数学基础知识丛书

指数与对数

沈 超

江苏教育出版社

指数与对数

沈　超

江苏教育出版社

内 容 提 要

这套《丛书》共二十四册，系统介绍数学基础知识和基本技能，供中学数学教师、中学生以及知识青年、青年工人阅读。

《丛书》根据现行全日制十年制学校《中学数学教学大纲》（试行草案）精神编写，内容上作了拓宽、加深和提高。《丛书》阐述的数学概念、规律，力求符合唯物辩证法，渗透现代的数学观点和方法，以适应四个现代化的需要。为了便于读者阅读，文字叙述比较详细，内容由浅入深，由易到难，循序渐进，习题、总复习题附有答案或必要的提示。

本书分六个部分，指数概念的推广、对数、指数函数、对数函数、幂函数、指数方程与对数方程，共二十七节。最后有小结。

本书原由江苏人民出版社出版，这次重印改为江苏教育出版社出版。

指数与对数

沈　超

江 苏 教 育 出 版 社 出 版

江苏省新华书店发行　　南通韬奋印刷厂印刷

开本 787 × 1092 毫米　1/32　印张 4.5　字数 99,000

1978 年 12 月第 1 版　1984 年 4 月第 2 次印刷

印数 250,001－277,300

书号：13351·007　　定价：0.33 元

责任编辑　蓝公浚　何震邦

目 录

一、指数概念的推广

二、对 数

三、指数函数

四、对数函数

五、幂函数

六、指数方程与对数方程

一、指数概念的推广

§1 指数概念推广的原则

生产的发展，推动了数学的发展。我们已经知道正整数指数幂，但是仅有正整数指数幂是不能适应生产发展的需要的，有必要将指数概念加以推广。下面用一个例子来说明。

某地发展林业生产，已培育的树林估计有木材10万立方米，每年计划增殖10%，问几年后才能达到生产木材15万立方米？

设x年后才能达到生产木材15万立方米．根据题意，

一年后生产木材可达到

$$100000(1+10\%)=100000\times1.1(\text{立方米}),$$

二年后生产木材可达到

$$100000\times1.1(1+10\%)=100000\times1.1^2(\text{立方米}),$$

依此类推，得

x年后生产木材可达到100000×1.1^x(立方米)。

由此，列得方程

$$100000\times1.1^x=150000,$$

即

$$1.1^x=1.5.$$

我们知道，1.1、1.1^2、1.1^3、1.1^4、……都不可能等于1.5，也就是说，1.5不是1.1的正整数指数幂．因此，要解决这类问题，就必须把指数概念加以推广。

那末，根据什么原则来推广指数概念呢？

我们知道，正整数指数幂有下面五种指数运算法则：

（1）$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$；

（2）$(a^m)^n = a^{mn}$；

（3）$(ab)^n = a^n b^n$；

（4）$a^m \div a^n = \begin{cases} a^{m-n}, & (m>n) \\ 1, & (m=n) \\ \dfrac{1}{a^{n-m}}, & (m<n) \end{cases}$ $(a \neq 0)$

（5）$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$；$(b \neq 0)$

其中 a、b 是任意实数，m、n 是正整数。

正整数指数幂这五种指数运算法则在运算中是起着一定作用的。例如，在有理式的运算中，就要用到这五种指数运算法则。为此，指数概念的推广，应以推广后的指数幂也能适用这五种指数运算法则为原则。

下面我们将在正整数指数幂的基础上分三步把指数概念推广到实数指数幂：

1．把指数概念推广到整数指数幂——定义零指数幂与负整数指数幂；

2．把指数概念推广到有理数指数幂——定义分数指数幂；

3．把指数概念推广到实数指数幂——定义无理数指数幂。

§2 零指数幂与负整数指数幂

指数运算法则(4)有三种情况，用起来很不方便.我们就利用指数运算法则(4)来定义零指数幂与负整数指数幂，从而把指数运算法则(4)的三种情况统一起来。

1. 零指数幂

在指数运算法则(4)中，当 $m>n$ 与 $a\neq 0$ 时，$a^m\div a^n=a^{m-n}$（这里$m-n$ 是一个正整数），这就是说：**同底数幂相除，底数不变，指数相减.**

如果当 $m=n$ 时亦按此规律进行计算，就得到

$$a^m\div a^n=a^n\div a^n=a^{n-n}=a^0,$$

这样就出现了零指数.

同时，在指数运算法则(4)中，当 $m=n$ 时，

$$a^m\div a^n=a^n\div a^n=1.$$

比较这两个式子，我们规定

$$a^0=1. \qquad (a\neq 0)$$

即：**任何不等于零的实数的零指数幂等于1.**

例如 $2^0=1$，$\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^0=1$，$(x+y)^0=1$ $(x\neq -y)$.

应注意在指数运算法则(4)中，因为零不能作除数，所以必须 $a\neq 0$、因此，我们约定

零的零指数幂没有意义.

现在需要验证五种指数运算法则对这样规定的零指数幂也适用.下面只就 m 是正整数、n 是零的情况加以验证，其它情况可按类似的方法进行验证（假定底数字母是不等于零

的实数）．

（1）$a^m \cdot a^n = a^m \cdot a^0 = a^m \cdot 1 = a^m = a^{m+0} = a^{m+n}$；

（2）$(a^m)^n = (a^m)^0 = 1 = a^0 = a^{m \cdot 0} = a^{mn}$；

（3）$(ab)^n = (ab)^0 = 1 = 1 \cdot 1 = a^0 \cdot b^0 = a^n b^n$；

（4）$a^m \div a^n = a^m \div a^0 = a^m \div 1 = a^m = a^{m-0} = a^{m-n}$；

（5）$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1 = \frac{1}{1} = \frac{a^0}{b^0} = \frac{a^n}{b^n}$．

2．负整数指数幂

在指数运算法则(4)中，当 $m<n$ 与 $a \neq 0$ 时，有

$$a^m \div a^n = \frac{1}{a^{n-m}}. \quad \text{（这里 } n-m \text{ 是正整数）}$$

同时，如果按“**同底数幂相除，底数不变，指数相减**”的规律来计算，就有

$$a^m \div a^n = a^{m-n} = a^{-(n-m)}, \quad \text{（这里 } -(n-m) \text{ 是负整数）}$$

这样就出现了负整数指数。

比较这两个式子，我们规定

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r}. \qquad (a \neq 0,\ r\text{是正整数})$$

即：**任何不等于零的实数的负整数指数幂等于同底数的正整数指数幂的倒数．**

例如　$2^{-1} = \frac{1}{2}$，　$a^{-7} = \frac{1}{a^7}$ $(a \neq 0)$，

$$(-\sqrt{3})^{-2} = \frac{1}{(-\sqrt{3})^2} = \frac{1}{3}.$$

同样约定

零的负整数指数幂没有意义.

现在需要验证五种指数运算法则对这样定义的负整数指数幂也适用. 下面只就 $m=-r$，$n=-s$（r、s是正整数）的情况加以验证，其它情况可按类似的方法进行验证（假定底数字母是不等于零的实数）.

（1）$a^m\cdot a^n=a^{-r}\cdot a^{-s}=\dfrac{1}{a^r}\cdot\dfrac{1}{a^s}=\dfrac{1}{a^{r+s}}$

$$=a^{-(r+s)}=a^{(-r)+(-s)}=a^{m+n};$$

（2）$(a^m)^n=(a^{-r})^{-s}=\dfrac{1}{(a^{-r})^s}=\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{a^r}\right)^s}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{a^{rs}}}$

$$=a^{rs}=a^{(-r)(-s)}=a^{mn};$$

（3）$(ab)^n=(ab)^{-s}=\dfrac{1}{(ab)^s}=\dfrac{1}{a^sb^s}=\dfrac{1}{a^s}\cdot\dfrac{1}{b^s}$

$$=a^{-s}b^{-s}=a^nb^n;$$

（4）$a^m\div a^n=a^{-r}\div a^{-s}=\dfrac{1}{a^r}\div\dfrac{1}{a^s}=\dfrac{a^s}{a^r};$

① 若 $s>r$，则有

$$a^m\div a^n=\frac{a^s}{a^r}=a^{s-r}=a^{(-r)-(-s)}=a^{m-n},$$

② 若$s=r$，则有

$$a^m\div a^n=\frac{a^s}{a^r}=1=a^0=a^{s-r}=a^{(-r)-(-s)}=a^{m-n},$$

③ 若 $s<r$，则有

$$a^m\div a^n=\frac{a^s}{a^r}=\frac{1}{a^{r-s}}=a^{-(r-s)}=a^{(-r)-(-s)}=a^{m-n},$$

因此，不论 r 与 s 大小如何，都有

$$a^m \div a^n = a^{m-n};$$

$$(5)\ \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{-s} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^s} = \frac{1}{\frac{a^s}{b^s}} = \frac{\frac{1}{a^s}}{\frac{1}{b^s}}$$

$$= \frac{a^{-s}}{b^{-s}} = \frac{a^n}{b^n}.$$

例1　化$\frac{4a^3b^2c}{2ab^5c}$为不含分母的式子．

解　$$\frac{4a^3b^2c}{2ab^5c} = 2a^{3-1}b^{2-5}c^{1-1} = 2a^2b^{-3}.$$

从例 1 可以看出，有了零指数幂和负整数指数幂的概念后，就可以把分式化成不含分母的式子．因而含有分式的式子，有时可以很方便地按照整式的运算法则进行运算，这样就把分式运算和整式运算的绝对界限打破了．

例如　$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 = (a+a^{-1})^2 = a^2 + 2a\cdot a^{-1} + (a^{-1})^2$$

$$= a^2 + 2 + a^{-2};$$

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(a-\frac{1}{b}\right) = (a+b^{-1})(a-b^{-1})$$

$$= a^2 - (b^{-1})^2 = a^2 - b^{-2}.$$

例2　证明　$\frac{x^{-k}}{y^{-k}} = \frac{y^k}{x^k}$.

证 $$\frac{x^{-k}}{y^{-k}}=\frac{\frac{1}{x^k}}{\frac{1}{y^k}}=\frac{1}{x^k}\cdot y^k=\frac{y^k}{x^k}.$$

从例2可以看出，有了负整数指数幂的概念后，一个分式的分母可以通过改变指数的符号写在分子里，分子可以通过改变指数的符号写在分母里，这样就把分式里的分子和分母的绝对界限打破了.

例 3 人们的眼睛可以看见的光线的波长，红光为 0.000077 厘米，紫光为 0.00004 厘米。把它们表示成具有一位整数的数与10的负整数指数幂的乘积的形式.

解
$$0.000077=7.7\times0.00001=7.7\times\frac{1}{100000}=7.7\times\frac{1}{10^5}=7.7\times10^{-5},$$

$$0.00004=4\times0.00001=4\times\frac{1}{100000}=4\times\frac{1}{10^5}=4\times10^{-5}.$$

从例3可以看出，有了负整数指数幂的概念后，可以把一个绝对值很小的数写成具有一位整数的数与10的负整数指数幂的乘积的形式，这在科学技术上常要用到，它可以简化写法和计算.

例4 电子的质量 $m_e=9.1085\times10^{-28}$（克），质子的质量 $m_H=1.672\times10^{-24}$（克）. 质子的质量是电子的质量的多少倍?

解 $$\frac{m_H}{m_e}=\frac{1.672\times10^{-24}}{9.1085\times10^{-28}}=\frac{1.672}{9.1085}\times10^{-24+28}$$

$$\approx 0.1836\times 10^4=1836.$$

答 质子的质量约为电子的质量的 1836 倍.

定义了零指数幂和负整数指数幂，指数概念就推广到整数指数幂，并且五种指数运算法则在底数 $a\neq 0$ 时，对于任意整数指数幂都成立.

练 习 1

1. 计算：

4^{-1}，10^{-3}，$(-1.001)^0$，1^{-7}，$\left(-\frac{1}{5}\right)^{-2}$，$\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$.

2. 求下列各等式中 x 的值：

（1） $1=10^x$；　　（2） $1=0.1^x$；

（3） $0.1=10^x$；　　（4） $0.01=10^x$.

3. 化简下列各式（用正整数指数幂表示）：

（1） $(x^4y^{-2})(x^{-2}y^{-3})$；　　（2） $(a^{-2}b^3x^{-1})^{-2}$.

§3 分数指数幂

首先分析下面根式的性质：

当 $a\geqslant 0$，

$$\sqrt[n]{a^{np}}=a^p，（n、p\text{ 都是正整数，且}n>1）\qquad(1.1)$$

$$\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}.（m、n、p\text{都是正整数，且}n>1）\qquad(1.2)$$

性质 (1.1) 告诉我们，**如果根式里被开方数的指数是根指数的倍数，且被开方数的底数是非负整数时，化简后得到的幂的指数就是用根指数除被开方数的指数所得的商.** 性质 (1.2) 告诉我们，**如果根式里被开方数的指数与根指数**

有公因数，且被开方数的底数是非负整数时，化简时只要把这个公因数约去. 这两个性质都和分数的约分相似.如果我们把这两个根式性质写成指数是分数的形式，利用分数的约分，就得到

$$\sqrt[n]{a^{np}}=a^{\frac{np}{n}}=a^p, \qquad (1.1')$$

$$\sqrt[np]{a^{mp}}=a^{\frac{mp}{np}}=a^{\frac{m}{n}}. \qquad (1.2')$$

这样在（1.2′）中就出现了正分数指数.

比较(1.1)和(1.1′)，(1.2)和(1.2′)，我们规定

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}. \quad (a\geqslant 0,\ m、n\text{是正整数，且}n>1)$$

即：任何非负实数的正分数$\frac{m}{n}$指数幂(m、n都是正整数，且$n>1$)等于这个数的 m 次幂的 n 次方根.

又当 $a>0$，m、n 是正整数，且 $n>1$ 时，有

$$\sqrt[n]{a^{-m}}=\sqrt[n]{\frac{1}{a^m}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$$

同时，如果把$\sqrt[n]{a^{-m}}$写成分数指数形式，就有

$$\sqrt[n]{a^{-m}}=a^{-\frac{m}{n}}.$$

这就出现了负分数指数.

比较这两个式子，我们规定

$$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}. \quad (a>0,\ m、n\text{ 是正整数，且 }n>1)$$

因此，负分数指数幂的规定，和负整数指数幂的规定相类似.

由于零不能作除数，所以约定

零的负分数指数幂没有意义.

例如 $100^{\frac{1}{2}}=\sqrt{100}=10$，$27^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{27^2}=9$，

$x^{\frac{4}{3}}=\sqrt[3]{x^4}\quad(x\geqslant 0)$；

$100^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{100^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{1}{10}$，$27^{-\frac{2}{3}}=\dfrac{1}{27^{\frac{2}{3}}}=\dfrac{1}{9}$，

$x^{-\frac{4}{3}}=\dfrac{1}{x^{\frac{4}{3}}}\quad(x>0)$。

现在需要验证五种指数运算法则对这样定义的分数指数幂也适用。下面只就 $m=\dfrac{p}{q}$，$n=\dfrac{r}{s}$（p、q、r、s 是正整数，且 $q>1$、$s>1$）这一情况加以验证，其它情况可按类似的方法进行验证（假定底数字母是大于零的实数）。

（1）$a^m\cdot a^n=a^{\frac{p}{q}}\cdot a^{\frac{r}{s}}=\sqrt[q]{a^p}\cdot\sqrt[s]{a^r}=\sqrt[qs]{a^{ps}}\cdot\sqrt[qs]{a^{qr}}$

$=\sqrt[qs]{a^{ps}\cdot a^{qr}}=\sqrt[qs]{a^{ps+qr}}=a^{\frac{ps+qr}{qs}}=a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}$

$=a^{m+n}$；

（2）$(a^m)^n=\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}}=\left(\sqrt[q]{a^p}\right)^{\frac{r}{s}}=\sqrt[s]{(\sqrt[q]{a^p})^r}$

$=\sqrt[qs]{a^{pr}}=a^{\frac{pr}{qs}}=a^{\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}}=a^{mn}$；

（3）$(ab)^n=(ab)^{\frac{r}{s}}=\sqrt[s]{(ab)^r}=\sqrt[s]{a^rb^r}=\sqrt[s]{a^r}\cdot\sqrt[s]{b^r}$

$=a^{\frac{r}{s}}\cdot b^{\frac{r}{s}}=a^nb^n$；

（4）$a^m\div a^n=a^{\frac{p}{q}}\div a^{\frac{r}{s}}=\sqrt[q]{a^p}\div\sqrt[s]{a^r}$

$=\sqrt[qs]{a^{ps}}\div\sqrt[qs]{a^{qr}}=\sqrt[qs]{a^{ps}\div a^{qr}}$

$$=\sqrt[qs]{a^{ps-qr}}=a^{\frac{ps-qr}{qs}}=a^{\frac{p}{q}-\frac{r}{s}}=a^{m-n};$$

（5）$\left(\frac{a}{b}\right)^{n}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{r}{s}}=\sqrt[s]{\left(\frac{a}{b}\right)^{r}}=\sqrt[s]{\frac{a^{r}}{b^{r}}}$

$$=\frac{\sqrt[s]{a^{r}}}{\sqrt[s]{b^{r}}}=\frac{a^{\frac{r}{s}}}{b^{\frac{r}{s}}}=\frac{a^{n}}{b^{n}}.$$

在引进分数指数后，幂和根式这两个互为相反的概念就可以统一起来了，根式的运算可以转化成幂的运算，从而能使计算较为简便.

例5　用指数运算法则简化下列各根式（根号内的字母都假定是正的）：

（1）$\sqrt[3]{a^{5}}$；　　　　（2）$\sqrt[4]{\left(\frac{16x^{-4}}{81y^{4}}\right)^{3}}$；

（3）$\sqrt{125}\cdot\sqrt[4]{5}$；　　　　（4）$\sqrt{\frac{3b}{a}}\cdot\sqrt[3]{\frac{3a^{2}}{b}}$.

解　（1）$\sqrt[3]{a^{5}}=a^{\frac{5}{3}}=a^{1+\frac{2}{3}}=a\cdot a^{\frac{2}{3}}=a\sqrt[3]{a^{2}}$；

（2）$\sqrt[4]{\left(\frac{16x^{-4}}{81y^{4}}\right)^{3}}=\left(\frac{16x^{-4}}{81y^{4}}\right)^{\frac{3}{4}}=\left(\frac{2^{4}x^{-4}}{3^{4}y^{4}}\right)^{\frac{3}{4}}$

$$=\frac{2^{3}x^{-3}}{3^{3}y^{3}}=\frac{8}{27x^{3}y^{3}};$$

（3）$\sqrt{125}\cdot\sqrt[4]{5}=\sqrt{5^{3}}\cdot\sqrt[4]{5}=5^{\frac{3}{2}}\cdot5^{\frac{1}{4}}=5^{\frac{3}{2}+\frac{1}{4}}$

$$=5^{\frac{7}{4}}=5^{1+\frac{3}{4}}=5\cdot5^{\frac{3}{4}}=5\sqrt[4]{5^{3}}$$

$$=5\sqrt[4]{125};$$

（4）$\sqrt{\dfrac{3b}{a}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{3a^2}{b}}=\left(\dfrac{3b}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\dfrac{3a^2}{b}\right)^{\frac{1}{3}}$

$$=(3^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{2}})\cdot(3^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{3}})=3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}a^{-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}$$

$$=3^{\frac{5}{6}}a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{243ab}.$$

例6　用指数的运算法则化简下列各根式（根号内字母都假定是正的）

（1）$\sqrt{\sqrt[3]{3a^3}}$；　　　　（2）$\sqrt[3]{2a\sqrt{x}}$

解　（1）$\sqrt{\sqrt[3]{3a^3}}=(\sqrt[3]{3a^3})^{\frac{1}{2}}=[(3a^3)^{\frac{1}{3}}]^{\frac{1}{2}}$

$$=(3a^3)^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{3a^3};$$

（2）$\sqrt[3]{2a\sqrt{x}}=(2a\sqrt{x})^{\frac{1}{3}}=(2ax^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}$

$$=2^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{2}{6}}a^{\frac{2}{6}}x^{\frac{1}{6}}$$

$$=(2^2a^2x)^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{4a^2x}.$$

定义了零指数幂、负整数指数幂和分数指数幂*，指数概念就推广到有理数指数幂. 并且五种指数运算法则在底数$a>0$时，对于任意有理数指数幂都成立，显然，当$a>0$时，a的任意有理数指数幂都是正数.

---

* 关于分数指数幂，我们是在底数$a\geqslant 0$的条件下来定义的. 若$a<0$，则当n是偶数、m是奇数时，$\sqrt[n]{a^m}$与$(\sqrt[n]{a})^m$都没有意义；若n是奇数，则它们有意义，但有时根式性质(1.2)不成立。例如，$\sqrt[6]{(-2)^2}\neq\sqrt[3]{-2}$.所以，在$a<0$时来讨论$a^{\frac{m}{n}}$，我们可以约定当$n$为大于1的奇数，而$\frac{m}{n}$是既约分数时，$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$.