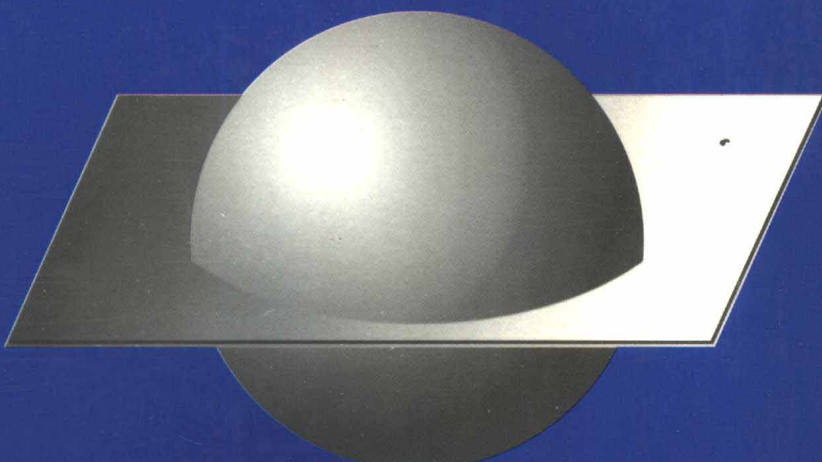
复变函数

史济怀　刘太顺　编著



中国科学技术大学出版社

内 容 提 要

本书包括复数与复变函数、全纯函数、全纯函数的积分表示、全纯函数的 Taylor 展开及其应用、全纯函数的 Laurent 展开及其应用、全纯开拓、共形映射、调和函数和多复变数全纯函数等九章内容，讲述了复变函数论的基本理论与方法. 作为一种尝试，本书引进了非齐次的 Cauchy 积分公式，并用它给出了一维 $\bar{\partial}$ 问题的解及其应用. 本书还扼要地介绍了次调和函数和多复变函数理论. 每节后都附有足够数量的习题，供读者练习.

本书可作为大学本科数学系各专业复变函数课程的教材，也可供自学者参考.

图书在版编目(CIP)数据

复变函数/史济怀，刘太顺编著. 合肥：中国科学技术大学出版社，1998.12

ISBN 7-312-00999-9

Ⅰ. 复…

Ⅱ. ①史… ②刘…

Ⅲ. 复变函数

Ⅳ. O174.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 33407 号

中国科学技术大学出版社出版发行

(安徽省合肥市金寨路 96 号，230026)

安徽省金寨县印刷厂印刷

全国新华书店经销

开本：850×1168/32 印张：11.5 字数：300 千

1998 年 12 月第 1 版 1998 年 12 月第 1 次印刷

印数：1—3000 册

ISBN 7-312-00999-9/O・203 定价：12.00 元

前　　言

复变函数理论的基础是19世纪由三位杰出的数学家Cauchy，Weierstrass和Riemann奠定的，到现在已有一百多年的历史，这是一门相当成熟的学科．它在数学的其他分支（如常微分方程、积分方程、概率论、解析数论、算子理论及多复变函数论等）和自然科学的相关领域（如流体力学、空气动力学、电学及理论物理学等）中都有重要的应用．

复变函数论作为大学数学系的一门重要基础课，通常包含Cauchy的积分理论、Weierstrass的级数理论和Riemann的几何理论这三部分内容．本书作为这样一门课程的教材，就是以这三大块内容为中心来编写的，但在材料的取舍上与传统的教材略有不同．例如，在第3章全纯函数的积分表示中，我们除了介绍全纯函数的Cauchy积分公式外，还对非全纯的函数（仅要求f的实部和虚部有一阶连续偏导数）建立了Cauchy积分公式，并用它得到一维$\bar{\partial}$问题的解，再利用这个解在第5章中给出了Mittag-Leffler定理、Weierstrass因子分解定理和插值定理的证明，通过这些证明，使读者了解$\bar{\partial}$问题的解是构造全纯函数的重要工具，而这在以往的教材中是不被重视的．又如，在介绍调和函数理论（第8章）的同时，我们还介绍了次调和函数的基本理论，因为次调和函数的理论在众多的其他数学分支中要遇到．再如，在本书的最后一章中介绍了多复变数全纯函数和全纯映射的一些基本性质．

在以往的教学中，曾有学生问：在微积分中，讲完单变量微积分，还要讲多变量微积分，为什么在复变函数课程中没有多变量函数的理论？这是一个很自然的问题，但回答起来并不容易．我们增添这样一章的目的，是要使学生了解单复变与多复变有许多本质

的不同，在内容上和研究方法上都是如此. 在多复分析已经成为数学研究的主流方向之一的今天，让学生们了解一些多复变最基本的知识是必要的. 我们认为 Riemann 面属于另外一门课程的内容，很难在这样一本教材中说清楚，干脆就不提它了. 至于个别定理的取舍，就不在这里一一介绍了.

书中定理的证明，大部分与传统的教材相似，只是在编排与叙述方式上有些差别，但也有若干创新之处. 例如，在证明 Weierstrass 关于级数的定理时，我们利用了全纯函数 f 的任意阶导数 $f^{(n)}$ 在紧集 K 上的模可以用 f 在 K 的邻域上的模来控制这一事实，使证明得以简化，而且上述事实在别处还要用到. 其他如边界对应定理和 Weierstrass 因子分解定理的证明，与传统的证明有更大的差别.

我们主张教材可以写得详细一些，教师不必都讲，给学生留一些自己学习的余地. 例如，为了完整起见，在第 1 章中我们比较详细地介绍了平面点集的知识，对于相当一部分学生来说，这部分内容在学多元函数的微积分时已经学过了，教师可不必再讲，留给学生备查就行了. 又如，用残数理论计算定积分，我们介绍了不少方法，教师只需选择一部分来讲，其他可留作学生自学的材料. 总之，教师应该根据实际情况作出取舍.

书中每节之后都附有不少习题，这是本书的重要组成部分. 一些练习性的习题是为加深对教学内容的理解而设，学生都应该完成. 一部分有一定难度的习题是为锻炼学生的综合分析能力而设，有些题初学时做不出来也不必介意，待学完本课程后回过头来还可以再想.

21 世纪的钟声即将敲响，数学教学的改革已经提到人们的议事日程上. 对于这样一门成熟的学科，应该如何改？我们认为，任何积极的改革都不应该触动前面提到的那三部分主要内容，而是应该在介绍这三部分主要内容的同时，尽可能使这门课程和现代数学更为接近. 前面提到的 $\bar{\partial}$ 问题及其应用、次调和函数和多复变基

础知识等，都是为了这样一个目的而引进的.

作者曾在中国科学技术大学多次讲授这门课程，本书便是在这些讲稿的基础上写成的. 在编写过程中，龚昇教授最近编著的《简明复分析》(北京大学出版社，1996 年)对我们有很大启发，在此深致谢意. 兄弟院校的一些优秀教材也对我们有很多帮助，在此一并致谢.

由于水平所限，书中缺点和错误在所难免，希望得到广大读者的批评指正.

史济怀　刘太顺

1998 年 2 月于中国科学技术大学

目　　次

第 1 章　复数与复变函数

复变函数论讨论的是复变数的函数理论，也就是复数域上的微积分学. 本章先从较高的角度帮助读者系统地复习一下有关复数的知识，再在这个基础上引进复变函数及其连续性的概念.

1.1　复数的定义及其运算

我们把复数定义为一对有序的实数 (a,b)，如果用 $\boldsymbol{R}$ 记实数的全体，$\boldsymbol{C}$ 记复数的全体，那么

$$\boldsymbol{C} = \{(a,b):\ a \in \boldsymbol{R}, b \in \boldsymbol{R}\}.$$

在这个集合中定义加法和乘法两种运算：

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d),$$

$$(a,b)(c,d) = (ac - bd, ad + bc).$$

容易验证，加法和乘法都满足交换律和结合律；$(0,0)$ 是零元素，$(-a,-b)$ 是 (a,b) 的负元素；$(1,0)$ 是乘法的单位元素；每个非零元素 (a,b) 有逆元素 $\left(\dfrac{a}{a^2+b^2}, -\dfrac{b}{a^2+b^2}\right)$；此外，$\boldsymbol{C}$ 中的加法和乘法还满足分配律：

$$[(a,b)+(c,d)](e,f) = (a,b)(e,f) + (c,d)(e,f).$$

因此，$\boldsymbol{C}$ 在上面定义的加法和乘法运算下构成一个域，称为**复数域**. 如果记

$$\widetilde{\boldsymbol{R}} = \{(a,0):\ a \in \boldsymbol{R}\},$$

那么 $\widetilde{\boldsymbol{R}}$ 是 $\boldsymbol{C}$ 的一个子域. 显然，$(a,0) \to a$ 是 $\widetilde{\boldsymbol{R}}$ 与 $\boldsymbol{R}$ 之间的一个同构对应，因此，实数域 $\boldsymbol{R}$ 是 $\boldsymbol{C}$ 的一个子域. 我们直接记 $(a,0)=a$. 在 $\boldsymbol{C}$ 中，$(0,1)$ 这个元素有其特殊性，它满足

$$(0,1)^2=(0,1)(0,1)=(-1,0)=-1.$$

专门用 i 记(0,1)这个元素,于是有 $i^2=-1$. 由于 $(0,b)=(b,0)\cdot(0,1)=b\mathrm{i}$,于是每一个复数 (a,b) 都可写成

$$(a,b)=(a,0)+(0,b)=a+b\mathrm{i}.$$

复数域和实数域的一个重要区别是在复数域中不能定义两个复数的大小. 为了证明这一事实,我们先给出有序域的概念.

定义 1.1.1 域 F 称为**有序域**,如果在 F 的元素间能确定一种关系(记为 $a<b$),其满足下列要求:

(i) 对 F 中任意两个元素 a,b,下述三个关系中必有而且只有一个成立:

$$a<b,\quad a=b,\quad b<a;$$

(ii) 如果 $a<b,b<c$,那么 $a<c$;

(iii) 如果 $a<b$,那么对任意 c,有 $a+c<b+c$;

(iv) 如果 $a<b,c>0$,那么 $ac<bc$.

容易知道,实数域是有序域,而复数域则不是.

定理 1.1.2 复数域不是有序域.

证 如果 $\boldsymbol{C}$ 是有序域,那么因为 $\mathrm{i}\neq0$,i 和 0 之间必有 $\mathrm{i}>0$ 或 $\mathrm{i}<0$ 的关系. 如果 $\mathrm{i}>0$,则由(iv)得 $\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}>\mathrm{i}\cdot0$,即 $-1>0$,再由(iii),两端都加 1,即得 $0>1$. 另一方面,从 $-1>0$ 还可得 $(-1)\cdot(-1)>0\cdot(-1)$,即 $1>0$,这和刚才得到的 $0>1$ 矛盾. 如果 $\mathrm{i}<0$,两端都加 $-\mathrm{i}$,得 $0<-\mathrm{i}$,再由(iv),两端乘 $-\mathrm{i}$,得 $-1>0$. 重复上面的讨论,即可得 $0>1$ 和 $0<1$ 的矛盾. 所以,复数域不是有序域. □

从现在开始,我们不再用实数对 (a,b) 来记复数,而直接用 $z=a+b\mathrm{i}$ 记复数,a 称为 z 的实部,b 称为 z 的虚部,分别记为 $a=\mathrm{Re}z,b=\mathrm{Im}z$. 加法和乘法用现在的记号定义为:

$$(a+b\mathrm{i})+(c+d\mathrm{i})=(a+c)+(b+d)\mathrm{i},$$

$$(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})=(ac-bd)+(ad+bc)\mathrm{i}.$$

减法和除法分别定义为加法和乘法的逆运算:

$$(a+b\mathrm{i})-(c+d\mathrm{i})=(a-c)+(b-d)\mathrm{i},$$

$$\frac{a+b\mathrm{i}}{c+d\mathrm{i}}=(a+b\mathrm{i})\left(\frac{c-d\mathrm{i}}{c^2+d^2}\right)$$

$$=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\mathrm{i}.$$

设 $z=a+b\mathrm{i}$ 是一复数，定义

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2},$$

$$\bar{z}=a-b\mathrm{i},$$

$|z|$ 称为 z 的模或绝对值，$\bar{z}$ 称为 z 的共轭复数. 下面是它们的一些基本性质：

命题 1.1.3 设 z 和 w 是两个复数，那么

(i) $\mathrm{Re}z=\frac{1}{2}(z+\bar{z})$，$\mathrm{Im}z=\frac{1}{2\mathrm{i}}(z-\bar{z})$；

(ii) $z\bar{z}=|z|^2$；

(iii) $\overline{z+w}=\bar{z}+\bar{w}$，$\overline{zw}=\bar{z}\,\bar{w}$；

(iv) $|zw|=|z||w|$，$\left|\frac{z}{w}\right|=\frac{|z|}{|w|}$；

(v) $|z|=|\bar{z}|$.

这些性质的证明都很简单，但在证明(iv)时，初学者往往会用 z 和 w 的实部和虚部来表示 $|zw|$ 和 $|z||w|$，从而证明它们相等. 其实，利用(ii)来证明要简单得多：

$$|zw|^2=(zw)(\overline{zw})=|z|^2|w|^2.$$

命题 1.1.4 设 z 和 w 是两个复数，那么

(i) $|\mathrm{Re}z|\leqslant|z|$，$|\mathrm{Im}z|\leqslant|z|$；

(ii) $|z+w|\leqslant|z|+|w|$，等号成立当且仅当存在某个 $t\geqslant0$，使得 $z=tw$；

(iii) $|z-w|\geqslant||z|-|w||$.

证 (i) 从 $\mathrm{Re}z$，$\mathrm{Im}z$ 和 $|z|$ 的定义马上知道不等式成立.

(ii) 利用命题 1.1.3 的(ii)，(i)和这里的不等式(i)，即得

$$|z+w|^2=(z+w)(\overline{z+w})$$

$$
\begin{aligned}
&= |z|^2 + 2\mathrm{Re}(z\overline{w}) + |w|^2 \\
&\leqslant |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 \\
&= (|z| + |w|)^2,
\end{aligned}
$$

由此即知(ii)成立. 由上面的不等式可以看出,等式成立的充要条件是 $\mathrm{Re}(z\overline{w}) = |z\overline{w}|$,这等价于 $z\overline{w} \geqslant 0$. 不妨设 $w \neq 0$ ($w=0$ 时,等号显然成立),由于 $\overline{w} = \dfrac{|w|^2}{w}$,上面的不等式等价于 $\dfrac{z}{w}|w|^2 \geqslant 0$. 令 $t = \left(\dfrac{z}{w}|w|^2\right)\dfrac{1}{|w|^2}$,则 $t \geqslant 0$,而且 $z = tw$.

(iii) 是(ii)的简单推论,证明留给读者作练习. □

设 $z_1, \cdots, z_n$ 是任意 n 个复数,用数学归纳法,容易得到不等式

$$|z_1 + \cdots + z_n| \leqslant |z_1| + \cdots + |z_n|.$$

请读者给出上述不等式中等号成立的条件.

习　题　1.1

1. 证明命题 1.1.3 的(i),(ii),(iii),(v).

2. 设 $z_1, \cdots, z_n$ 是任意 n 个复数,证明:

$$|z_1 + \cdots + z_n| \leqslant |z_1| + \cdots + |z_n|,$$

并给出不等式中等号成立的条件.

3. 证明:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\mathrm{Re}z| + |\mathrm{Im}z|) \leqslant |z| \leqslant |\mathrm{Re}z| + |\mathrm{Im}z|.$$

4. 若 $|z_1| = \lambda|z_2|$, $\lambda > 0$,证明:

$$|z_1 - \lambda^2 z_2| = \lambda|z_1 - z_2|.$$

5. 设 $|a| < 1$,证明:若 $|z| = 1$,则

$$\left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right| = 1.$$

6. 设 $|a| < 1$, $|z| < 1$. 证明:

(i) $\left|\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}\right| < 1$;

(ii) $1-\left|\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|^2=\dfrac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\bar{a}z|^2}$;

(iii) $\dfrac{||z|-|a||}{1-|a||z|}\leqslant\left|\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|\leqslant\dfrac{|z|+|a|}{1+|a||z|}$.

7. 设 $z_1,\cdots,z_n,w_1,\cdots,w_n$ 是任意 $2n$ 个复数，证明复数形式的 Lagrange 等式：

$$\left|\sum_{j=1}^{n}z_jw_j\right|^2=\left(\sum_{j=1}^{n}|z_j|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}|w_j|^2\right)-\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}|z_j\overline{w}_k-z_k\overline{w}_j|^2,$$

并由此推出 Cauchy 不等式：

$$\left|\sum_{j=1}^{n}z_jw_j\right|^2\leqslant\left(\sum_{j=1}^{n}|z_j|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}|w_j|^2\right).$$

不等式中等号成立的条件是什么？

8. 设 $z_1,\cdots,z_n$ 是任意 n 个复数，证明必有 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的子集 E，使得

$$\left|\sum_{j\in E}z_j\right|\geqslant\frac{1}{6}\sum_{j=1}^{n}|z_j|.$$

1.2 复数的几何表示

在平面上取定一个直角坐标系，实数对 (a,b) 就表示平面上的一个点，所以复数 $z=a+bi$ 可以看成平面上以 a 为横坐标、以 b 为纵坐标的一个点（图 1.1）. 这个点的极坐标设为 (r,θ)，那么

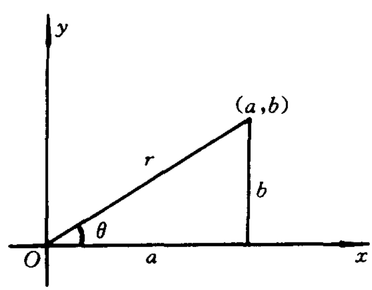


图 1.1

$$a = r\cos\theta,\quad b = r\sin\theta,$$

因而复数 $z=a+bi$ 也可表示为

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

这里,$r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$就是前面定义过的 z 的模,θ 称为 z 的辐角,记为 $\theta=\mathrm{Arg}z$. 容易看出,如果 θ 是 z 的辐角,那么 $\theta+2k\pi$ 也是 z 的辐角,这里,k 是任意的整数,因此 z 的辐角有无穷多个. 但在 $\mathrm{Arg}z$ 中,只有一个 θ 满足 $-\pi<\theta\leqslant\pi$,称这个 θ 为 z 的辐角的主值,把它记为 $\arg z$. 因而

$$\mathrm{Arg}z = \arg z + 2k\pi,\quad k\in\mathbf{Z},$$

这里,$\mathbf{Z}$ 表示整数的全体. 注意,0 的辐角没有意义.

我们还可把复数 $z=a+bi$ 看成在 x 轴和 y 轴上的投影分别为 a 和 b 的一个向量,这时我们就把复数和向量作为同义语来使用. 容易知道,由一向量经过平行移动所得的所有向量表示的是同一个复数. 如果一个向量的起点和终点分别为复数 z_1 和 z_2,那么这个向量所表示的复数便是 z_2-z_1,因而 $|z_2-z_1|$ 就表示 z_1 与 z_2 之间的距离. 特别地,当一个向量的起点为原点时,它的终点所表示的复数和向量所表示的复数是一致的.

由此可以知道,前面定义的复数的加法和向量的加法是一致的:把两个不重合的非零向量 z_1 和 z_2 的起点取在原点,以 z_1 和 z_2 为两边作平行四边形,那么以原点为起点沿对角线所作的向量就表示 z_1+z_2;以 z_2 为起点,z_1 为终点的向量就表示 z_1-z_2(图 1.2). 现在再来看 1.1 节命题 1.1.4 中(ii)的不等式 $|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$,它实际上就是三角形两边之和大于第三边的最简单的几何命题.

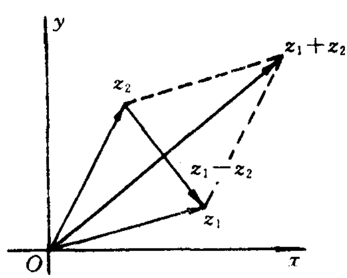


图 1.2

为了说明复数乘法的几何意

义，我们采用复数的三角表示式. 设

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1),$$

$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2),$$

那么

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)).$$

由此立刻得到

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|,$$

$$\mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \mathrm{Arg}z_1 + \mathrm{Arg}z_2.$$

第一个等式在 1.1 节中已经证明过；第二个等式应该理解为两个集合的相等. 这就是说，两个复数的乘积是这样一个复数，它的模是两个复数的模的乘积，它的辐角是两个复数的辐角之和. 从几何上看，用复数 w 乘复数 z，相当于把 z 沿反时针方向转动大小为 $\arg w$ 的角，再让 z 的长度伸长 $|w|$ 倍. 特别地，如果 w 是单位向量，那么 w 乘 z 的结果就是把 z 沿反时针方向转动大小为 $\arg w$ 的角. 例如，已知 i 是单位向量，它的辐角为 $\frac{\pi}{2}$，因此 iz 就是把 z 按反时针方向转动 $\frac{\pi}{2}$ 角所得的向量. 这种几何直观在考虑问题时非常有用.

再看复数的除法，由于

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)],$$

所以

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$\mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Arg}z_1 - \mathrm{Arg}z_2.$$

这里，第二个等式也理解为集合的相等. 这说明向量 z_1 与 z_2 之间的夹角可以用 $\mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$ 来表示，这一简单的事实在讨论某些几何

问题时很有用. 例如,用它很容易证明向量 z_1 与 z_2 垂直的充要条件是 $\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)=0$. 这是因为 z_1 与 z_2 垂直就是 z_1 与 z_2 之间的夹角为$\pm\frac{\pi}{2}$,即 $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\pm\frac{\pi}{2}$,这说明$\frac{z_1}{z_2}$是一个纯虚数,因而 $z_1\bar{z}_2=\frac{z_1}{z_2}|z_2|^2$ 也是一个纯虚数,即 $\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)=0$. 同样道理,可以得到 z_1 与 z_2 平行的充要条件为 $\mathrm{Im}(z_1\bar{z}_2)=0$.

利用复数知识来处理几何问题,有时显得非常方便,下面是两个这方面的例子.

例 1.2.1 在图 1.3 的三角形中,$AB=AC$,$PQ=RS$,M 和 N 分别是 PR 和 QS 的中点. 证明:$MN\perp BC$.

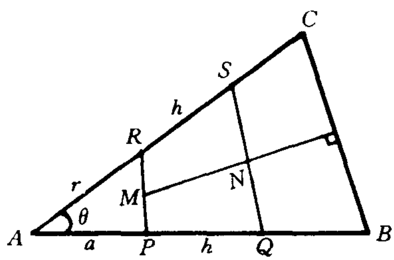


图 1.3

证 把 A 取作坐标原点,AB 所在的直线取作 x 轴,那么 P,Q 的坐标分别为 a 和 $a+h$. 如果用 $\mathrm{e}^{i\theta}$记 $\cos\theta+i\sin\theta$,那么 R 点和 S 点可分别用复数 $r\mathrm{e}^{i\theta}$和$(r+h)\mathrm{e}^{i\theta}$表示. 由于 M 和 N 分别是 PR 和 SQ 的中点,所以 M 和 N 可以分别用复数表示为

$$M:\ \frac{1}{2}(a+r\mathrm{e}^{i\theta}),$$

$$N:\ \frac{1}{2}[(a+h)+(r+h)\mathrm{e}^{i\theta}].$$

若记 $z_1=\overrightarrow{MN}$,则

$$z_1=\frac{1}{2}[(a+h)+(r+h)\mathrm{e}^{i\theta}]-\frac{1}{2}(a+r\mathrm{e}^{i\theta})$$

$$=\frac{h}{2}(1+e^{i\theta}).$$

如果记 B 的坐标为 b,因为 $AB=AC$,所以 C 的坐标为 $be^{i\theta}$. 若记 $z_2=\overrightarrow{BC}$,则

$$z_2=be^{i\theta}-b=b(e^{i\theta}-1).$$

现在

$$\begin{aligned}z_1\bar{z}_2&=\frac{h}{2}(1+e^{i\theta})b(e^{-i\theta}-1)\\&=\frac{bh}{2}(e^{-i\theta}-e^{i\theta})\\&=-ibh\sin\theta,\end{aligned}$$

因而 $\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)=0$. 所以 z_1 垂直 z_2,即 $MN\perp BC$. □

例 1.2.2 证明:平面上四点 z_1,z_2,z_3,z_4 共圆的充要条件为

$$\mathrm{Im}\left(\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}\Big/\frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}\right)=0. \qquad (1)$$

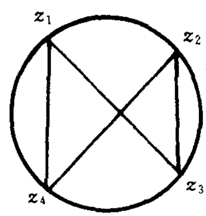


图 1.4

证 从图 1.4 可以看出,z_1,z_2,z_3,z_4 四点共圆的充要条件是向量 z_1-z_3 和 z_1-z_4的夹角等于向量 z_2-z_3 和 z_2-z_4 的夹角或互补(当 z_2 在 z_3 与 z_4 之间时),即

$$\begin{aligned}\arg\left(\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}\Big/\frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}\right)&=\arg\left(\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}\right)-\arg\left(\frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}\right)\\&=0\text{ 或 }\pm\pi.\end{aligned}$$

这说明复数$\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}\Big/\frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}$在实轴上,因而等式(1)成立. □

还有一些有趣的例子,放在习题中供读者练习.

给定复数 w,如何计算 $\sqrt[n]{w}$? 也就是要求复数 z,使得 $z^n=w$. 我们从 de Moivre 公式说起. 设 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1),\cdots,z_n=r_n(\cos\theta_n+i\sin\theta_n)$是给定的 n 个复数,容易用数学归纳法证明:

$$z_1\cdots z_n=r_1\cdots r_n[\cos(\theta_1+\cdots+\theta_n)+i\sin(\theta_1+\cdots+\theta_n)].$$