

建筑结构设计手册

第一篇

数学 力学 荷载

建筑工程部設計局組織編写

中国工业出版社

建筑结构设计手册

第一篇

数学 力学 荷载

建筑工程部设计局组织编写

中国工业出版社

建筑工程部設計局組織編写的一套“建筑結構設計手冊”，包括：数学力学荷載、鋼結構設計、鋼筋混凝土結構設計、裝配式鋼筋混凝土单层厂房設計、木結構設計、磚石結構設計和特种結構設計等七篇，將陸續分册出版。

本篇列有建筑結構設計中常用的有关数学、力学和荷載的基本数据、計算法式及图表，共分：数学、度量衡单位及換算、荷載和超載系数、力学和剛架分析等五章。

本手冊可供建筑結構設計工作人員以及土建类大专院校师生参考使用。

建筑結構設計手冊

第一篇

数学 力学 荷載

建筑工程部設計局組織編写

*

建筑工程部編輯部編輯（北京西郊百万庄）

中国工业出版社出版（北京佟麟閣路丙10号）

（北京市书刊出版事业許可証出字第110号）

中国工业出版社第一印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店經售

*

开本787×1092 $\frac{1}{16}$ ·印張20·字数445,000

1963年11月北京第一版·1963年11月北京第一次印刷

印数0001—8,720·定价（10-7）2.75元

*

統一书号：15165·2013（建工·271）

前 言

建国十三年来，特别是大跃进以来，我国建成的各类工程是很多的，在设计工作中积累的經驗也是丰富的。为了总结这些經驗，不断提高设计技术水平，并且給广大的设计人員提供一套完整的结构设计参考資料，我們把建筑结构设计方面的基本原理、計算方法、实际經驗、以及有关的技术資料，加以系統整理，編成手册，供建筑结构设计人員和有关大专院校师生参考使用。

这一套手册，包括数学力学荷載、鋼结构设计、钢筋混凝土结构设计、装配式钢筋混凝土单层厂房设计、木结构设计、砖石结构设计和特种结构设计等七篇，各篇将陸續分册出版。

这一套手册的編写和审查工作是由許多设计单位共同进行的。参加这项工作的有建筑工程部北京工业建筑设计院、华东工业建筑设计院、西北工业建筑设计院、东北工业建筑设计院、中南工业建筑设计院、建筑机械金属结构研究设计院、天津城市煤气工程设计院、給水排水设计院、水泥玻璃工业设计院、非金属矿山研究设计院，还有吉林省建筑设计院、上海市民用建筑设计院、武汉市工业民用建筑设计院、广州市城市建筑设计院等单位。特种结构设计篇的編写，还承粮食部科学研究设计院大力协助。在編写和审查工作中，清华大学、同济大学和建筑工程部建筑科学研究院也都給以很大帮助。应当說，这一套手册的編成，是許多单位通力合作、集体努力的結果。

在这一套手册里，內容不够完善之处，甚至錯誤之处都在所难免，希望讀者把发现的問題和意見随时告訴我們。

建筑工程部設計局

1962年7月

一 般 符 号

- A ——面积
 A_b ——底面积
 A_s ——侧面积
 B, b ——宽度
 C ——弯矩传递系数; 计算雪载时与屋面形式有关的系数
 C_{AB} ——当杆件 AB 之 A 端发生任一转角 θ_A 时, 由 A 端向 B 端之弯矩传递系数
 C_{BA} ——当杆件 AB 之 B 端发生任一转角 θ_B 时, 由 B 端向 A 端之弯矩传递系数
 C_{ik} ——计算刚架时与柱高有关的比值 $C_{ik} = \frac{\text{任一柱的高度}}{\text{ik柱的高度}} = \frac{h_c}{h_{ik}}$
 C_s ——风压削弱系数
 C_{pa} ——外部空气动力系数
 C_p ——内部空气动力系数
 D, d ——直径
 D ——桁架的斜杆
 E ——弹性模量
 e ——力的偏心距
 F ——面积; 构筑物(杆件)垂直于风向一面的投影计算面
 f ——面积; 挠度; 拱的矢高(自拱顶中心轴到拱脚中心连线的距离)
 G ——集中恒载; 剪切弹性模量
 g ——均布恒载; 重力加速度(其值等于 9.81 m/秒^2); 吊车的小车重量
 H, h ——高度; 深度
 H ——横推力; 水平分力; 水平反力
 i ——单位刚度 $\left(i = \frac{EJ}{l} \right)$
 i_k ——杆件的扭转刚度
 J ——截面惯性矩
 J_k ——扭转时的截面惯性矩
 J_p ——极惯性矩
 $J_{np\mu\delta}$ ——折算惯性矩[应用于公式(■-9)], 其值根据沿全高在均布单位荷载作用下, 构筑物顶端挠度与悬臂式圆柱形杆件自由端挠度相等的条件求得
 J_y ——截面对 y 轴的惯性矩
 J_{y0} ——对通过重心的 y 轴的主惯性矩
 J_{yz} ——截面对 y 轴及 z 轴的惯性积
 J_z ——截面对 z 轴的惯性矩
 J_{z0} ——对通过重心的 z 轴的主惯性矩
 K ——杆件的抗弯刚度; 与建筑物形式有关的空气动力系数
 K_{AB} ——两端固定的杆件 AB 在 A 端的抗弯刚度
 K_{BA} ——两端固定的杆件 AB 在 B 端的抗弯刚度
 K_{np} ——空间桁架的空气动力系数

- K_ϕ ——平面桁架的空气动力系数
 K' ——一端铰接杆件的抗弯刚度
 K'_{AB} ——一端固定一端铰接的杆件 AB , 在固定端 A 端的抗弯刚度
 k ——匀质系数
 l ——长度; 梁 (或拱) 的跨度
 $\ln$ ——以 e 为底的自然对数
 $\log$ ——以 10 为底的普通对数
 M ——弯矩
 M_f ——虚梁的虚弯矩
 M_i ——由于作用力 S_i 所发生的弯矩
 M_K ——扭矩
 $M_{c\pi}$ ——在荷载作用下构筑物计算截面内的静力弯矩
 M_o ——与拱有相同跨长、受同样荷载的简支梁的相应截面的弯矩
 M_θ ——动力弯矩
 $\bar{M}$ ——具有两端固定的杆件由于荷载产生的固端弯矩
 $\bar{M}_{AB}$ ——具有两端固定的杆件 AB , 由于荷载所产生的在 A 端的固端弯矩
 $\bar{M}_{BA}$ ——具有两端固定的杆件 AB , 由于荷载所产生的在 B 端的固端弯矩
 $\bar{M}_{ik}$ ——由于加荷后在杆 ik 的杆端 i 所引起的固端弯矩
 $\bar{M}_k$ ——由于单位力 S_k 所发生的弯矩
 M' ——一端铰接杆件的固端弯矩
 M'_{ik} ——由于 i 端的转角 θ_i 而在 k 端产生的弯矩、亦可将 M'_{ik} 称为 i 端的近端角变弯矩
 M'_{ki} ——由于 k 端的转角 θ_k 而在 i 端产生的弯矩、亦可将 M'_{ki} 称为 k 端的近端角变弯矩
 M''_{ik} ——等截面杆件 ik 的侧移弯矩
 m ——工作条件系数; 风压脉动系数
 N ——轴向力; 纵向力
 N_i ——由于作用力 S_i 所产生的轴向力
 N_p ——由于外荷载 S_p 的作用, 桁架杆件所产生的轴向力
 $\bar{N}_k$ ——由于单位力 S_k 所产生的轴向力
 n ——超载系数
 n_0 ——吊车的一边轮数
 O ——桁架的上弦杆
 P ——集中活载
 P_B ——垂直于建筑物面上的风载 (kg/m^2)
 P_c ——屋面水平投影面上的雪载 (kg/m^2)
 P_{kp} ——临界力
 P_H ——惯性力
 p ——均布活荷载
 Q ——剪力; 总集中荷载; 吊车起重量
 Q_B ——构筑物或其某一部分在风力作用的方向所承受的計算风荷载 (kg)
 Q_f ——虚梁的虚剪力
 Q_i ——由于作用力 S_i 所产生的剪力
 Q_x ——离支承 x 处的截面剪力

Q^0 ——两端简支的杆件，在荷载作用下的剪力

Q_A^0, Q_B^0 ——两端简支的杆件 AB ，在荷载作用下分别在 A 端及 B 端的剪力

Q_x^0 ——与拱具有相同跨长、受同样荷载的简支梁的相应截面的剪力

$\bar{Q}_{ik}$ ——杆件 ik 的固端剪力

$\bar{Q}_k$ ——由于单位力 S_k 所产生的剪力

q ——总均布荷载；风压值（未考虑超载系数）

q_f ——虚梁的虚荷载

q_n ——计算风压（考虑超载系数）

R ——支座反力；半径；计算强度

Re ——雷诺值

R_f ——虚梁的支座反力

R^H ——标准强度

r ——半径；迴转半径 $\left(r = \sqrt{\frac{J}{F}} \right)$

S ——作用力；面积矩；表面积；在单位面积上的雪载

T ——外力之功；自振周期（秒）

T_0 ——吊车的横向水平冲击力

t ——时间

t° ——温度

Σt ——在一小时工作过程内，机械的操作时间的总和

U ——桁架的下弦杆

V ——风速；体积；竖向反力；桁架的竖杆

V_{ik} ——杆件 ik 的侧移弯矩分配系数

V_{kp} ——引起圆柱形高耸构筑物共振时的临界风速值

W ——内力之功；水平均布力；截面矩

W_k ——抗扭截面矩

x —— X 轴坐标

y —— Y 轴坐标；挠度

y_0 ——截面重心的 y 坐标

y_f ——构筑物的共振振幅

y_{cr} ——在荷载作用下结构物计算截面的静力挠度

z_0 ——截面重心的 z 坐标

α ——平面角度；吊车横向力的修正系数

β ——平面角度；杆件的弦转角 $\left(\beta = \frac{\Delta}{l} \right)$ ；计算风压的增大系数 $(\beta = 1 + \xi m)$

γ ——平面角度；物体密度；两端固定杆件的侧移系数

γ_{AB} ——当杆件 AB 的两端发生相对线变位时，在 A 端的弯矩称为 A 端的侧移系数

γ_{BA} ——当杆件 AB 的两端发生相对线变位时，在 B 端的弯矩称为 B 端的侧移系数

γ' ——一端固定一端铰接杆件的侧移系数

γ'_{AB} ——一端固定一端铰接杆件在固定端 A 的侧移系数

γ_0 ——容重

Δ ——由于荷载作用所产生的位移；结构的整个变形；杆件两端垂直于杆轴方向的相对线变位

Δ_{L_n} ——由于荷载的作用，在 S_n 方向所产生的变位

- Δ_{kp} ——由于荷载的作用, 在 S_k 方向所产生的变位
 δ ——由于单位力作用, 所产生的变位; 变位值; 阻尼对数减缩值
 δ_{ki} ——由于作用力 S_i 而引起在 S_k 方向的变位
 ε ——截面纵向纤维的单位伸长(压缩)
 θ ——截面转角; 拱轴上切线的倾斜角
 θ° ——简支梁在荷载作用下所产生的角变位
 λ ——压杆的计算长细比($\lambda = \frac{\mu l}{r}$)
 μ ——长度系数; 节点的弯矩分配系数
 μl ——计算长度; 直杆开始弯曲时弯曲线上的两个拐点(或反弯点)之间的距离
 ν ——空气粘滞系数, 当 $t = 15^\circ\text{C}$ 和大气压力为760mm水银柱时 $\nu = 0.145 \times 10^{-4} \text{m}^2/\text{秒}$
 ξ ——与构筑物自振周期 T 和构筑物阻尼对数减缩有关的动力系数
 ρ ——曲率半径; 微面积 dF 到 O 点的距离
 σ ——垂直应力
 σ_B ——材料的极限强度
 σ_K ——临界应力
 σ_n ——材料的比例极限
 σ_T ——材料的屈服点
 τ ——剪应力
 φ ——纵向弯曲系数; 扭转角
 ψ ——风向沿四边形塔的对角线方向作用时对 K_{np} 值的增加系数
 ω ——弯矩图的面积; 空间角度
 $\Pi B\%$ ——吊车的操作时间百分数

目 录

第一章 数 学	1	二、定积分的几何意义	18
第一节 代 数	1	三、基本函数的积分	18
一、恒等式及因数分解	1	四、函数的定积分	19
二、指 数	1	第六节 常用数值表	20
三、一元二次方程	1	一、圆周率 π	20
四、行 列 式	1	二、自然对数底 e	21
五、多元一次方程组	2	三、弧 度	21
六、以10为底的普通对数	2	四、数的平方、立方、平方根、立方根	
七、级 数	2	及以数为直径的圆周与面积表	22
八、排列与组合	3	第二章 度量衡单位及换算表	23
第二节 三 角	3	一、长度	23
一、函数之名称与定义	3	二、面积	23
二、函数基本公式	4	三、体积、容积	24
三、两角和差之三角函数	4	四、重量	24
四、倍角及半角函数	4	五、压力换算表	24
五、负角函数	4	六、密度换算表	25
六、函数之和与差	4	七、力矩换算表	25
七、换算公式	5	八、功能换算表	25
八、常用角度三角函数数值表	5	第三章 荷载和超载系数	26
九、平面三角形之分解	5	第一节 荷载的一般规定	26
十、函数展开式	6	一、承重结构计算的基本规则	26
十一、三角函数真数表	7	1. 承重结构按极限状态的计算	26
第三节 几 何	8	2. 标准荷载、超载系数和计算	
一、平面图形及计算公式	8	荷载	26
二、立体图形及计算公式	10	3. 标准强度、匀质系数、计算强度和	
三、在直角坐标上的直线及曲线方程	13	工作条件系数	26
四、抛物线、圆弧及椭圆的 y 及 $\tan\varphi$		二、荷载的分类	26
值表	14	三、荷载的组合	27
第四节 微 分	14	第二节 使用荷载	28
一、微分的一般定理	14	一、楼板均布荷载	28
二、导数的几何意义	15	二、积灰荷载	30
三、函数之极大与极小值	15	三、其他荷载	30
四、基本函数的导数	15	四、栏杆的水平推力	30
五、双曲线函数	16	五、多层建筑物使用荷载折减表	31
六、泰罗级数	16	六、动力系数	31
七、富里埃级数	16	七、吊车荷载	31
第五节 积 分	18	(1) 吊车垂直荷载及垂直冲击力	31
一、积分的一般定理	18	(2) 吊车水平冲击力	32

3. 吊車起重机械的工作制	33	五、計算图表	123
第三节 雪 載	33	第四节 压杆的稳定計算	141
一、雪載的計算	33	一、概 念	141
二、屋面雪載的分布	34	二、临界力和临界应力	141
第四节 风 載	34	三、欧拉公式及其应用范围	141
一、风載的計算	34	四、在比例极限外, 杆件的临界应力	143
1. 計算公式	35	五、临界应力图	143
2. 风压值的采用	35	六、纵向弯曲系数 φ	143
二、塔形結構物的风載	36	七、材料及截面形式的选择	143
1. 塔形結構物的振动系数和风压值	36	第五节 拱的計算	145
2. 計算塔形結構物振动周期的近似公式	36	一、概 念	145
三、空气动力系数值	38	二、三铰拱	145
第四章 力 学	43	三、双铰拱	148
第一节 靜定梁	43	四、无铰拱	152
一、基本原理	43	五、拱的計算图表	153
二、用共軛梁法求梁的变形	46	第六节 桁架的計算	176
三、扭轉的强度校核及变形的計算	48	一、概 說	176
1. 扭矩的概念	48	二、桁架稳定性的检查	177
2. 扭轉角和扭轉刚度	49	三、数解法求內力	178
3. 复杂截面扭轉时扭轉角和剪应力的計算	50	四、图解法求內力	180
四、平面图形慣性矩的計算	52	五、桁架变位的求法	181
五、在弹性极限內, 弯曲时应力的計算	54	第五章 剛架分析	184
1. 梁內纵向应力的計算	54	第一节 概 述	184
2. 梁內剪应力的計算	55	第二节 变位的求法	185
3. 梁內主应力的計算	58	一、基本原理	185
4. 斜弯曲	58	1. 外力的功	185
六、計算图表	61	2. 內力的功	186
第二节 单跨超靜定梁和杆件的常数	82	3. 外力功与內力功間的相互关系	186
一、抗弯刚度、传递系数和側移系数	82	二、用积分公式求变位	186
二、固端弯矩	86	三、用图形相乘求变位	188
三、角变位移方程	88	第三节 用力法計算剛架	193
四、剪力計算	89	一、計算原理	193
五、計算图表	89	二、內力图的繪制	194
第三节 連續梁	106	三、計算例題	196
一、概述	106	第四节 用变形法計算剛架	199
二、活荷載的布置	106	一、計算原理	199
三、弯矩分配法	106	1. 变形法的基本結構	199
四、二次循环弯矩分配法	111	2. 变形法的計算方程	199
		二、計算步驟	202
		三、計算例題	202

第五节 用内力連續代入法分析剛架

架	204
一、簡式剛架	204
1. 豎向荷載下, 节点无側移的簡式剛架的計算	204
2. 豎向荷載下, 节点有側移的簡式剛架的計算	209
3. 承受水平荷載的簡式剛架的計算	213
二、复式多层剛架	216
1. 复式剛架的杆端弯矩計算公式	217
2. 复式剛架的杆端角变弯矩計算公式	217
3. 复式剛架的側移弯矩計算公式	218
4. 复式剛架的計算步驟	219
第六节 用近似法計算剛架	225
一、在豎向荷載作用下, 多层剛架分层計算法	225
二、多层剛架在水平荷載作用下的近似計算法	227
第七节 剛架計算图表	232
一、单跨及双跨剛架	233

二、等跨度等刚度連續剛架

1. 在豎向荷載下, 剛架的計算	261
2. 在水平荷載下, 剛架的計算	263
3. 在某些豎向荷載下, 多跨多层剛架的近似計算	265

附录 I 我国現行的有关建筑結構設計方面的规范、規程和标准	277
-------------------------------------	-----

附录 II 苏联有关建筑結構設計方面的规范、規程和指示	277
-----------------------------------	-----

附录 III 苏联高耸构筑物风荷載計算技术规范 (CH40-58)	278
---	-----

附录 IV 瑞士规范中的空气动力系数	289
--------------------------	-----

附录 V 建筑物上的风力	298
一、有关空气动力系数的一些問題	298
二、几种房屋形式的空气动力系数	298

附录 VI 材料及建筑构件重量表	300
主要参考文献	309

第一章 数 学

第一节 代 数

一、恒等式及因数分解

1. $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$.
2. $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$.
3. $(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$.
4. $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$.
5. $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.
6. $a^3\mp b^3=(a\mp b)(a^2\pm ab+b^2)$.
7. $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\dots+ab^{n-2}+b^{n-1})$.
8. $a^n-b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\dots+ab^{n-2}-b^{n-1})$, n =偶数。
9. $a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\dots-ab^{n-2}+b^{n-1})$, n =奇数。
10. $(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2+\dots+\frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{r!}a^{n-r}b^r+\dots+nab^{n-1}+b^n$.
11. $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$.

二、指 数

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.
2. $a^m \div a^n = a^{m-n}$.
3. $(a^m)^n = a^{mn}$.
4. $(ab)^m = a^m b^m$.
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$.
6. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$.
7. $a^0 = 1$.
8. $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$.

三、一元二次方程

$$ax^2+bx+c=0.$$

它的根:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

四、行 列 式

$$1. \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \\
 &= a_1(b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_2(b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_3(b_1 c_2 - b_2 c_1).
 \end{aligned}$$

五、多元一次方程組

$$1. \quad \begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1, \\ a_2 x + b_2 y = c_2. \end{cases}$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad (\Delta \neq 0),$$

$$\text{其中: } \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

$$2. \quad \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2, \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3, \end{cases}$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}, \quad (\Delta \neq 0),$$

$$\begin{aligned}
 \text{其中: } \Delta &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \\
 \Delta_y &= \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

六、以10为底的普通对数

$$1. \log 1 = 0.$$

$$2. \log(N_1 N_2) = \log N_1 + \log N_2.$$

$$3. \log \frac{N_1}{N_2} = \log N_1 - \log N_2.$$

$$4. \log(N^n) = n \log N.$$

$$5. \log \sqrt[n]{N} = \frac{1}{n} \log N.$$

6. 以 e 为底的自然对数 (即 $\ln N$) 与以 10 为底的普通对数 (即 $\log N$) 间的关系:

$$\ln N = \ln 10 \log N = 2.30258509 \log N.$$

$$\log N = \log e \ln N = 0.4342945 \ln N.$$

七、級 数

1. 等差級数

設首項 $=a_1$, 公差 $=d$, 項數 $=n$, 第 n 項 $=a_n$, 則:

1) 通項 $a_n = a_1 + (n-1)d$.

2) 前 n 項和 $s_n = \frac{a_1 + a_n}{2}n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$

2. 等比級數

設首項 $=a_1$, 公比 $=q$, 項數 $=n$, 第 n 項 $=a_n$, 則:

1) 通項 $a_n = a_1 q^{n-1}$.

2) 前 n 項和

$$s_n = \frac{a_1 - a_n q}{1 - q} = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

當 $q < 1$ 時, 則 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}$

八、排 列 与 組 合

1. 排列

$$A_m^n = m(m-1)(m-2)\cdots[m-(n-1)].$$

A_m^n 為 m 個元素中取 n 個的排列。

2. 全取排列

$$P_n = A_n^n = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

其中:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \text{ 叫 } n \text{ 的階乘。}$$

3. 組合

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n} = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots[m-(n-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} = \frac{P_m}{P_n P_{m-n}} = \frac{m!}{n!(m-n)!} = C_m^{m-n}.$$

$$C_m^1 = m, \quad C_m^m = C_m^0 = 1.$$

第二节 三 角

一、函数之名称与定义

1. α 角之正弦 $=\frac{y}{r} = \sin \alpha$.

2. α 角之余弦 $=\frac{x}{r} = \cos \alpha$.

3. α 角之正切 $=\frac{y}{x} = \tan \alpha$.

4. α 角之余切 $=\frac{x}{y} = \cot \alpha$.

5. α 角之正割 $=\frac{r}{x} = \sec \alpha$.

6. α 角之余割 $=\frac{r}{y} = \csc \alpha$.

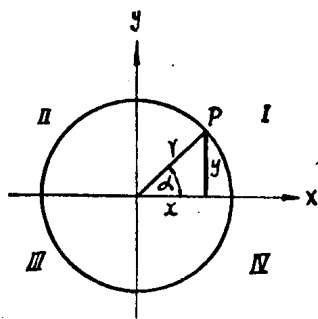


图 1-1

7. α 角之正矢 $= 1 - \cos\alpha = \text{vers}\alpha$.

8. α 角之余矢 $= 1 - \sin\alpha = \text{covers}\alpha$.

二、函数基本公式

1. $\sin\alpha \cdot \csc\alpha = 1$.

6. $\csc^2\alpha - \cot^2\alpha = 1$.

2. $\cos\alpha \cdot \sec\alpha = 1$.

7. $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

3. $\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$.

4. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

8. $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

5. $\sec^2\alpha - \tan^2\alpha = 1$.

三、两角和差之三角函数

1. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta$.

2. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta$.

3. $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha \tan\beta}$.

4. $\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot\alpha \cot\beta \mp 1}{\cot\beta \pm \cot\alpha}$.

四、倍角及半角函数

1. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cos\alpha$.

4. $\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}$.

2. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

$= 2\cos^2\alpha - 1$.

5. $\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$.

3. $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$.

6. $\tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}}$.

五、负角函数

1. $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$.

2. $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$.

3. $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$.

4. $\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$.

六、函数之和与差

1. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$.

2. $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$.

3. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$.

$$4. \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

$$6. \cot \alpha \pm \cot \beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}.$$

$$5. \tan \alpha \pm \tan \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}.$$

七、换算公式

表 1-2

函 数	换 算 角						
	$90 - \alpha$	$90 + \alpha$	$180 - \alpha$	$180 + \alpha$	$270 - \alpha$	$270 + \alpha$	$360 - \alpha$
sin	$+\cos \alpha$	$+\cos \alpha$	$+\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$
cos	$+\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$+\sin \alpha$	$+\cos \alpha$
tan	$+\cot \alpha$	$-\cot \alpha$	$-\tan \alpha$	$+\tan \alpha$	$+\cot \alpha$	$-\cot \alpha$	$-\tan \alpha$

八、常用角度三角函数数值表

表 1-3

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	0	∞	0

九、平面三角形之分解

1. 直角三角形角与边之关系

$$\gamma = 90^\circ, \alpha + \beta = 90^\circ.$$

$$a = c \sin \alpha, b = c \sin \beta, a = b \tan \alpha.$$

$$a = c \cos \beta, b = c \cos \alpha, b = a \tan \beta.$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

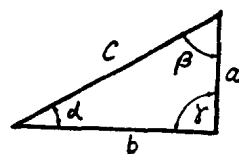


图 1-2

$$2. \text{直角三角形面积 } A = \frac{ab}{2} = \frac{a^2}{2 \tan \alpha} = \frac{b^2 \tan \alpha}{2} = \frac{c^2 \sin 2\alpha}{4}.$$

3. 任意三角形角与边之关系

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R \quad (\text{正弦定律})$$

式中 R 是三角形的外接圆半径

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \quad (\text{余弦定律})$$

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan \frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\tan \frac{1}{2}(\alpha+\beta)} \quad (\text{正切定律})$$

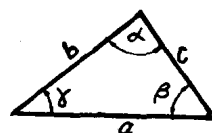


图 1-3

$$a = b \cos \gamma + c \cos \beta; \quad b = c \cos \alpha + a \cos \gamma; \quad c = a \cos \beta + b \cos \alpha.$$

設 $S = \frac{a+b+c}{2}$ (三角形周边总长的一半)

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}; \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}; \quad \tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}.$$

$$\sin \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}; \quad \cos \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}}; \quad \tan \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}.$$

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}; \quad \cos \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}; \quad \tan \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}.$$

$$\begin{aligned} 4. \text{任意三角形面积 } A &= \frac{1}{2} ab \sin \gamma = 2R \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \\ &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{abc}{4R}. \end{aligned}$$

十、函数展开式

$$1. \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (-\infty < x < \infty).$$

$$2. \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (-\infty < x < \infty).$$

$$\begin{aligned} 3. \tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \dots \\ &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \dots \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \cot x &= \frac{1}{x} - \frac{x}{3} + \frac{x^3}{45} - \frac{2x^5}{945} + \frac{x^7}{4725} - \dots \\ &= \frac{1}{x} - \frac{x}{3} + \frac{x^3}{45} - \frac{2x^5}{945} + \frac{x^7}{4725} - \dots \quad \left(-\pi < x < \pi, x \neq 0\right). \end{aligned}$$

$$5. \sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (-\infty < x < \infty).$$

$$6. \cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (-\infty < x < \infty).$$

$$7. \tanh x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \dots \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$8. \coth x = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} - \frac{x^7}{4725} + \dots \quad \left(-\pi < x < \pi, x \neq 0\right).$$