应用力学最新进展

（上　册）

美国机械工程师协会　编

科学出版社

应用力学最新进展

（上 册）

美国机械工程师协会 编

郭仲衡 等译

科 学 出 版 社

1 9 8 7

内 容 简 介

本书(上、下册)是应用力学一些重要领域(包括最近几年发展起来的崭新领域)的优秀综述评论文集. 上册主要涉及理性力学、非线性力学、振动理论、流体力学、流变学、生物力学等领域.

本书可供力学工作者、力学专业研究生和高年级大学生、有关工程技术人员和应用数学工作者参考.

JOURNAL OF APPLIED MECHANICS, 12, 1983

——50 th Anniversary Issue

Transactions of the American Society of Mechanical Engineers

应用力学最新进展

(上 册)

美国机械工程师协会 编

郭仲衡 等译

责任编辑 李成香 晏名文

科学出版社 出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1987年1月第 一 版 开本：787×1092 1/34

1987年1月第一次印刷 印张：14 1/4

印数：0001—4,400 字数：325,000

统一书号：13031·3389

本社书号：5004·13—2

定价：3.35 元

出版者的话

最近几十年，力学得到了巨大的发展，不仅其理论基础得到了加强和深化，而且其研究对象和范围也有了很大扩展．由于各种先进技术手段的出现，特别是电子计算机的广泛使用，人们用力学的理论和方法阐明自然过程和解决复杂工程技术问题的能力得到了极大提高．古老的力学再次焕发出青春的活力．实践证明，力学这个大学科在促进科学技术进步和四化建设中的作用是举足轻重的．

遗憾的是，迄今为止国内外还很少有反映现代力学最新重要进展的书籍．1983年12月，美国机械工程师协会(ASME)为了纪念《应用力学杂志》(*Journal of Applied Mechanics*)创刊五十周年，特邀请几十位知名学者、权威和后起之秀，撰写了29篇优秀的综述评论，作为一个特集出版，以反映应用力学许多重要领域(包括最近几年发展起来的崭新领域)的研究现状、存在的问题和今后的方向．为了及时反映国外的力学动态，我们组织翻译出版了这个特集．这对于广大力学工作者、力学专业的研究生、高年级大学生以及有关工程技术人员了解学科动态、选择科研方向或课题是很有益处的，对于应用数学工作者也可资借鉴．

当然，本文集也有局限性，特别是一些重要的新兴边缘学科，例如爆炸力学、地球物理流体力学等没有包括进去．

在本文集翻译过程中，得到了我国老一辈著名力学家和许多中青年力学工作者的大力支持，在此谨表谢意．

鉴于原文篇幅较大，我们将文集的题目大体按学科重新

作了编排，分上、下两册出版．上册包括理性力学、非线性力学、一般力学、振动理论、流体力学、流变学、生物力学等领域的文章；下册主要涉及弹塑性理论、断裂力学、实验力学、优化设计、稳定性理论、广义有限元法等方面．

最后应该指出，由于译校和编辑加工都很匆促，文中不妥之处在所难免，请予指正．

1985 年 9 月

目　　录

连续介质热动力学

P. Germain*　Q. S. Nguyen**　P. Suquet***

引　　言

五十年前，"连续介质力学"一语尚未被广泛应用. 在以 Rivlin 和 Truesdell 的开创性工作为代表的战后文献里，连续介质力学得到了显著的重视. 数年后，在这新领域工作的许多学者认识到，热力学将在连续介质力学里起中心作用. 如果说连续介质力学的重要性在五十年代显著地增长了，那么就可以说，连续介质热动力学在六十年代变成了吸引众多学者的流行课题.

许多大科学家，如 Rayleigh 勋爵（在粘性流）和 Kelvin 勋爵（在热电效应），早已在自己的工作里用到了"连续介质热动力学"（虽然没有直接用这个词）. 这里应特别提到 Duhem 的工作[1]，它清楚地表明了热动力学在连续统物理中的作用. 当时，他的思想并未得到应有的重视. 但这思想在 Jouguet 和 Roy 的工作里得到了反映. 还可给出在化学领域的另一些例子：为建立不可逆过程热动力学奠定基础的 de Donder 的工作以及 Onsager 和 Casimir 的基本结果. 一系列已研究过的

* Laboratoire de Mécanique Théorique, P. et M. Curie, Paris, France.
** Laboratoire de Mécanique des Solides, Ecole Polytechnique, Palaiseau, France.
*** Laboratoire de Mécanique Théorique, P. et M. Curie, Paris, France.

情况使连续介质热动力学在六十年代大发展．大发展的另一原因是：人们广泛地希望完全一般性处理这个领域，希望显示它的基本假设和所包含概念的意义，以及充满信心地希望导出可用于任何物理问题的方法．

连续介质热动力学最近二十年的大发展引起了许多持续至今的争论[1]．一种称为“理性热动力学”的流派认定，要将热动力学概念用于运动着的连续介质，必需对最初用于讨论平衡系统的经典热动力学作重新考虑和问题的再建立．另一种流派则坚持，对这些概念无需作重大改动．前一流派批评后者缺乏雄心壮志和胆略；前者倾向于把“熵”和“绝对温度”，类似于动力学的“力”，看作基本概念．后者则争辩说，在平衡及其邻近状态之外，这些概念已没有物理内容．本文将对这些重要问题作某些讨论，但不附和争论的任何一方．我们认为，这只是一个爱好不同的问题：一方面是对清晰的和严格的数学提法的要求，另一方面是和物理实际保持紧密联系的愿望．我们倾向于强调，我们认为是连续介质热动力学的主目标的那个侧面，即构造尽量简单并能够满足如下条件的模型[2]：

(i) 解释各种实验观察到的现象的定性性态；

(ii) 给出可和测量比较的定量估计；

(iii) 使人们建立适定的数学问题，并研究其解（包括解的发展和对参数变化的稳定性）

我们来简述本文的各主要部分． 第一节讨论基本方程．第二节论述关于推广第二定律的某些概念．将提及某些重要问题和它们按理性热动力学的精神的答案． 第三节描述“局部伴随平衡态”方法． 这方法在后面将以最方便的形式被应

---

1) 参阅，例如，最近在 Bulletin of the Institute of Mathematics and Applications 的讨论．见参考文献[2]

2) 要强调的是，我们涉及的是模型；并不指望它们具有普适的有效性．

用，即可从两个标量值凸函数：热动力学势和耗散伪势，导出本构方程的情形．第四节给出某些经典应用（主要在固体力学）．第五节引入整体状态变量的概念，并用某些合适的例子说明其用途．讨论均质化和热动力学的第六节通过揭示细、宏观描述间的关系进一步窥察局部伴随平衡态模型的逻辑协调性和它的物理解释．最后，第七节给出分岔和稳定性理论的若干知识．它们表明，本文所强调的模型对曾被称为第三主要目标的问题提供第一有意义的贡献．

I. 热动力学的基本方程

1　**关于经典热动力学的若干论点．**经典热动力学讨论的是平衡系统．通常可用有限个标量来刻划这个系统．或者说，这些标量定义系统的状态 Σ．按定义，系统的任何热动力学性质由一个定义在状态空间 V 的函数所代表．

经典热动力学显示出源于若干命题或定律的有关任何热动力学系统的性质：由第“零”定律得经验温度 θ；由第一定律得内能 E 和热量，这个热量是系统和外界交互作用后在两个状态的转换或过程中所获得的．可逆过程可由 V 的一段弧代表．在弧上任意点 Σ 的所有热动力学函数具有通常的物理意义．从而，E 的微分 dE 是两个微分形式之和：元功和系统在元可逆过程中所获得的元热量．

第二定律有众多的形式．至于哪一个形式为最优还在进行讨论．Caratheodory 的提法基于一个绝热过程不可达性的命题．因此，可以证明存在一个普适的（绝对）温度 T 和一个普适的熵 S，使得 TdS 是一个可逆过程所获得的元热量．而且，对一个绝热过程 $\Sigma_1 \to \Sigma_2$，可证 $S(\Sigma_2) \geqslant S(\Sigma_1)$．

有些人说，经典热动力学应称为热静力学，因它只处理平

衡状态．另一些人则不同意地指出，在大多数经典定义里事实上已包含了时间；命题“这一系统处在平衡状态”和刻划系统状态Σ的变量的选择依赖于观察者所感兴趣的特征时间．只有我们仅将热静力学一词局限用在伴随V的一个状态Σ的所有特性，如E，S和T，具有它们的全部物理含义时，热静力学一词才是适当的．下述给出称为内变量的原始思想的例子显示出可能被引进来的微妙差异．让我们取一个系统[3]，它的状态Σ可用E和形变变量X_i定义．一个连续(对时间而言)过程可在V有一个像——可定义$E(t)$，$X_i(t)$和$S(t)$．一般来说，对这样一个过程，函数$S(\Sigma)$不具有物理意义．但是，如果把V嵌入在一个较大的空间$\hat{V}$，则这同一个过程有可能看作是可逆的．这个过程在V可看作为热动力学过程，而在$\hat{V}$则为热静力学过程．内能在V和$\hat{V}$的意义是相同的(尽管解析表达式不同)；熵可能只在$\hat{V}$有定义，而$\hat{S}(\hat{\Sigma})$与$S(\Sigma)$没有任何关系．

2　**基本方程．**现考虑一个相对于惯性系R运动的连续物质系统Ω．基本方程表现的定律能与物质具体性质无关地完全刻划物理系统．它们总是包含质量，动量和能量守恒律．若只涉及热-力学的交互作用(正如在通常的经典连续介质力学里)，则这些守恒律就是基本方程．守恒律对Ω的任何子域D可象征性写成：

$$\frac{d}{dt}\int_D \mathscr{A}\,dv+\int_{\partial D} J_A\,d\sigma-\int_D \varphi_A\,dv=0. \tag{1}$$

众所周知[4]，对于三维区域：

A是对每单位质量守恒的量(向量或标量)，而$\mathscr{A}=\rho A$是每单位体积的量；d/dt或($\dot{}$)表示物质导数；

J_A是伴随通量(每单位面积和每单位时间)；

φ_A是补给(每单位体积和每单位时间)，它代表环境对Ω

的作用 ($\varphi_A = \rho S_A$);

作为结果:

J_A 对 n (∂D 的单位外法向) 是线性的, $J_A = j_A \cdot n$, 其中 j_A 是伴随通量张量或向量;

在 Ω 的每一点,下述方程成立:

$$\rho \dot{A} + \operatorname{div} j_A - \varphi_A = 0. \tag{2}$$

在 Ω 内间断面的每一点上,可以写出跳变条件.

能量守恒是热静力学第一定律的自然扩张; 物质导数代替差分,功率代替功,热量变化率代替热量,并且考虑到动能. 可将虚功原理用于实际运动而将 D 的动能的物质导数消去. 从而, D 上外力的功率 $P_{(e)}$ 消失. D 的热量变化率可假设为伴随通量 J_Q 和补给 φ_Q 的结果. 最终能量方程 (2) 可代之以:

$$\rho \dot{e} = \varepsilon_{(i)} + \operatorname{div} j_Q + \varphi_Q, \tag{3}$$

其中 e 是每单位质量的内能, $\varepsilon_{(i)}$ 是 (每单位体积) 内力功率的相反数或源于内力的(每单位体积)能量. (3) 中所包含的各量均是客观性的或标架无差异的.

(i) 在经典连续介质力学里,对于 Euler 表示

$$j_Q = -q, \quad \varphi_Q = r, \quad \varepsilon_{(i)} = \operatorname{tr}(\sigma \cdot D), \tag{4}$$

其中 D 是应变率张量, 即速度梯度的对称部分. 用符号表示守恒律可写成:

	$\mathscr{A} = \rho A$	j_A	$\varphi_A = \rho S_A$
质量	ρ	0	0
动量	ρv	$-\sigma$	f
能量	$\rho\left(e + \frac{1}{2}v^2\right)$	$q - \sigma \cdot v$	$f \cdot v + r$

对于 Lagrange 表示 (x_i 标准正交 Euler 变量，$\hat{x}_\alpha$ 标准正交 Lagrange 变量)，

$$x_i = \phi_i(\hat{x}_\alpha, t) \quad i, \alpha = 1,2,3 \tag{5}$$

描述运动. 守恒律列在参考构形 $\hat{R}$ 的固定区域上: A, S_A 又可被应用；但质量密度 $\hat{\rho}$ ($\hat{R}$ 的每位体积的质量密度)，$\hat{R}$ 的每单位体积的各量，通量向量或张量 $\hat{j}_A$ 应改变，以便得到类似于(2)的方程. 类似地，按照(3)的 Lagrange 写法，我们应写:

$$\hat{\varepsilon}_{(i)} = \operatorname{tr}(t \cdot \dot{L}), \quad \rho^{-1}\varepsilon_{(i)} = \hat{\rho}^{-1}\hat{\varepsilon}_{(i)}, \tag{6}$$

其中 t 是(第二) Piola-Kirchhoff 应力张量，L 是 Green-Lagrange 应变张量.

(ii) 如果考虑到电磁交互作用，在守恒律里，必需将电磁效应加入到动量和能量的通量和补给中，并且还要将 Maxwell 方程添进基本方程，例如可参阅 [5][1].

(iii) 流体的混合物是另一个要求细致描述的例子. 我们引进类似于守恒律(1)，但在右端加上一个添增项的平衡方程:

$$\frac{d}{dt}\int_D \mathscr{B} dv + \int_{\partial D} j_B \cdot n d\sigma - \int_D \varphi_B dv = \int_D \mathscr{B}^* dv. \tag{7}$$

补给 φ_B 来源于 Ω 的环境；相反地，$\mathscr{B}^* = \rho B^*$ 产生于系统内部. $\mathscr{B}^*$ 是每单位质量的添增变化率. 混合物每组分 $(\lambda = 1,2,\cdots,\nu)$ 的平衡方程可用符号写成(对 λ 不求和):

---

1) 此文表明在处理复杂情况时虚功方法的用处.

$\mathscr{B}=\rho B$	j_B	φ_B	$\mathscr{B}^*=\rho B^*$
ρ^λ	0	0	τ^λ
$\rho^\lambda v^\lambda$	$-\sigma^\lambda$	f^λ	m^λ
$\rho^\lambda\left[e^\lambda+\frac{1}{2}(v^\lambda)^2\right]$	$q^\lambda-\sigma^\lambda\cdot v^\lambda$	$r^\lambda+f^\lambda\cdot v^\lambda$	l^λ

混合物(作为一个整体)的守恒律导致:

$$\sum_{\lambda=1}^{\nu}\tau^\lambda=0,\quad \sum_{\lambda=1}^{\nu}m^\lambda=0,\quad \sum_{\lambda=1}^{\nu}l^\lambda=0 \tag{8}$$

像以前一样,这些整体守恒律可按下述定义写成:

$$\left.\begin{aligned}
&\rho=\sum_{\lambda=1}^{\nu}\rho^\lambda,\ \rho_v=\sum_{\lambda=1}^{\nu}\rho^\lambda v^\lambda,\ u^\lambda=v^\lambda-v,\\
&\rho e=\sum_{\lambda=1}^{\nu}\rho^\lambda\left[e^\lambda+\frac{1}{2}(u^\lambda)^2\right],\ \sigma=\sum_{\lambda=1}^{\nu}(\sigma^\lambda-\rho^\lambda u^\lambda\otimes u^\lambda),\\
&q=\sum_{\lambda=1}^{\nu}\left\{q^\lambda+\rho^\lambda\left[e^\lambda+\frac{1}{2}(u^\lambda)^2\right]u^\lambda-\sigma^\lambda\cdot u^\lambda\right\}.
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

特别地,应将 $\varphi_Q=r=\sum_{\lambda=1}^{\nu}(r^\lambda+f^\lambda u^\lambda)$ 代入(3).

u^λ 是扩散速度. 如果有 p 个独立的化学反应, Λ^k, $k=1,2,\cdots,p$, 是它们的反应速率密度,并且若 $\gamma^{\lambda,k}$ 是第 k 反应中第 λ 组分的定量系数(M_λ 是分子重量),则

$$\tau^\lambda=\sum_{k=1}^{p}(\gamma^{\lambda,k}M_\lambda\mu)\Lambda^k, \tag{10}$$

其中 16μ 是氧原子的质量. 于是, 这 p 个速率密度 Λ^k 确定 ν 个质量增添项 τ^λ.

混合物的基本方程有哪些呢? 答案有多种. 一般都同

意：存在一个对混合物和所有组分有效的经验温度θ；因此自然地只能写出一个整体能量守恒律．第一种选择是取下述$4\nu+1$个标量值方程作为基本方程：

$$\left.\begin{aligned} &\dot{\rho}^\lambda + \rho^\lambda \mathrm{div} v^\lambda = \tau^\lambda, \\ &\rho^\lambda \dot{v}^\lambda - \mathrm{div}\sigma^\lambda = m^\lambda + f^\lambda, \\ &\rho\dot{e} = \mathrm{tr}\{\sigma\cdot D\} - \mathrm{div} q + r. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

另一种较粗的，但更经典的选择是取$\nu+4$个方程作为基本方程，以一个整体动量平衡方程代替（11）中的ν个动量方程$(11)_2$.

3　**本构方程**．选定基本方程以后，就要分析所包含的各量．要从中认定某些作为主未知量，余下的称为余未知量．为了解决问题，必须用描述物性的法则——本构方程——来表达余未知量．这可用某些例子来解释．

在经典连续介质力学里，可以按表示方式不同而取下面的一组作为主未知量：

$$\left.\begin{aligned} &[\rho(x_k,t),\ v_i(x_k,t),\ \theta(x_k,t)] \quad 或 \\ &[\rho(\mathscr{X}_\alpha,t),\ \phi_i(\mathscr{X}_\alpha,t),\ \theta(\mathscr{X}_\alpha,t)]. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

辅助未知量是可直接从主未知量计算的量：加速度$\dot{v}$，变形梯度，应变率张量，…．从基本方程可以看到，余未知量是

$$[e,\sigma,q] \text{ 或 } [e,t,\hat{q}]. \tag{13}$$

这些余未知量——估且记为C——必须通过本构函数用主未知量表出．本构函数必须满足某些熟知的条件：因果性，局部性，客观性或物质标架无差异性[1)]和物质对称性．

如果我们用符号写出

$$C(\mathscr{X}_\alpha,t) = \mathop{\mathscr{F}}_{t'\leqslant t}\{\Phi(\mathscr{X}_\alpha,t'),\theta(\mathscr{X}_\alpha,t');\mathscr{X}_\alpha\}, \tag{14}$$

1）标架无差异性并不总是以最一般形式被采用的，例如参阅[2]．我们强调指出，本文考虑的模型有效地基于这个工作性假设．实验研究表明，这工作性假设可以放心地应用于大多数工程问题．

$\mathscr{F}$ 是依赖于系统在时刻 t 以前(包括 t)的历史的因果泛函. 注意，基本方程对 $\mathscr{F}$ 不加进一步限制：不管主未知量的值为何，不管 $\mathscr{F}$ 的形式为何，总可适当选择补给 f 和 r 使方程得到满足.

对于具有 $4\nu+1$ 个基本方程 (11) 的液体混合物，主未知量是

$$\rho^\lambda(x_k,t),\quad v_i^\lambda(x_k,t),\quad \theta(x_k,t), \tag{15}$$

而余未知量则是

$$e,\sigma^\lambda,q,m^\lambda,\Lambda^k;\quad \lambda=(1,2,\cdots,\nu),\quad k=(1,2,\cdots,p). \tag{16}$$

如果混合物由 $\nu+4$ 个方程较粗地描述，则主和余未知量分别是

$$\rho^\lambda,v_i,\theta;\quad e,u^\lambda,\sigma,q,\Lambda^k. \tag{17}$$

在每一种情形，满足前述条件的本构方程必须用函数或泛函将余未知量和主未知量联系起来.

II. 熵，绝对温度和基本不等式

如果适当推广第二定律，连续介质热动力学就对本构方程添加新的重要限制. 连续介质热动力学的主要目标是提供建立满足这些新限制的本构方程的方法.

可以从许多不同角度去推广第二定律. 在下面各小节，我们首先考虑熵和绝对温度或多或少地被接受为原始概念的情形，然后只有熵是原始概念的情形，最后考虑在不采用这些假设下探讨问题.

1 Clausius-Duhem 不等式. 理性热动力学的第一种提法. 在经典连续介质力学里，只要比熵 s 和绝对温度 T 被定义为或被看成原始概念，人人都会同意把熵增速率 σ^* 写成

$$\rho T\sigma^* = \varepsilon_{(i)} + \rho(T\dot{s}-\dot{e}) - q\cdot\nabla(\log T), \tag{18}$$

其中 $\varepsilon_{(i)}$ 已在 (4) 定义. 注意, (18) 中并不出现补给. 作为第二定律的表达的 Clausius-Duhem 不等式说: σ^* (从而 (18) 的右端)是非负的.

理性热动力学的第一种提法[6], 把 s 和 T 看作原始概念. 一个允许过程是基本方程的解,如果满足 Clausius-Duhem 不等式的本构法则被考虑进去. 例如,对于简单物质,余未知量是 w, s, σ, q ($w = e - T$ 是自由能),并表为泛函:

$$C = \underset{t' \leqslant t}{\mathscr{F}} \{F(\mathfrak{x}_\alpha, t'), T(\mathfrak{x}_\alpha, t'), g(\mathfrak{x}_\alpha, t'); \mathfrak{x}_\alpha\}, \qquad (19)$$

其中 $g = \nabla T$. 为了揭示加于允许过程的限制, 我们将表达式 (19) 代入 (18). 假设各 $\mathscr{F}$ 是 Fréchet 可微, 且其自变量 F, T 和 g 有时间导数(至少是右导数),并注意到, 在每时刻 t 可独立地选择这些导数,则可证明, 在 (18) 式右端的这些导数的系数必须为零. 这个分析提供使一个过程为允许的必要和充分条件.

这里我们只好满足于这个总轮廓, 它曾成功地应用于各种情形,使用时要严格、小心.一般的性质已得到证明,渐近分析重新证实了经典热静力学的结果. 这些严格的成就使人们增加了对这个有充分根据的数学理论的信赖.

2 **熵平衡假设**. 按照 Müller 的理论[7,8], 我们可以仅假设 s, 而非 T, 是原始量, 它满足像 (7) 那样的平衡方程 (令 $B = s$, $B^* = \sigma^*$). 更确切地,我们假设

(a) 对所有允许热动力学过程,熵增速率 σ^* 是非负的;

(b) 像 s 一样,伴随熵通量 j_s 是一个本构量;

(c) 补给 φ_s 由其他补给线性表出,系数是本构量;

(d) 通过间断面 Σ 的熵通量的法向分量满足常规的连续条件. 例如,若[·]表示一个量的跳变且系统处在静止状态, 则 $[j_s \cdot \boldsymbol{n}] = 0$, 若 $[\theta] = 0$.

从这些十分自然的假设出发，在许多情况下可以证明绝对温度的存在性，找到 j_s 和 φ_s 的准确表达式以及对本构方程的限制.

推导这些结果的方程包含两步. 首先写出，场的熵增 σ^* 不能是负的. 这些场受到它们是基本方程的解这个条件所限制. Liu 证明，可以用作为新的本构变量[1)]的 Lagrange 乘子来解除这些限制. 这样就得到 σ^* 的表达式. 不管主未知量为何，σ^* 必须是非负的. 考虑到所假设的本构方程，σ^* 的表达式线性地包含一系列本构变量的导数. 这些导数的系数必须是零，因在每时刻 t，可以独立地选取这些导数的值. 第二步是应用前述条件 (d)，它使我们能够通过考察平衡的简单情形显示某些量的普适性质和物理含义.

要想详细了解这个严格而十分有趣的方法，必须去参阅文献；我们将只对某些应用作评论.

在热弹性[9]中，应用第一步得到

$$\dot{s} = \Lambda(\theta)[\dot{e} - \rho^{-1}\mathrm{tr}\{t \cdot \dot{L}\}],$$

$$j_s = \Lambda(\theta)q, \quad \frac{d\Lambda}{d\theta} q \cdot \nabla\theta \geqslant 0;$$

这里 $\Lambda(\theta)$ 是唯一不为零的 Lagrange 乘子. 用第二步可得到结论：Λ 是一个易于辨认为 T^{-1} 的普适函数. 由此可得全部经典结果.

非粘性流体混合物是一个很有教益的应用. 分析和结果均依赖于所选择的基本方程（参阅 I.2). 如果取 (11)，则最好不用 (16) 而宜选用

$$e_I, \sigma^\lambda = -p^\lambda, q_I, m_I^\lambda = m^\lambda - \tau^\lambda v$$

作为本构变量，其中“内禀”积分能量 e_I 和热通量 q_I 定义如

1) 在大多数情况下，它们与补给无关.