在此致谢。

本书承著名数学家叶彦谦教授欣然作序，在此深表衷心地感谢！

邓宗琦　1987年5月

第 二 版 前 言

第二版的主要不同点是增加了第七章二阶微分系统的Sturm比较理论。这是目前很活跃的研究领域。

第一版出版后有不少读者来信鼓励，有的还提出了好建议，在此一并感谢！

邓宗琦

1989年5月

目　录

第一章　二阶线性方程边值问题

在常微分方程基础教程中我们知道，常微分方程的重要定解问题——初值问题。然而，在科学技术、生产实际问题中，还向我们提出了另一类定解问题——边值问题。本章重点介绍二阶线性方程的边值问题。

§1　基本概念和例子

下面通过一个例子来说明我们要讨论的问题。我们知道，要求初值问题：

$$\begin{cases} x''(t)=0, \quad t\in[0,1], & (1.1)\\ x(0)=0,\ x'(0)=2 & (1.2)\end{cases}$$

的解，由(1.1)的通解 $x(t)=c_1+c_2t$，代入初始条件(1.2)，然后确定任意常数 c_1，c_2，即可得到本问题的解：

$$x(t)=2t。$$

方程(1.1)还可以提出另一类定解问题，即

$$x''(t)=0, \quad t\in[0,1], \tag{1.1}$$

$$x(0)=1,\ x(1)=2。 \tag{1.3}$$

同样，也可由它的通解定此问题的解。事实上，将定解条件(1.3)代入(1.1)的通解$x(t)=c_1+c_2t$，即可得到：

$$x(0)=c_1+c_2\cdot 0=1,$$

$$x(1)=c_1+c_2\cdot 1=2,$$

所以　$$c_1=1 \quad c_2=1。$$

从而得到本问题的解：

$$x(t)=1+t,\ t\in[0,1]。$$

直接可以验证，这个函数是适合条件（1.3）的解。条件（1.3）称为方程（1.1）的边界条件。这种定解条件与定义解的区间的两个端点的函数值有关。

下面给出几个基本概念的定义。

定义1.1　为了满足理论问题或实际问题的需要，微分方程的解要满足某些件随条件，这样的条件称为定解条件。

定义1.2　由定义解的区间$I=[1,2]$的两个端点给定的定解条件，称为边界条件。

定义1.3　求微分方程满足边界条件的定解问题，称为边值问题。

定义1.4　寻找微分方程的满足边界条件的解的过程，称为解边值问题。

定义1.5　在$I=[1,2]$上多点给定定解条件，满足这些定解条件的问题，称为多点边值问题。

常微分方程边值问题最初是用分离变量法解二阶线性数学物理方程时提出的[1]。1833年至1841年间 Sturm 和 Liouville密切合作讨论了二阶线性齐次方程的边值问题和 Sturm—Liouville 特征值问题。1893年 Picard 讨论了特殊的边值问题：

$$x''(t)=f(t),\ x(a)=0=x(b)。$$

1894年 Burkhard 又讨论了一般边界条件下方程

$$x''(x)=f(t)$$

的边值问题，并引入了常微分方程的 Green 函数。20世纪起是由 Hilbert 和 Bocher 奠定了常微分方程的边值问题的理论基础。1912年在第五届国际数学家大会上Bocher 作了一维边值问题的综合报告[2]。此后，在各个领域不断提出了常微分方程的边值问题。例如：

在研究河渠中的流体流动时，提出了边值问题[3]：

$$\begin{cases}(p(t)x'(t))'+\lambda x(t)=1, & t\in[0,1]\\ x'(0)=x(1)=0;\end{cases}$$

均匀杆轴向受力时，在研究杆的弯曲规律时提出了边值问

题[4]：

$$\begin{cases} x''(t)+\lambda x(t)=0, & t\in[0,1] \\ x'(0)=x(1)=0; \end{cases}$$

在化学反应理论中，提出了边值问题[5]：

$$\beta\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}+F(x)=0,$$

$$-x'(0)+\alpha x(0)=0,\ x(1)=0;$$

在化学反应理论中还提出了边值问题[6]：

$$x''(t)=f(t,x,x'),$$

$$x''(0)=\psi_1[x(0)],\ x'(1)=\psi_2[x(1)];$$

在研究过两定点的悬链线时提出了边值问题[7]：

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{1}{a}\sqrt{1+x^2}$$

$$x(a)=A,\ x(b)=B;$$

在研究单粒子一维势阱运动规律时，提出了边值问题[8]：

$$x''(t)+\frac{2m}{h^2}wx(t)=0,$$

$$x(0)=x(a)=0;$$

在研究薄壳闸门中，结构曲线有时倾率一个角度$\theta(0<\theta<\frac{\pi}{2})$，提出了边值问题：

$$x'(t)=-\frac{1}{T}(t\sin\theta+x\cos\theta+q_0)(1+x'^2)^{\frac{3}{2}},\ t\in(0,l),$$

$$x(0)=x(l)=0,$$

其中 $q_0\geqslant 0$ 是顶点水压强度，T 为等值内压力值[9]。

以上提出的边值问题有两类，即一类是所考虑的方程及边界条件中至少有一个是非线性的，这类边值问题叫做非线性边值问题；另一类是所考虑的方程及边界条件都是线性的，这类边值问题叫做线性边值问题。

本书主要考虑线性边值问题，而且前面有几个例子均是二阶线性方程边值问题的特殊类型。

我们知道，一般的二阶线性微分方程为：

$$p_0(t)x''(t)+p_1(t)x'(t)+[p_2(t)+\lambda p_3(t)]x(t)=f(t)。\tag{1.4}$$

对应的齐次方程为：

$$p_0(t)x''(t)+p_1(t)x'(t)+[p_2(t)+\lambda p_3(t)]x(t)=0。\tag{1.5}$$

其中λ是参数，$p_i(t)\in C^{2-i}(I)$，$i=0,1,2$，$f(t),p_2(t)\in C(I)$，$I=[a,b]$。以后若无特别说明，我们总认为这些条件是满足的。

方程(1.4)、(1.5)的一般线性边界条件为：

$$\left.\begin{aligned}U_1(x)&\equiv\alpha_{11}x(a)+\alpha_{12}x'(a)+\beta_{11}x(b)+\beta_{12}x'(b)=r_1,\\U_2(x)&\equiv\alpha_{21}x(a)+\alpha_{22}x'(a)+\beta_{21}x(b)+\beta_{22}x'(b)=r_2,\end{aligned}\right\}\tag{1.6}$$

其中$\alpha_{ij},\beta_{ij},\gamma_i(i,j=1,2)$是实常数。(1.6)中，当$r_1=r_2=0$时，

$$U_1(x)=0,\ U_2(x)=0。\tag{1.7}$$

显然，任意一个连续可微函数代入$U_1(x)$，$U_2(x)$中都有一个确定的值。$U_1(x)$，$U_2(x)$叫做边界算子。容易验证，边界算子(1.6)、(1.7)是线性的。

由(1.4)、(1.6)组成的定解问题叫做二阶线性方程的非齐次边值问题；由(1.4)、(1.7)或(1.5)、(1.6)组成的定解问题叫二阶线性方程的半齐次边值问题；由(1.5)、(1.7)组成的定解问题叫做二阶线性方程的齐次边值问题。显然，$x(t,\lambda)\equiv0$是齐次边值问题的解，这个解称为平凡解。齐次边值问题的解$x(t,\lambda)\not\equiv0$，称为非平凡解。

线性代数知识告诉我们，二阶线性齐次方程的解族构成一个线性空间，而这个解族中有两个且仅有两个线性无关的解。任意两个线性无关的解均可作这个线性空间的基。从而线性齐次方程的解都可以用这个基线性表出。即如果二阶线性齐次方程的两个线性无关的解为$x_1(t,\lambda)$，$x_2(t,\lambda)$，则任意的解（自然，也包括边值问题的解）都可表出为：

$$x(t,\lambda)=c_1x_1(t,\lambda)+c_2x_2(t,\lambda),$$

其中c_1，c_2为任意常数。

问题是，边值问题的解是否存在？后面将有一些简单例子说明，即使每一个初值问题解都存在且唯一，但也不能保证边值问题解一定存在，这是边值问题较之初值问题更复杂的一个方面。

例1.1 已知

$$U_1(x)=2x(0)+3x'(0)+3x(\pi)+2x'(\pi),$$
$$U_2(x)=5x(0)+7x'(0)+7x(\pi)+5x'(\pi),$$
$$x_1(t)=\cos t,\ x_2(t)=\sin t,\ I=[0,\pi],$$

求 $U_1(x_1)$，$U_1(x_2)$，$U_2(x_1)$，$U_2(x_2)$。

解 显然，$\alpha_{11}=2$，$\alpha_{12}=3$，$\alpha_{21}=5$，$\alpha_{22}=7$，

$$\beta_{11}=3,\ \beta_{12}=2,\ \beta_{21}=7,\ \beta_{22}=5;$$

而 $x_1(0)=1$，$x'_1(0)=0$，$x_1(\pi)=-1$，$x'_1(\pi)=0$，

$x_2(0)=0$，$x'_2(0)=1$，$x_2(\pi)=0$，$x'_2(\pi)=-1$。

所以

$$U_1(x_1)=2\cdot1+3\cdot0+3\cdot(-1)+2\cdot0=-1,$$
$$U_1(x_2)=2\cdot0+3\cdot1+3\cdot0+2\cdot(-1)=1,$$
$$U_2(x_1)=5\cdot1+7\cdot0+7\cdot(-1)+5\cdot0=-2,$$
$$U_2(x_2)=5\cdot0+7\cdot1+7\cdot0+5\cdot(-1)=2。$$

§2 可解性定理

下面我们研究在什么条件下，可以保证边值问题可解，即解存在且唯一。

定理1.1 设$x_1(t,\lambda)$、$x_2(t,\lambda)$ 为(1.5) 的基本解组，则由(1.5)、(1.6)组成的半齐次边值问题存在唯一解的充要条件是：

$$\Delta=U_1(x_1)U_2(x_2)-U_1(x_2)U_2(x_1)\neq0。\tag{1.8}$$

证明 先证充分性

由于 $x_1(t,\lambda)$，$x_2(t,\lambda)$是(1.5)的基本解组，因此(1.5)的通解为：

$$x(t,\lambda)=c_1x_1(t,\lambda)+c_2x_2(t,\lambda)。\tag{1.9}$$

由(1.6)得到：

$$\left.\begin{aligned}U_1(x)&\equiv c_1U_1(x_1)+c_2U_1(x_2)=r_1,\\U_2(x)&\equiv c_1U_2(x_1)+c_2U_2(x_2)=r_2。\end{aligned}\right\}\qquad(1.10)$$

显然，(1.10)是以 c_1，c_2 为未知数的线性方程组，且其系数行列式 $\Delta=U_1(x_1)U_2(x_2)-U_1(x_2)U_2(x_1)\neq 0$，因此，(1.10)有唯一解 c_1，c_2，代入(1.7)即可求出满足边界条件(1.6)的解且是唯一的。

再证必要性

由于(1.5)、(1.6)组成的边值问题的解存在唯一，而且解必须包含在通解之中，于是将边界条件(1.6)代入通解(1.9)中就可唯一确定任意常数 c_1，c_2，但要使 c_1，c_2 由(1.10)唯一确定，必有(1.8)成立。定理得证。

例1.2　讨论边值问题

$$\begin{cases}x''(t)=0,\\U_1(x)\equiv x(0)-x'(1)=-1,\\U_2(x)\equiv x(0)+x'(1)=0\end{cases}$$

的可解性。

解　显然方程 $x''(t)=0$ 有基本解组：$1, t$。而

$$U_1(1)=1,\ U_1(t)=-1,\ U_2(1)=1,\ U_2(t)=1,$$

所以

$$\Delta=U_1(1)\cdot U_2(t)-U_1(t)\cdot U_2(1)=2\neq 0。$$

由定理1.1知，本问题可解且解唯一。

定理1.2　设 $x_1(t,\lambda)$，$x_2(t,\lambda)$ 是(1.5)的基本解组，则由(1.5)、(1.7)组成的齐次边值问题存在非平凡解的充要条件是：

$$\Delta=U_1(x_1)U_2(x_2)-U_1(x_2)U_2(x_1)=0。\qquad(1.11)$$

证明　先证充分性

由于(1.5)的通解为：

$$x(t,\lambda)=c_1x_1(t,\lambda)+c_2x_2(t,\lambda),$$

从而由(1.7)得到

$$U_1(x)\equiv c_1U_1(x_1)+c_2U_1(x_2)=0,$$
$$U_2(x)\equiv c_1U_2(x_1)+c_2U_2(x_2)=0,$$

此齐次线性方程组由于系数行列式

$$\Delta=U_1(x_1)\cdot U_2(x_2)-U_1(x_2)\cdot U_2(x_1)=0,$$

故存在非平凡解 c_1，c_2，代入通解中即可得到 (1.5) 的满足边界条件(1.7)的非平凡解，这些解确定到相差一个常数因子。即若 $x(t,\lambda)$是本问题的解，则$cx(t,\lambda)$亦是本问题的解，其中c是任意常数。这一性质是线性齐次边值问题所共有的。

再证必要性

由于满足齐次边界条件的非平凡解存在，当然这个解必须包含在通解之中，因此，由通解 $x=c_1x_1+c_2x_2$ 确定这个非平凡解时，就要求 c_1，c_2 不同时为零，否则就只能得到平凡解。而要 c_1，c_2 不同时为零的正是需要齐次线性组

$$U_1(x)\equiv c_1U_1(x_1)+c_2U_1(x_2)=0,$$
$$U_2(x)\equiv c_1U_2(x_1)+c_2U_2(x_2)=0$$

的系数行列式

$$\Delta=U_1(x_1)\cdot U_2(x_2)-U_2(x_1)\cdot U_1(x_2)=0。$$ 定理证毕。

例1.3 讨论边值问题

$$\begin{cases}x''(t)=0,\\ U_1(x)\equiv x(0)-x(1)=0,\\ U_2(x)\equiv x(0)+x(1)=0\end{cases}$$

是否存在非平凡解。

解 已知方程的基本解组为$1,t$，而 $U_1(1)=0$，$U_1(t)=-1$，$U_2(1)=2$，$U_2(t)=1$，从而

$$\Delta=U_1(1)U_2(t)-U_1(t)U_2(1)=2\neq0。$$

由定理1.2知，本问题不存在非平凡解。

由(1.4)，(1.7)组成的半齐次边值问题可化为(1.5)，(1.6)组成的半齐次边值问题。事实上，这个转化可以这样来完成：第一步，求出(1.4)的任意一个特解 $x_0(t)$，代入(1.7) 得到 $U_1(x_0)$

$=r_1$，$U_2(x_0)=r_2$；第二步，求出下列半齐次边值问题：

$$\begin{cases}p_0(t)x''(t)+p_1(t)x'(t)+[p_2(t)+\lambda p_3(t)]=0\\ U_1(x)=-r_1,\ U_2(x)=-r_2\end{cases}$$

的解 $\tilde{x}(t)$，则

$$x(t)=\tilde{x}+x_0(t),$$

就是由(1.4)及(1.7)组成的半齐次边值问题的解，这是因为：

(i) 显然，$x(t)$ 是(1.4)的解；

(ii) $U_1(x)\equiv U_1(\tilde{x})+U_1(x_0)=-U_1(x_0)+U_1(x_0)=0,$

$U_2(x)\equiv U_2(\tilde{x})+U_2(x_0)=-U_2(x_0)+U_2(x_0)=0,$

因此，$x(t)=\tilde{x}(t)+x_0(t)$ 就是满足所提边界条件的半齐次边值问题的解。

例1.4 证明：半齐次边值问题

$$\begin{cases}x''(t)+x(t)=0,\\ U_1(x)\equiv x(0)+x'(0)+\dfrac{1}{2}x(\pi)-x'(\pi)=1,\\ U_2(x)\equiv x(0)-x'(0)+\dfrac{1}{2}x(\pi)+x'(\pi)=2\end{cases}\tag{1.12}$$

的解存在唯一并求其解。

解　容易看出，$x''(t)+x(t)=0$ 的两个线性无关的解为 $x_1(t)=\cos t$，$x_2(t)=\sin t$，代入(1.12)中得到：

$$U_1(x_1)=\frac{1}{2},\ U_1(x_2)=2,\ U_2(x_1)=\frac{1}{2},\ U_2(x_2)=-2,$$

所以

$$\Delta=U_1(x_1)\cdot U_2(x_2)-U_1(x_2)\cdot U_2(x_1)=-2\neq 0,$$

由定理1.1，得知本边值问题解存在且唯一。

由方程　$x''(t)+x(t)=0$ 的通解为：

$$x(t)=c_1x_1(t)+c_2x_2(t),$$

得到

$$U_1(x)\equiv c_1U_1(x_1)+c_2U_1(x_2)=1,$$
$$U_2(x)\equiv c_1U_2(x_1)+c_2U_2(x_2)=2。$$

即

$$\frac{1}{2}c_1+2\cdot c_2=1,\quad \frac{1}{2}c_1-2\cdot c_2=2,$$

所以

$$c_1=3,\ c_2=-\frac{1}{4},$$

从而得到半齐次边值问题的解为：

$$x(t)=3\cos t-\frac{1}{4}\sin t。$$

例1.5 讨论半齐次边值问题：

$$x''(t)=0,$$
$$U_1(x)\equiv x(0)-x(1)=1,$$
$$U_2(x)\equiv x'(0)+x'(1)=1$$

解的存在性。

解 我们知道原方程的两个线性无关的解为 $x_1(t)=1$, $x_2(t)=t$，从而得到：

$$U_1(x_1)=0,\ U_1(x_2)=-1,\ U_2(x_1)=0,\ U_2(x_2)=2,$$

所以 $$\Delta=U_1(x_1)\cdot U_2(x_2)-U_1(x_2)\cdot U_2(x_1)=0。$$

根据定理1.1，本边值问题不可解，即满足边界条件的解不存在。

这个例子说明，尽管 $x''(t)=0$ 的任一初值问题解存在且唯一，但边值问题的解可能不存在。

例1.6 求半齐次边值问题：

$$x''(t)+x(t)=t,$$
$$U_1(x)\equiv x(0)-3x'(\pi)=3,$$
$$U_2(x)\equiv 2x(0)+x'(\pi)=-1$$

的解。

解 对应齐次方程基本解组为：

$$x_1=\cos t,\ x_2=\sin t。$$

我们分两步来解这个边值问题。