

996449

分形几何理论与应用

文志英 范爱华 文志雄 苏维宜
杨展如 王 炜 王 牧 顾其钧



应用数学丛书
浙江科学技术出版社

Fractal Geometry Theory and Its Applications

Wen Zhiying Fan Aihua Wen Zhixiong Su Weiyi
Yang Zhanru Wang Wei Wang Mu Gu Qijun



The Series of Applied Mathematics

Zhejiang Science & Technology Publishing House

内容简介

分形几何是应用数学的一个重要组成部分,在数学、物理、化学、生物、医学、地质、材料、工程技术等学科中得到广泛的应用.近年来,对分形几何的研究发展很快,在一些前沿课题上取得了较大的进展.

本书介绍分形几何的基本理论及重要应用,包括分形几何中最基本的数学概念——分形集的各种维数、几种重要的分形集的维数计算、测度的局部分析、分形几何研究的若干近期进展、结合 1 维准周期链的分形结构、分形空间.同时,还介绍了分形几何在物理学、图像处理方面的应用——分形晶格上自旋系统的相变、临界点附近的非平衡统计力学、表面和界面生长动力学、图像压缩等.

本书适合数学、物理等有关专业人员,以及高等院校有关专业教师、学生科研和学习参考.

ABSTRACT

The fractal geometry is an important branch of applied mathematics. It has important applications in mathematics, physics, chemistry, biology, medicine, geology, material science and engineering etc. It is one of the most active fields in science. In China it has made on some important progress subjects in recent years.

This book introduce to fundametal theories and important applications of fractal geometry, including the basic concepts in fractal geometry, such as various dimensions of fractal sets, evaluations of dimensions, local analysis of measures, fractal spaces, fractal structure and new developments of fractal geometry. Moreover, such as phase transitions of spin system on fractal lattice, nonequilibrium statistical dynamics near the critical point, surface and interface growth dynamics and compress of image etc. about physics applications and image process.

This book has been written for related teachers and students in mathematics, physics and other science fields.

“应用数学丛书”编委会

名誉主编

苏步青 吴文俊

主 编

谷超豪

编委(按姓氏笔画)

王兴华

叶其孝

叶彦谦

史树中

刘鼎元

孙和生

李大潜

李训经

李翊神

吴 方

吴立德

张尧庭

林 群

俞文魮

郭仲衡

郭竹瑞

萧树铁

游兆泳

管梅谷

Editorial Committee of
The Series of Applied Mathematics

Honor Editor in Chief

Su Buqing Wu Wenjun

Editor in Chief

Gu Chaohao

Editorial Committee

Wang Xinghua	Ye Qixiao
Ye Yanqian	Shi Shuzhong
Liu Dingyuan	Sun Hesheng
Li Daqian	Li Xunjing
Li Yishen	Wu Fang
Wu Lide	Zhang Yaoting
Lin Qun	Yu Wenci
Guo Zhongheng	Guo Zhurui
Xiao Shutie	You Zhaoyong
Guan Meigu	

出版说明

在近代科技发展中,应用数学在国民经济和科学研究的各个领域的作用和地位显得日益重要,世界上许多发达国家对它非常重视,投入了大量的资金和研究力量.我国在这方面的研究工作也已有了一定的规模和成果.我们为了推进和交流应用数学的成果,在苏步青教授、吴文俊教授的关怀下,由谷超豪教授为主编,组织出版这套“应用数学丛书”.

本丛书的出版,得到了数学界的重视.陈省身教授、杨振宁教授对此给予热情的鼓励和支持.国家自然科学基金委员会对丛书的出版非常重视.

为了反映应用数学在各主要分支的现代水平,特别是我国数学家的研究成果,以及国外的最新进展,向读者介绍应用数学的理论和各种方法、数学模型,丛书近期将在数学物理、经济数学、组合设计、控制理论、通信理论、信息与计算机、应用统计、生物数学、几何造型、分形几何等应用分支出版一些内容新颖的专著.

我们希望“丛书”的出版,能为中国数学赶超世界水平作出一点贡献.

序 言

各种物体都占有一定的空间位置,所以人类从远古开始,就有了几何学的知识,古希腊时代,对于许多常见的图形,如直线、圆、球面、圆柱、圆锥、椭圆、多面体……等,已经有了清楚的认识.到了近代,又有解析几何和微分几何,它们研究各种更复杂的、但基本上是光滑的曲线和曲面,适应了力学、天文学、物理学和工程科学的需要.

但是,现实世界的物体是多种多样的,它们占有空间的方式也是十分复杂的,就曲线而论,除了光滑的曲线之外,在数学中早已注意到了“连续曲线”的概念.它们是作为区间到平面的连续映射而定义的,可以具有非常复杂的性质.19世纪,K. Weierstrass 设计了处处无切线的连续曲线,G. Peano 又设计出可以覆盖正方形的曲线.在当时,并没有预见到这些图形有实际意义,但它们能使人们理解到连续和光滑两个概念的本质差别,连续映射和拓扑映照(双方连续映照)的本质区别,对于纯粹数学的发展,有着重要的推动作用.

本世纪 80 年代初,情况发生了很大的变化,B. B. Mandelbrot 提出了“分形几何”的概念.他指出,海岸线等多种几何图形是不能用光滑曲线来描述的,但用一种维数大于 1 而小于 2 的“连续曲线”便可以刻画其特性.这种例子还可以举出很多,比如说雪花的表面、溶液中溶质的沉积、物体的粗糙的表面等,都需要用非光滑而连续的曲面来描述,它们的维数大于 2,小于 3.这种研究,使得分形几何成为数学的一个分支,而且在物理学、化学、生命科学等方面有相当多的应用,成

为前沿科学——非线性科学的一个组成部分。

分形几何的出现,为数学家和物理学家提供了广阔的用武之地.分形图形没有光滑性,结构多样而复杂,需要用现代数学的许多重要手段去处理,面临着许多待解决的问题的挑战.就物理科学而言,分形几何学提供了新的工具,然而,为了真正派上用处,取得有重要意义的实质性成果,也并非易事.

这本书是适应分形几何学的兴起和发展而写的,读者对象是具有一定的数学和物理基础的研究生、高年级学生和科研、教学工作者.这是一本写法严谨的学术著作,用严格的数学语言叙述了分形的数学基础和问题,又叙述了分形在物理学的两个方面以及在图像压缩等方面的应用.这又是一本教学读物,其内容已在一个“分形数学、分形物理的理论及应用”的讲习班上讲授过.本书的几作者都是这方面很有造诣的专家,有过深入的研究成果.这本书的出版会给这一领域的科研和教学带来相当的益处.

大数学家 B. Riemann 在上一世纪曾经预言过,在很大尺度或很小尺度下,人们所遇到的几何学可能与普通的欧几里德几何有很大的不同.在大尺度方面, Einstein 的引力理论提供了弯曲的时空模型.在小尺度时,情况会如何?分形几何学是否会部分地满足这个需要?我们拭目以待.

谷超豪

1998年11月

前 言

分形几何是研究自然科学的各个领域中出现的大量不规则几何形体的新兴学科,它在数学、物理、化学、生物、地质、材料、工程技术等学科中得到广泛的应用.自 80 年代中期以来,分形几何的理论研究和应用迅速发展,优秀成果不断出现.然而,与其他学科相比较,分形几何却非常年轻,理论基础还很不成熟.本书的目的是介绍分形几何的一些重要概念和最新研究成果.

本书是在国家攀登计划——“非线性科学”项目举办的“分形数学、分形物理的理论及应用”讲习班讲稿的基础上,对主要内容进行修改、补充、完善而写成的.全书共分 7 章.第一章介绍了几种重要的维数的严格定义,并阐述了分形几何中若干重要问题,使读者对几种常见的维数和分形几何有准确的认识.第二章给出测度的局部分析,对测度的维数理论、符号空间上的 Gibbs 测度、重分形等作了详尽的介绍.第三章对结合 1 维准周期链的分形结构进行分析,包括自相似序列的原子表面、Fourier 变换谱的重分形分析,对非周期势的离散 Schrödinger 方程也做了介绍.第四章是分形空间,以一个不同于欧氏空间的局部紧群为底空间,引出了分形空间的性质及其中的变换,然后介绍此空间上的新型导数——Gibbs - Butzer 导数.第五章是分形物理学简介,包括分形晶格上自旋系统的相变、临界点附近的非平衡统计力学.第六章继续介绍分形物理,包括表面和界面生长动力学及分形生长实验研究的最新成果.第七章是图像分形基编码与压缩技术,介绍数字

图像表示、图像分形基编码、图像分形基编码实用技术、最新应用软件等。

本书的特点是：既有严格的数学思路，又有实际的物理背景；既有数学理论，又有实际应用；既有常见定理，又有最新成果。它是数学家和物理学家合作的结晶。

本书第一章由文志英撰写，第二章由范爱华撰写，第三章由文志雄撰写，第四章由苏维宜撰写，第五章由杨展如撰写，第六章由王炜和王牧撰写，第七章由顾其钧撰写。全书由苏维宜通稿。

作者感谢谷超豪院士和“非线性科学”专家组全体成员对本书的关心和支持。

由于水平有限，写作时间也较匆忙，错误在所难免，望各位专家和读者不吝赐教。

作 者

1998年1月

目 录

第一章 分形几何概论	1
1.1 维数的基本概念	1
1.1.1 Koch 曲线	2
1.1.2 Koch 曲线的特性及推广	3
1.1.3 维数	6
1.2 分形几何中的若干重要问题	17
1.2.1 自仿集的维数估计	17
1.2.2 2 阶密度	21
1.2.3 分形曲线	23
1.2.4 自相似测度的 Fourier 分析	27
1.2.5 分形的 Lipschitz 等价	28
1.2.6 具有变尺度结构的分形集	30
1.2.7 临界集的分形结构	31
参考文献	31
第二章 测度的局部分析	35
2.1 预备知识	36
2.1.1 矩阵论的两个定理	36
2.1.2 Hausdorff 维数	39
2.1.3 Legendre 变换	41
2.1.4 熵	44
2.2 测度的维数理论	52
2.2.1 度量空间上的位势	53
2.2.2 测度的维数	62
2.3 符号空间上的 Gibbs 测度	69

2.3.1 Parry-Markov-Gibbs 测度	70
2.3.2 Gibbs 测度	74
2.4 重分形	82
2.4.1 问题的提出及其形式解	83
2.4.2 \mathbb{R}^d 上自相似测度	85
参考文献	95
第三章 结合 1 维准周期链的分形结构	100
3.1 引论	100
3.1.1 代换及代换序列	101
3.1.2 截割投影方法	103
3.1.3 具有自相似结构的系统的分类性质	104
3.2 自相似序列的原子表面	106
3.2.1 序列的空间表示	106
3.2.2 与截割投影方法的联系	107
3.2.3 原子表面的分形结构	109
3.2.4 多元代换链	111
3.3 Fourier 变换谱的重分形分析	114
3.3.1 重分形分析的一般形式	114
3.3.2 Fourier 变换及灰度测度	116
3.3.3 几类典型序列的结果	120
3.4 非周期势的离散 Schödinger 方程	126
3.4.1 1 维离散 Schödinger 方程的初步知识	126
3.4.2 Schödinger 算子的谱测度	130
3.4.3 结合代换的迹映射	133
3.4.4 若干结果	137
参考文献	138
第四章 分形空间	141
4.1 预备知识	141
4.1.1 局部紧群与局部域	142
4.1.2 初等拓扑的预备知识	145
4.2 分形空间的性质及其中的变换	146
4.2.1 分形空间	146

4.2.2	基本空间中的变换	148
4.2.3	空间 $(\mathcal{X}(X), h)$ 中的压缩映射	155
4.3	Gibbs-Butzer 导数	158
4.3.1	局部域上的 Gibbs-Butzer 导数	158
4.3.2	具有分形边界的 G-B 微分方程	160
4.4	代码空间与迭代函数系 IFS	161
4.4.1	代码空间 (Σ, d_c)	161
4.4.2	IFS 吸引子的表示法	162
4.4.3	IFS 吸引子的维数及算法	164
4.5	分形空间中的分形维数	166
4.5.1	局部域上的 Hausdorff 维数	166
4.5.2	局部域上的其他维数	168
	参考文献	168
第五章 分形物理学简介		170
5.1	分形晶格上自旋系统的相变	171
5.1.1	相变与临界现象的基本知识	171
5.1.2	重整化群理论及方法	173
5.1.3	Sierpinski Gasket 上 Ising 模型的相变	183
5.1.4	Sierpinski Carpets 上 Ising 模型的相变	186
5.1.5	分形上 Ising 模型的严格配分函数和关联函数	190
5.2	临界点附近的非平衡统计力学	194
5.2.1	临界动力学的基本概念	194
5.2.2	TDRG 方法	194
5.2.3	TDRG 应用于 1 维动力 Ising 模型	198
5.2.4	无分支 Koch 曲线的临界动力学	203
5.2.5	分支 Koch 曲线上动力 Ising 模型的临界动力学	206
5.2.6	1 维平移对称晶格上动力 Ising 模型的严格解	209
	参考文献	212
第六章 分形动力学及物理实验		214
6.1	表面和界面生长动力学	214
6.1.1	引言	214

6.1.2	自仿射分形	215
6.2	表面生长模型	220
6.2.1	无规沉积模型	220
6.2.2	直线沉积	221
6.2.3	限制的固体-固体模型	222
6.2.4	其他模型	222
6.3	表面生长的动力学标度	223
6.3.1	表面粗化指数	223
6.3.2	动力学标度	224
6.4	Langevin 方程	226
6.4.1	EW 方程	226
6.4.2	KPZ 方程	227
6.5	分形生长现象的实验研究	228
6.5.1	引言	228
6.5.2	生长形态的计算机模拟	229
6.5.3	晶体生长中分形的实验观测	232
6.5.4	生长机制和形态的时空演变	237
	参考文献	241

第七章 图像分形基编码与压缩技术 245

7.1	数字图像表示	245
7.2	图像分形基编码	247
7.2.1	图像分形基础码思想	247
7.2.2	图像分形基编码方法	247
7.2.3	图像分形压缩的理论基础	249
7.3	图像分形基编码实用技术	250
7.3.1	编码值的快速确定	250
7.3.2	皮亚诺扫描法的使用	250
7.4	软件简介	252
7.5	分形的计算机生成	253
7.5.1	分形的计算机生成动态图形演示	253
7.5.2	分形生成的典型方法:L系统与IFS方法	254
7.5.3	数与形的表示	255
	参考文献	255

CONTENTS

Chapter 1 Introduction of Fractal Geometry	1
1.1 Basic Concept of Dimensions	1
1.1.1 Koch Curves	2
1.1.2 Properties and Generalizations of Koch Curves	3
1.1.3 Dimensions	6
1.2 Some Important Problems in Fractal Geometry	17
1.2.1 Estimation of Dimensions for Self - Affine Sets	17
1.2.2 Density of Order Two	21
1.2.3 Fractal Curves	23
1.2.4 Fourier Analysis of Self - Similar Measure	27
1.2.5 Lipschitz Equivalence of Fractals	28
1.2.6 Fractal Sets with Variable Measure Structure	30
1.2.7 Fractal Structure of Critical Sets	31
References	31
Chapter 2 Local Analysis of Measures	35
2.1 Preliminary	36
2.1.1 Two Theorems of Matrix Theory	36
2.1.2 Hausdorff Dimension	39
2.1.3 Legendre Transformations	41
2.1.4 Entropy	44

2.2	Dimensions Theory Dimensions of Measures	52
2.2.1	Potential on Metric Spaces	53
2.2.2	Dimensions of Measure	62
2.3	Gibbs Measures on sign Spaces	69
2.3.1	Parry – Markov – Gibbs Measure	70
2.3.2	Gibbs Measure	74
2.4	Multifractal	82
2.4.1	Problems and Formal Solutions	83
2.4.2	Self – Similar Measures on \mathbf{R}^d	85
	References	95

Chapter 3 The Fractal Structures of Associative one

	Dime nsion Pre Periodic Link	100
3.1	Introduction	100
3.1.1	Substitues and Sequence of Substiutes	101
3.1.2	Methods of Cut Projective	103
3.1.3	Classified Properties of the Systems with Self – Similar Structrue	104
3.2	Atomic Surfaces of Self – Similar Sequences	106
3.2.1	Space Representations of Sequence	106
3.2.2	Connection with the Methods of Cut Projective	107
3.2.3	Fractal Structures of Atom Surfaces	109
3.2.4	Multivariate Substitute Chains	111
3.3	Multifractal Analysis of Spectums of Fourier Transforms	114
3.3.1	General Forms of Multifractal Analysis	114
3.3.2	Fourier Transforms and Grey Measure	116
3.3.3	Results of some Typical Sequences	120
3.4	Discrete Schödinger Equations with Non – Periodic Potential	126