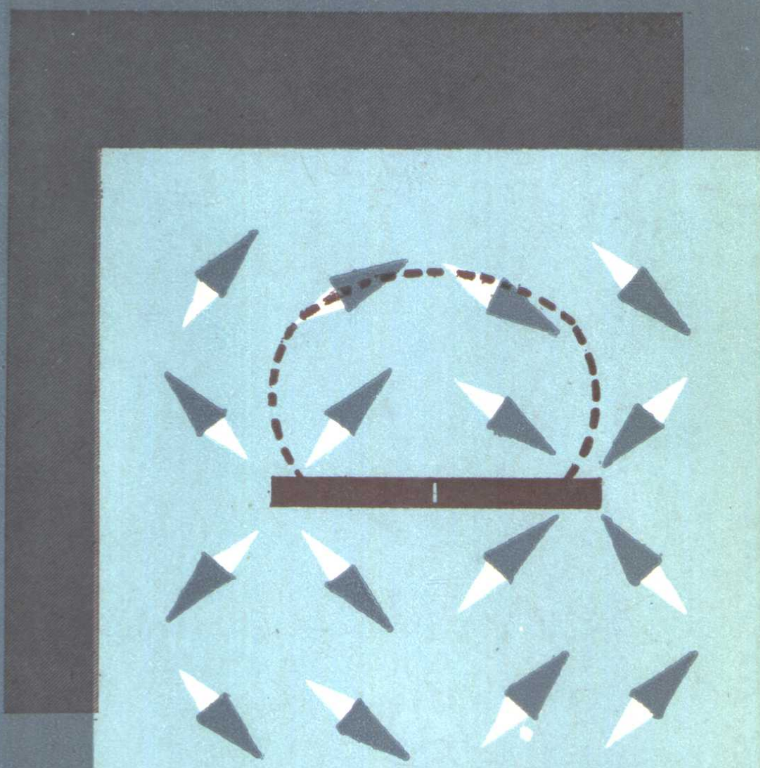
场论习题解答

金绩祖　杜翊清　编著

地质出版社



场论习题解答

金绩祖　杜翊清　编著

地质出版社

场论习题解答

金绩祖　杜翊清　编著

*

责任编辑：袁方　张怀素

地质出版社出版

（北京西四）

地质出版社印刷厂印刷

（北京海淀区学院路29号）

新华书店北京发行所发行・各地新华书店经售

*

开本：$850\times1168\ ^{1}/_{32}$　印张：$13\ ^{1}/_{8}$　字数：349,000

1985年8月北京第一版・1985年8月北京第一次印刷

印数：1—9,420册・定价：2.70元

统一书号：13038・新83

前　　言

本书编写目的，主要是给地质院校地球物理勘探专业的学生和有关生产单位的技术人员在学习《场论》课程时提供一份参考资料；亦可供开设《宏观电动力学》课程的其它工科院校的学生参考。书中包括薛琴访教授所著《场论》一书的习题在内，共选题267道，均系最基本的问题。由于时间仓促，多数习题只用了一种解法，书末附有解题法概述以弥补不足。

本书由西安地质学院金绩祖、成都地质学院杜翊清合编。新疆工学院张慧生同志审阅了大部分书稿并提供了部分习题解法，同时还提出了很宝贵的修改意见。西安地质学院物理教研室的同志们对本书的编写给予了很大的支持和帮助。西安地质学院物探系7801班王西文、张春龙等同学参加了书稿的核对和誊清工作。全稿由武汉地质学院北京研究生部蒋智、时瑞生、蒋玉立等同志认真审阅、订正。编者谨向以上同志表示衷心感谢。

限于水平，书中一定有不妥或错误之处，敬请读者批评指正。

编　者

目　录

第一章　矢量分析及有关数学运算

习　　题

1—1　利用算符∇的微分性和矢量性，证明下列等式：

(1) $\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})+(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}$

(2) $\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}-(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}+(\nabla\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}$

(3) $\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})-\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})$

(4) $\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\frac{1}{2}\nabla A^2-(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}$

1—2　证明下列等式：

(1) $\nabla\cdot\nabla\times\boldsymbol{A}=0$

(2) $\nabla\times\nabla\varphi=0$

(3) $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}$

1—3　证明下列等式：

(1) $\nabla(uv)=u\nabla v+v\nabla u$

(2) $\nabla\cdot(u\boldsymbol{A})=u\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\nabla u\cdot\boldsymbol{A}$

(3) $\nabla\times(u\boldsymbol{A})=\nabla u\times\boldsymbol{A}+u\nabla\times\boldsymbol{A}$

(4) $\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\nabla u)=\nabla u\cdot\nabla\times\boldsymbol{A}$

1—4　证明下列等式：

(1) $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{D})-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})$

(2) $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})=[\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{D})]\boldsymbol{C}-[\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})]\boldsymbol{D}$

1—5　设$\boldsymbol{a},\boldsymbol{k},\boldsymbol{E}_0$均为常矢量，试求：

(1) $\nabla\cdot\boldsymbol{r}$　(2) $\nabla\times\boldsymbol{r}$　(3) $(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{r}$　(4) $\nabla\cdot[\boldsymbol{E}_0\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})]$
(5) $\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})$　(6) $\nabla\times[\boldsymbol{E}_0\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})]$

式中 r 为源点$Q(x',y',z')$ 到场点$P(x,y,z)$的距离，$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{QP}$。

1—6 证明下列等式:

(1) $(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})$

(2) $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot(\nabla\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{C}-\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{C}$

(3) $(\boldsymbol{A}\times\nabla)\times\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})-\boldsymbol{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{B})$

1—7 设 u 是坐标 x,y,z 的函数，证明:

(1) $\nabla f(u)=\dfrac{df}{du}\nabla u$

(2) $\nabla\cdot\boldsymbol{A}(u)=\nabla u\cdot\dfrac{d\boldsymbol{A}}{du}$

(3) $\nabla\times\boldsymbol{A}(u)=\nabla u\times\dfrac{d\boldsymbol{A}}{du}$

1—8 设 $r=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$为源点$Q(x',y',z')$ 到场点 $P(x,y,z)$ 的距离，r 的方向规定为从源点指向场点。证明下列结果，并体会对源变数求微商 $\left(\nabla'=\dfrac{\partial}{\partial x'}\boldsymbol{i}+\dfrac{\partial}{\partial y'}\boldsymbol{j}+\dfrac{\partial}{\partial z'}\boldsymbol{k}\right)$ 与对场变数求微商$\left(\nabla=\dfrac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\dfrac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\dfrac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)$的关系:

(1) $\nabla r=-\nabla' r=\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$

(2) $\nabla\dfrac{1}{r}=-\nabla'\dfrac{1}{r}=-\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}$

(3) $\nabla\times\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}=0$

(4) $\nabla\cdot\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}=-\nabla'\cdot\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}=0 \qquad (r\neq0)$

1—9 若$\boldsymbol{m}$是常矢量，证明除$r=0$点以外，矢量$\boldsymbol{A}=\dfrac{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{r}}{r^3}$

的旋度等于标量 $\varphi=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}$的梯度的负值，即

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=-\nabla\varphi \qquad (r\neq 0)$$

式中 $\boldsymbol{r}$ 为坐标原点到场点的距离，方向由原点指向场点。

1—10 证明在柱坐标系中，$\nabla^2\boldsymbol{F}$ 的分量为

$$(\nabla^2\boldsymbol{F})_r=\nabla^2F_r-\frac{F_r}{r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial F_\theta}{\partial\theta}$$

$$(\nabla^2\boldsymbol{F})_\theta=\nabla^2F_\theta-\frac{F_\theta}{r^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial F_r}{\partial\theta}$$

$$(\nabla^2\boldsymbol{F})_z=\nabla^2F_z$$

式中 $\nabla^2=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$。

1—11 证明在球坐标系中，$\nabla^2\boldsymbol{F}$ 的分量为

$$(\nabla^2\boldsymbol{F})_r=\nabla^2F_r-\frac{2}{r^2}F_r-\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(F_\theta\sin\theta)-\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi}$$

$$(\nabla^2\boldsymbol{F})_\theta=\nabla^2F_\theta-\frac{1}{r^2\sin^2\theta}F_\theta+\frac{2}{r^2}\frac{\partial F_r}{\partial\theta}-\frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi}$$

$$(\nabla^2\boldsymbol{F})_\varphi=\nabla^2F_\varphi-\frac{1}{r^2\sin^2\theta}F_\varphi+\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial F_r}{\partial\varphi}+\frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial F_\theta}{\partial\varphi}$$

式中 $\nabla^2=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$

1—12 如图所示，$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{\xi}$。设 $|\boldsymbol{\xi}|\ll|\boldsymbol{r}_0|$，试将函数 $f(\boldsymbol{r})$ 在 $\boldsymbol{r}_0$ 作台劳展开。

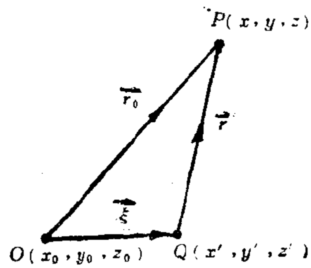


图 1—12′

1—13 空间一点M，其柱面坐标为$M(r,\theta,z)$，球面坐标为$M(r,\theta,\varphi)$。试在这两种坐标系中分别写出矢径$\boldsymbol{R}=\overrightarrow{OM}$的表示式，并由此证明$\boldsymbol{R}$在这两种坐标系中的散

度等于3，而其旋度等于零。

1—14 证明下列积分关系：

(1) $\oiint d\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{F}=\iiint\nabla\times\boldsymbol{F}\,dv$

(2) $\oiint(\boldsymbol{A}\times\nabla\varphi)\cdot d\boldsymbol{s}=\iiint\nabla\varphi\cdot\nabla\times\boldsymbol{A}dv$

1—15 证明下列积分关系：

(1) $\oint\varphi dr=-\iint\left(\boldsymbol{r}\times\frac{\nabla\varphi}{\boldsymbol{r}}\right)\cdot d\boldsymbol{s}$

(2) $\oint\varphi d\boldsymbol{r}=\iint d\boldsymbol{s}\times\nabla\varphi$

1—16 证明：

$$\iiint\nabla\varphi dv=\oiint\varphi d\boldsymbol{s}$$

1—17 证明：

$$\oint\boldsymbol{r}\times d\boldsymbol{l}=2\iint d\boldsymbol{s}$$

1—18 证明下列积分关系：

(1) $\oiint\frac{\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{s}}{\boldsymbol{r}^2}=\iiint\frac{da}{\boldsymbol{r}^2}$

(2) $\iiint\nabla\cdot\boldsymbol{n}dv=s$

(3) $\iiint\nabla\times\boldsymbol{n}dv=0$

式中　$\boldsymbol{n}$为积分域表面法向的单位矢量，$\boldsymbol{s}$为积分域的表面积。

1—19 计算积分：

(1) $\oiint\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n})ds$

(2) $\oiint(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r})d\boldsymbol{s}$

式中　$\boldsymbol{A}$是常矢量，$\boldsymbol{n}$是曲面外法向的单位矢量。

1—20 证明：

(1) $\oiint\nabla^2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{n}}\;ds=\iiint[(\nabla^2\varphi)^2+(\nabla\varphi\cdot\nabla\nabla^2\varphi)]dv$

(2) $\oint \varphi d\psi = \iint (\nabla\varphi \times \nabla\psi) \cdot d\boldsymbol{s}$

1—21 试求在球面坐标系中两单位矢量 $\boldsymbol{n}_1$ 与 $\boldsymbol{n}_2$ 之间夹角的余弦。

1—22 试求当从笛卡儿坐标系转换为球坐标系以及相反转换时基矢间的变换矩阵。

1—23 试求当从笛卡儿坐标系转换为柱坐标系以及相反转换时基矢间的变换矩阵。

1—24 证明矢量场

$\boldsymbol{A} = (y\cos xy)\boldsymbol{i} + (x\cos xy)\boldsymbol{j} + \sin z\boldsymbol{k}$ 为有势场，并求势函数。

1—25 已知矢量场 $\boldsymbol{A}$ 在球面坐标系中各分量为

$$A_r = \frac{2k\cos\theta}{r^3},\quad A_\theta = \frac{k\sin\theta}{r^3},\quad A_\varphi = 0$$

其中 k 为常数。证明矢量场 $\boldsymbol{A}$ 有势，并求出势函数和矢量线方程。

1—26 证明上题的矢量场 $\boldsymbol{A}$ 为一无源场，并求出场 $\boldsymbol{A}$ 的矢势 $\boldsymbol{B}$。

1—27 证明若力 $\boldsymbol{F}$ 为恒指向某定点的有心力，且其大小仅与至该点的距离 r 有关，则此力场必有势，即 $\boldsymbol{F}$ 可表示为 $\boldsymbol{F} = -\nabla U$，$U$ 为势函数。

1—28 试证不论 l 为何种简单闭曲线，都有

$$\oint_l 2xzdx + 2yz^2dy + (x^2 + 2y^2z - 1)dz = 0$$

1—29 试求全微分

$dU = (x^2 - 2yz)dx + (y^2 - 2xz)dy + (z^2 - 2xy)dz$ 的原函数。

1—30 证明 $\boldsymbol{B} = u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j} + w\boldsymbol{k}$ 为无源场 $\boldsymbol{A} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$ 的矢势，其中

$$u = \int_{z_0}^{z} Q(x,y,z)dz - \int_{y_0}^{y} R(x,y,z)dy$$

$$v = -\int_{z_0}^{z} P(x,y,z)dz$$

$$w=C \qquad (C\text{为任意常数})$$

并用此公式，求矢量场$\boldsymbol{A}=y^2\boldsymbol{i}+z^2\boldsymbol{j}+x^2\boldsymbol{k}$的矢势$\boldsymbol{B}$。

1—31 证明矢量场$\boldsymbol{A}=-2y\boldsymbol{i}-2x\boldsymbol{j}$为平面调和场，并求出场的力函数和势函数。

1—32 已知平面调和场的力函数

$$V=x^2-y^2+xy$$

求场的势函数U及场矢量。

1—33 试由高斯定理导出格林公式。

1—34 证明平面上的格林公式为

$$\iint_D (V\nabla^2U-U\nabla^2V)\,d\sigma=\oint_c\left(V\frac{\partial U}{\partial n}-U\frac{\partial V}{\partial n}\right)dl$$

其中C为区域D的边界闭曲线。

1—35 试求拉普拉斯方程具有球对称和柱对称的特解，并说明其物理意义。

1—36 证明：

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ikx}\,dk=\delta(x)$$

1—37 证明：

$$\lim_{\alpha\to\infty}\frac{\sin\alpha x}{\pi x}=\delta(x)$$

1—38 证明：

$$\nabla^2\frac{1}{r}=-4\pi\delta(\boldsymbol{r})$$

1—39 证明：

(1) $\delta(-x)=\delta(x)$ (2) $x\delta(x)=0$

1—40 证明：

(1) $\delta(ax)=\dfrac{1}{|a|}\delta(x)$

(2) $\delta(x^2-a^2)=\dfrac{1}{|2a|}[\delta(x-a)+\delta(x+a)]$

1—41 证明：

$$(1)\ \int_a^b f(x)\delta'(x-x_0)\,dx=\begin{cases}-\left.\dfrac{df}{dx}\right|_{x=x_0} & (a<x_0<b)\\ 0 & (x_0<a,\ x_0>b)\end{cases}$$

$$(2)\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\delta[f(x)-\alpha]dx=g(x)\left.\frac{1}{f'(x)}\right|_{f(x)=\alpha}$$

1—42 绘出函数$\dfrac{d\delta(x)}{dx}$的图形，说明$\rho=-(\boldsymbol{p}\cdot\nabla)\ \delta(\boldsymbol{r})$是一个位于原点的偶极子的电荷密度。

1—43 试证明一矢量场由其散度、旋度和边值法向分量唯一确定。

1—44 试证明一矢量场由其散度、旋度和边值切向分量唯一确定。

1—45 定义：若矢量场$\boldsymbol{F}$满足$\nabla\times\boldsymbol{F}=0$，称$\boldsymbol{F}$为纵场；若$\boldsymbol{F}$满足$\nabla\cdot\boldsymbol{F}=0$，则称$\boldsymbol{F}$为横场。试证明任一矢量场可表示为纵场与横场的矢量和。

1—46 试证明上题表示法的唯一性。

1—47 试证明$\boldsymbol{A}=\nabla\varphi$的必要且充分条件是

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=0$$

1—48 设区域V内，矢量$\boldsymbol{A}$满足条件$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$，在$V$的边界面$S$上满足条件$A_n=0$，试证明

$$\iiint\boldsymbol{A}dV=0$$

1—49 设在区域D内及其边界S上，矢量$\boldsymbol{A}$满足

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\alpha,\qquad \text{在}D\text{内}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\beta},\qquad \text{在}D\text{内}$$

$$A_n|_s=f(M)$$

求方程组有解时α、β、$f(M)$应满足的关系式。

1—50 试求上题所给条件下的矢量$\boldsymbol{A}$。

1—51 下面的积分称做韦伯-李普希兹积分

$$(1)\ \int_0^\infty e^{-mz}\ J_0\ (mr)dm=\frac{1}{\sqrt{z^2+r^2}},\quad (z>0)$$

(2) $\int_0^{\infty} e^{-mz} \quad J_1(mr)dm=\frac{1}{r}\left(1-\frac{z}{\sqrt{z^2+r^2}}\right)$

(3) $\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} K_0(mr)\cos(mz)dm=\frac{1}{\sqrt{z^2+r^2}}$

试用$J_0(mr)$ 的级数表达式，直接证明韦伯-李普希兹积分（1）。

1—52 证明$y=J_n(\alpha x)$为方程

$$x^2y''+xy'+(\alpha^2x^2-n^2)y=0$$

的解。

1—53 设$\lambda_k(k=1,2,3,\cdots)$是方程$J_1(x)=0$的正根，试将函数$f(x)=x,(0<x<1)$ 展开成贝塞尔函数$J_1(\lambda_k x)$的级数。

1—54 证明：若$P(x)$、$Q(x)$ 是贝塞尔方程

$$x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0$$

的两个解，则

$$P(x)\ Q'(x)-P'(x)Q(x)=\frac{C}{x}$$

其中C是常数。

1—55 证明：

$$K(x)\ I_0(x)+K_0(x)\ I_1(x)=\frac{1}{x}$$

1—56 证明：

$$\int x^nJ_0(x)dx=x^nJ_1(x)+(n-1)x^{n-1}J_0\ (x)$$
$$-(n-1)^2\int x^{n-2}J_0\ (x)dx$$

1—57 证明

$P_n(1)=1,\quad P_n(-1)=(-1)^n,$

$P_{2k-1}(0)=0,\quad P_{2k}(0)=\frac{(-1)^k(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}$

1—58 证明

$$\int_0^1 P_n(x)dx=\frac{1}{2n+1}[P_{n+1}(x)-P_{n-1}(x)]\Big|_0^1$$

1—59 若$f(x)=\begin{cases}0 & -1<x\leqslant 0\\ x & 0<x<1\end{cases}$

证明 $f(x)=\frac{1}{4}P_0(x)+\frac{1}{2}P_1(x)+\frac{5}{16}P_2(x)-\frac{3}{32}P_4(x)+\cdots$

1—60 试将$\frac{1}{R}$按球函数展开，即

$$\frac{1}{R}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r_0^n}{r^{n+1}}P_n(\cos\theta),\quad r>r_0$$

$$\frac{1}{R}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^n}{r_0{}^{n+1}}P_n(\cos\theta),\quad r<r_0$$

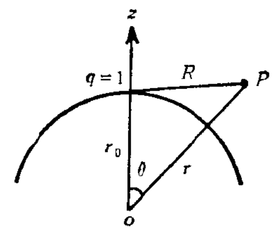


图 1—60

解 答

1—1 证：(1)
$$\begin{aligned}\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})&=\nabla_A(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})+\nabla_B(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\\&=\nabla_A(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A})+\nabla_B(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\\&=\boldsymbol{B}\times(\nabla_A\times\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{B}\cdot\nabla_A)\boldsymbol{A}\\&\quad+\boldsymbol{A}\times(\nabla_B\times\boldsymbol{B})+(\boldsymbol{A}\cdot\nabla_B)\boldsymbol{B}\\&=\boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}\\&\quad+\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})+(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}\end{aligned}$$

式中∇_A是对A运算的微分算符。

(2)
$$\begin{aligned}\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}&=\nabla_B\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})+\nabla_A\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\\&=\nabla_B\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})-\nabla_A\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A})\\&=\boldsymbol{A}(\nabla_B\cdot\boldsymbol{B})-(\boldsymbol{A}\cdot\nabla_B)\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}(\nabla_A\cdot\boldsymbol{A})\\&\quad+(\boldsymbol{B}\cdot\nabla_A)\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}-(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}\\&\quad-(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}+(\nabla\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})&=\nabla_A\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})+\nabla_B\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\nabla_A)\\&\quad+\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\nabla_B)\\&=\boldsymbol{B}\cdot(\nabla_A\times\boldsymbol{A})+\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\nabla_B)=\boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})\\&\quad-\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})\end{aligned}$$

(4) 由(1) 令$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$，则

$$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})=\nabla A^2=2\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})+2(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}$$

所以 $$\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\frac{1}{2}\nabla A^2-(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}$$

1—2 证：(1) $\nabla\cdot\nabla\times\boldsymbol{A}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)$

$$\cdot\left[\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left[\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\right]\right.$$

$$=\frac{\partial^2 A_z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 A_y}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 A_z}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 A_x}{\partial z\partial y}=0$$

(2) $\nabla\times\nabla\varphi=\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\right]\boldsymbol{i}$

$$+\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\right]\boldsymbol{j}+\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\right]\boldsymbol{k}=0$$

(3) $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\right]\boldsymbol{i}$

$$+\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\right]\boldsymbol{j}$$

$$+\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\right]\boldsymbol{k}$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)$$

$$-\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)A_x\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)A_y\boldsymbol{j}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)A_z\boldsymbol{k}\right]=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}$$

1—3 证：(1) $\nabla(uv)=\frac{\partial(uv)}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial(uv)}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial(uv)}{\partial z}\boldsymbol{k}$

$$=\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial x}\right)\boldsymbol{i}+\left(u\frac{\partial v}{\partial y}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\boldsymbol{j}$$

$$+\left(u\frac{\partial v}{\partial z}+v\frac{\partial u}{\partial z}\right)\boldsymbol{k}$$

$$=u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial v}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial v}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)+v\left(\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}\right.$$

$$\left.+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)$$

$$=u\nabla v+v\nabla u$$

(2) $$\nabla\cdot(u\boldsymbol{A})=\frac{\partial}{\partial x}(uAx)+\frac{\partial}{\partial y}(uA_y)+\frac{\partial}{\partial z}(uA_z)$$

$$=u\frac{\partial A_x}{\partial x}+A_x\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial A_y}{\partial y}+A_y\frac{\partial u}{\partial y}+u\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$+A_z\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$=u\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)+(A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k})$$

$$\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)$$

$$=u\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\nabla u\cdot\boldsymbol{A}$$

(3) $$\nabla\times(u\boldsymbol{A})=\left[\frac{\partial}{\partial y}(uA_z)-\frac{\partial}{\partial z}(uA_y)\right]\boldsymbol{i}+\left[\frac{\partial}{\partial z}(uA_x)\right.$$

$$\left.-\frac{\partial}{\partial x}(uA_z)\right]\boldsymbol{j}+\left[\frac{\partial}{\partial x}(uA_y)-\frac{\partial}{\partial y}(uA_x)\right]\boldsymbol{k}$$

$$=u\left[\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\right]+\left(A_z\frac{\partial u}{\partial y}-A_y\frac{\partial u}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}$$

$$+\left(A_x\frac{\partial u}{\partial z}-A_z\frac{\partial u}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(A_y\frac{\partial u}{\partial x}-A_x\frac{\partial u}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

$$=u\nabla\times\boldsymbol{A}+\nabla u\times\boldsymbol{A}$$

(4) $\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\nabla u)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)$

$$\cdot\left[\left(A_y\frac{\partial u}{\partial z}-A_z\frac{\partial u}{\partial y}\right)\boldsymbol{i}+\left(A_z\frac{\partial u}{\partial x}-A_x\frac{\partial u}{\partial z}\right)\boldsymbol{j}+\left(A_x\frac{\partial u}{\partial y}-A_y\frac{\partial u}{\partial x}\right)\boldsymbol{k}\right]$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(A_y\frac{\partial u}{\partial z}-A_z\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(A_z\frac{\partial u}{\partial x}-A_x\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(A_x\frac{\partial u}{\partial y}-A_y\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\frac{\partial u}{\partial z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

$$=\nabla u\cdot\nabla\times\boldsymbol{A}$$

1—4 证：(1) $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})=(A_yB_z-A_zB_y)(C_yD_z-C_zD_y)+(A_zB_x-A_xB_z)(C_zD_x-C_xD_z)+(A_xB_y-A_yB_x)(C_xD_y-C_yD_x)$

$$=(A_xC_x+A_yC_y+A_zC_z)(B_xD_x+B_yD_y+B_zD_z)-(A_xD_x+A_yD_y+A_zD_z)(B_xC_x+B_yC_y+B_zD_z)$$

$$=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{D})-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})$$

(2) $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})=\boldsymbol{C}[(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{D}]-\boldsymbol{D}[(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}]$

$$=\boldsymbol{C}[\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{D})]-\boldsymbol{D}[\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})]$$

1—5 解：(1) $\nabla\cdot\boldsymbol{r}=\frac{\partial}{\partial x}(x-x')+\frac{\partial}{\partial y}(y-y')+\frac{\partial}{\partial z}(z-z')=3$

(2) $\nabla\times\boldsymbol{r}=\left[\frac{\partial}{\partial y}(z-z')-\frac{\partial}{\partial z}(y-y')\right]\boldsymbol{i}+\left[\frac{\partial}{\partial z}(x-x')-\frac{\partial}{\partial x}(z-z')\right]\boldsymbol{j}+\left[\frac{\partial}{\partial x}(y-y')-\frac{\partial}{\partial y}(x-x')\right]\boldsymbol{k}=0$