国家自然科学基金研究专著
NATIONAL NATURAL SCIENCE FOUNDATION OF CHINA

有限元超收敛构造理论

陈传淼 著

湖南科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

有限元超收敛构造理论/陈传森编著. —长沙：湖南科学技术出版社，2001.9

ISBN 7－5357

Ⅰ.有... Ⅱ.陈... Ⅲ.有限元－理论 Ⅳ.0241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 069938 号

国家自然科学基金研究专著

有限元超收敛构造理论

著　　者：陈传森

责任编辑：胡海清　曹　阳

出版发行：湖南科学技术出版社

社　　址：长沙市湘雅路 280 号

http://www.hnstp.com

邮购联系：本社直销科 0731－4375808

印　　刷：湖南省新华印刷二厂

(印装质量问题请直接与本厂联系)

厂　　址：邵阳市双坡岭

邮　　编：422001

经　　销：湖南省新华书店

出版日期：2001 年 10 月第 1 版第 1 次

开　　本：850mm×1168mm　1/32

印　　张：15

插　　页：5

字　　数：390000

书　　号：ISBN 7－5357－3232－1/O·193

定　　价：45.00 元

序

PREFACE

有限元法是解偏微分方程的一种行之有效的数值方法,广泛应用于科学与工程计算各领域.如何提高它的精度是人们十分关心的问题,有限元的超收敛方法则正是提高其精度的一种有效途径.

自 1972 年 J. Douglas 等开始研究两点边值问题的有限元超收敛性以来,至今近 30 年.经各国学者的精心研究,成果累累,其中不乏中国学者的首创佳作.据国际著名有限元专家 I. Babuska 和 L. Wahlbin 在 2000 年 3 月美国 Berkeley 的研讨会上称:当今国际上超收敛研究有三大学派,即 Ithaca(美),Texas(美)与中国,可见中国学派的存在与他们的工作已为世界公认.

本书作者陈传淼教授早于 1978 年与捷克学者 M. Zlamal(1977 年)独立发现并提出单元分析法,经过中国学者们的大量出色的工作,逐步奠定了中国学派的基础并形成自己的独特风格和方法体系.

本书论述这三大学派的理论与分析方法，特别是系统地总结了中国学派所倡导的单元正交分析法，用它来统一解决各种各样的有限元超收敛问题．本书作者曾于1982年出版过一本《有限元方法及其提高精度的分析》的书（湖南科学技术出版社），这是该领域最早的一本著作．1995年，作者和他的学生黄云清博士对该书作了一次实质性扩充，出版了《有限元高精度理论》（湖南科学技术出版社），包括了许多新的理论和应用实例．本书中作者进一步系统总结自己的思想体系并将它归纳为四大法则，它们适用于研究各种问题，包括椭圆、抛物、双曲型方程，方程组与非线性问题，任意区域与奇异解等，都可采用统一的算法获得超收敛性．尽管它还有某些不足之处，但毕竟是重要而系统的一家之言，它可以导出超收敛的许多新结果，特别是对超收敛的实际应用提供了简明指导，所以这是一本颇具中国特色的论述有限元超收敛问题的最新著作．相信本书的出版将有助于推进该领域的研究，并使广大读者了解这个重要领域的最新进展，特此为序．

石钟慈

2001年1月于长沙

前言

PREFACE

本书的目的是用单元正交分析法系统地阐述有限元超收敛性的结构和应用，即不仅希望建立统一的方法和理论，而且还强调能解决多种多样的数学物理问题.

早在20世纪60年代中期，在有限元的工程计算中，许多学者先后发现有限元的导数在某些特殊点上有特别好的精度(超收敛性). 在1972年前后，Douglas-Dupont，de Boor-Swartz和Thomee等从不同的方向研究了一维有限元的超收敛性. 1974年Douglas-Dupont-Wheeler提出了张量积方法. 1974年Bramble-Schatz报告了局部平均方法. 1977～1979年Zlamal-Lesaint使用了近似正交思想. 1978年陈传淼独立地提出了近似正交方法. 这些先行者的研究使人们对有限元的超收敛性质产生了极大的兴趣. 但是至此还未形成一种较完善的方法和统一的理论.

下面简单回顾一下近似正交的思想. 对二阶椭圆问

题而言，设双线性型 $A(u,v)$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 上有界且强制，真解 $u\in H_0^1$ 的 n 次有限元逼近 $u_h\in S_0^h$ 满足基本的正交关系

$$A(u-u_h,v)=0,v\in S_0^h.$$

若我们能直接构造 u 的 n 次(超接近于 u_h 的)插值 $u_I\in S_0^h$，使

$$A(u_h-u_I,v)=A(u-u_I,v)=O(h^{n+l})\|v\|_{l,\Omega},\quad l=1,2,l\leqslant n,v\in S_0^h,$$

那么，取 $l=1$ 及 $v=u_h-u_I$，直接可导出超收敛估计

$$\|u_h-u_I\|_{1,\Omega}=O(h^{n+1}).$$

由 $D(u-u_h)=D(u-u_I)+D(u_I-u_h)$ 可知，在 $D(u-u_I)$ 的零点 z 上，梯度 Du_h 将有高阶精度(在平均意义下)

$$D(u-u_h)(z)=O(h^{n+1}).$$

(利用离散的 Green 函数，还可研究逐点的超收敛性.)

因此，近似正交法的关键是如何利用 u 构造这种超接近插值 u_I(在广义插值的意义下)，这是有限元法中一种重要的艺术. 这种方法的完善，经历了漫长的道路. 1969 年 Oganesyan-Rukhovetz 最早使用近似正交思想，对直角三角形均匀网格上的线性元 u_h 及线性插值 u_I，证明了超收敛估计 $\|u_h-u_I\|_{1,\Omega}=O(h^2)$，但他们不知道这已接近获得梯度 Du_h 的超收敛结果. 1974 年 Douglas-Dupont-Wheeler 利用一维拟投影算子的张量积构造了双 $n\geqslant2$ 次矩形元的超接近插值，证明角节点上 u_h 有超收敛性. 1977 年 Zlamal 也使用近似正交思想，对 $n=1,2$ 次矩形元不仅证明了估计 $\|u_h-u_I\|_1=O(h^{n+1})$，而且得到梯度 Du_h 在单元的 n 阶 Gauss 点上有超收敛性. 在中国，老前辈冯康院士在有限元理论方面的开创性工作，对后人

有着深远影响.陈传淼(1976～1977)计算湖南索溪峪拱坝时发现20节点六面体元的梯度在二阶Gauss点上有超收敛.从1978年起,陈传淼开始理论研究,对三角形与四面体线元,任意次一维元与矩形元等,利用单元上的正交展开具体构造了所需的超接近插值u_I及其余项$R=u-u_I$,证明了$\|u_h-u_I\|_{l,\Omega}=O(h^{n+2-l}),l=0,1,l+n\geq2$,并导出了$u_h$及梯度$Du_h$的超收敛结果.为了适用于一般方程,还提出了单元之间的消除技巧(这是非常重要的技术).1981年林群率先研究有限元的外推法,以后又在研究插值有限元取得成功,得到一序列重要成果.从此,上述两种研究相互促进,迅速发展.其间,还有许多中国学者在这些方面辛勤工作,成果累累.于是在中国逐渐形成比较系统的方法与理论,称为单元分析法.但是,使用简单的正交展开方法,应用范围仍有一定限制,例如,对三角形高次元很长时期无进展.而Bramble-Schatz(1974)及Thomee(1977)的局部平均的高精度结果,Schatz-Sloan-Wahlbin(1995)的局部对称理论,以及Babuska-Strouboulis等人(1995)的计算机搜寻等研究取得的成功,激励着人们必须进一步拓广单元分析的思想.近年,本书作者[64,67,69,75,85](1997～2000)提出了一种构造超接近插值的新思想,即在正交展开的余项R中添加若干待定的低次项,使新余项在一个单元上满足更多的正交条件(称正交性修正),由此可导出许多全新的重要结果.这证实了近似正交方法具有新的生命力.现在称它为单元正交分析法,这是本书统一使用的方法.

至今为止,召开过两次关于有限元超收敛性的国际会议.第一次是1996年7月1～4日在芬兰Jyvaskyla大

学召开“有限元超收敛，后处理与后估计”会议，12 个国家 60 多位学者聚集一起，报告此课题的研究进展. 本书作者 1982 年出版的一本专著[48]中一幅插图（六面体的四面体剖分图，见本书封面勒口）有幸被选作会议会标. 第二次是 2000 年 3 月 16～30 日在美国 Berkeley 数学所召开有限元超收敛的研讨会，30 多位学者在一起深入探讨某些重要问题. 会议两主席 Babuska 教授与 Wahlbin 教授称，当前国际上有限元超收敛研究有中国、Ithaca（美国）与 Texas（美国）三个学派. 对中国学者的创造性工作给予了称赞. 2000 年 8 月在 Jyvaskyla 大学召开“有限元法：三维问题”国际会议，Brandts（荷兰）与 Krizek（捷克）的报告“三维有限元超收敛的历史与未来”[31]中称，“这里我们概述解决超收敛三种最有前途的最新技术，特别是他们对三维问题的潜力. 这三种方法起始或复兴于 90 年代. ①单元正交分析，…，②局部点对称网格，…，③基于计算机的方法，….”再次肯定了中国学派是当今国际上三个学派之一.

本书主要论述单元正交分析法，特别是中国学者在此领域的系统工作. 全书基本框架如下：在绪论中简述了国际上几种思想方法与学派，以及本书将概括的四大法则. 前 3 篇（共 9 章）的中心内容是对二阶问题逐次阐述这些法则. 第 1～3 章介绍均匀网格上几种常用单元类型的两类基本超收敛结构. 这是整个理论中最关键的内容. 第 4 章讨论曲边区域及 Green 函数，是进一步研究所必须的准备. 第 5 章将上述超收敛结果推广到一般区域和剖分. 第 6 章用局部加密网格处理奇异解. 第 7 章讨论常微分方程的初值问题，为抛物与双曲问题时间离散的基础. 第 8

～9 章将前述结果推广到线性抛物与双曲问题，以及非线性问题. 这里许多估计是关键的. 以后，第 4 篇讨论相对独立的其他问题. 第 10 章研究四阶问题，并涉及非协调元. 第 11 章讨论 L^2 投影. 最后第 12 章对国际上其他几种重要的超收敛方法与学派作简要的综述. 书中还附有许多图表及数值例子. 参考文献仅列出了直接与本书有关的论文与著作. 更详尽的材料请参看 Krizek-Neittaanmaki 的评述论文[172]，Wahlbin 的专著[278]，以及作者前一本专著[73]中所列出的文献.

由此看到，本书中能有如此丰富多彩的结果，是许多国家的学者，特别是中国学者辛勤劳动的结晶. 作者感谢许多国内外朋友在此领域所作的贡献. 在这里，我应该感谢林群在有限元外推法及插值有限元的首创性工作和他在推动我国高精度研究所作的巨大努力. 我还要感谢谢干权[292](1975)计算黄河某拱坝的工作，以及朱起定对三角形二次元等的研究，许进超对分块均匀网格及两网格法的研究，吕涛在外推及分裂外推的研究，黄云清在凹角域上超收敛及外推研究，周爱辉与严宁宁对插值有限元的研究，杨一都对特征值问题的研究，张智民在 Z-Z 格式及强超收敛性的研究. 我要特别感谢与黄云清、舒适、金继承的长期富有成效的合作. 我还要感谢许多青年学者，王宏、李潜、张铁等，以及我在湘潭大学和湖南师范大学的许多研究生的合作与帮助.

我还应感谢许多同行与朋友的帮助. 在国外有 Thomee，Babuska，Wahlbin，Bramble，Schatz，Sloan，Douglas，Dupont，Krizek，Neittaanmaki，Larsson，Carey，Lazarov，Brenner，Chow S. S，许进超、张乃莹、张智民、林

延平、王军平等.在国内应感谢石钟慈、李荣华、黄明游、黄鸿慈、康立山、周叔子、石济民、林振宝等.还应感谢许进超、王军平在国际交流方面所作的努力.

最后,作者对国家自然科学基金委员会及湖南省教育厅长达20年的资助表示感谢,没有他们支持,本书阐述的方法与理论不可能问世.还应特别感谢国家科技部国家重点基础研究计划近年的大力资助,使本研究能大力推进.作者也对湖南科学技术出版社编审胡海清为组织出版此书所作的努力与帮助表示感谢.

本书可供计算数学、应用数学、计算物理、计算力学等专业的高年级学生、研究生及教师阅读,也可供从事有限元计算的科技人员参考.并愿他们将有限元的超收敛方法应用于自己的实践中.

由于篇幅限制,许多相关内容如混合元、外推、校正、后估计等,只好舍弃.时间仓促,撰写中疏漏之处在所难免,祈望指正.

作　者

2001年1月于长沙

目录

CONTENTS

绪　论

STRUCTURE THEORY OF SUPERCONVERGENCE OF FINITE ELEMENTS

有限元法是求微分方程数值解的一种重要方法，它已广泛应用于解算大规模科学与工程问题，并取得了巨大成就. 大家知道，现代科学技术面临着求解高维、非线性及奇异解等困难问题，要求计算规模越来越庞大，提高有限元精度的两种经典措施：加密网格与增高有限元次数，实际上都受到严重限制. 如三维弹性力学组，目前一般只能限于每个方向为 50～100 个节点的计算规模. 因此，如何在不增加或少增加计算量的情况下，进一步显著提高有限元的精度，从而可解决更大规模更复杂的问题（并从已求得的数据真实地估计其误差，即后验误差估计），这一直是人们十分关心的重要问题，而有限元的超收敛方法正是实现这种进一步显著提高有限元精度的有效途径.

§0.1 研究超收敛的若干方法

早在 1967 年 Zienkiewicz-Cheung 的名著“结构与连续体力学中的有限元法”已提到在计算中发现一次元的导数在某些特殊点上精度特别好，因此利用它可在不增加计算量的情况下显著提高精度. 1972 年 Douglas 等开始理论研究，把这种奇特现象称为超收敛性（Superconvergence）. 至今近 30 年，经各国学者积极研究，成果累累，发表论文数百篇. 总观之，大致有五种思想方法与风格，

即 Bramble-Schatz(1974)与 Thomee(1977)的局部平均方法，Douglas-Dupont-Wheeler(1974)的张量积方法，Zlamal(1977)等开端且由中国学者陈传淼等(1978)独立发现并逐渐完成的单元正交分析法，近年由 Schatz-Sloan-Wahlbin(1995)提出的局部对称理论，以及由 Babuska-Strouboulis 等(1995)开创的基于计算机的搜寻研究．本书主要论述单元正交分析方法，特别是中国学者在这方面的系统工作，其他方法将在第 12 章简要综述．

设 Ω 是 d 维有界域，其边界为 $\Gamma=\partial\Omega$．记 Sobolev 空间 $W^{k,p}(\Omega)$ 的范数为

$$\|u\|_{k,p,\Omega}=\begin{cases}\left(\int_{\Omega}\sum_{|\alpha|\leqslant k}|D^{\alpha}u(x)|^{p}\mathrm{d}x\right)^{1/p}, & 1\leqslant p<\infty,\\ \max\limits_{|\alpha|\leqslant k}\ \operatorname*{ess.sup}\limits_{x\in\Omega}|D^{\alpha}u(x)|, & p=\infty.\end{cases}$$

特别地，常可省去下标 Ω．当 $p=2$ 时也可省去下标 p，简记 $\|u\|_{k}=\|u\|_{k,2,\Omega}$ 及 $H^{k}(\Omega)=W^{k,2}(\Omega)$．记子空间

$$S_0=H_0^1(\Omega)=\{u\in H^1(\Omega),\text{在 }\Gamma\text{ 上 }u=0\}.$$

在 Ω 上考虑二阶椭圆问题

$$\begin{cases}Au=-D_j(a_{ij}(x)D_iu)+a_0(x)u=f,\text{在 }\Omega\text{ 中},\\ \mathrm{BV1}: u=0,\text{在 }\Gamma\text{ 上},\end{cases}\tag{0.1.1}$$

或寻求弱解 $u\in S_0$ 使

$$A(u,v)=(f,v),v\in S_0.\tag{0.1.2}$$

我们总假定双线性型

$$A(u,v)=\int_{\Omega}(a_{ij}D_iuD_jv+a_0uv)\mathrm{d}x$$

有界且 S_0-强制，

$$|A(u,v)|\leqslant C\|u\|_1\|v\|_1,$$

$$A(u,u)\geqslant\nu\|u\|_1^2,u\in S_0,\nu>0.$$

若 Ω 为光滑域，由偏微分方程理论可知，对任何整数 $l\geqslant2$，有解 $u\in H^{l}(\Omega)$，且有正则性估计

$$\|u\|_{l}\leqslant C\|f\|_{l-2}.\tag{0.1.3}$$

若 Ω 是二维凸域(例如凸角域)，上述结论对 $l=2$ 仍有效．