微分流形初步

陈维桓　编著

高等教育出版社

微分流形初步

陈维桓 编著

高等教育出版社

(京)112 号

微分流形是 20 世纪数学的有代表性的基本观念，是描述许多自然现象的一种空间形式。本书是微分流形理论的入门教材，主要介绍微分流形的基本概念和例子、微分流形上的光滑切向量场、外微分式的运算和性质，以及李群、微分纤维丛的初步知识。全书叙述深入浅出，重点突出，强调几何背景，着重介绍在微分流形上如何通过局部坐标系处理大范围定义的对象。通过本书的学习，会在微分流形的基础理论和应用方面打下坚实的基础。

本书可供综合大学、高等师范院校数学系本科生和研究生作为微分流形、大范围微分几何或黎曼几何引论等课程的教材，也可供力学、物理学等相关学科的学生、教师和研究工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

微分流形初步/陈维桓编著. —北京：高等教育出版社，1998
ISBN 7-04-006391-3

Ⅰ.微… Ⅱ.陈… Ⅲ.微分-流形 Ⅳ.0189.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 08672 号

*

高等教育出版社出版
北京沙滩后街 55 号
邮政编码:100009 传真:64014048 电话:64054588
新华书店总店北京发行所发行
国防工业出版社印刷厂印刷

*

开本 787×1092 1/16 印张 19 字数 460 000
1998 年 5 月第 1 版 1998 年 5 月第 1 次印刷
印数:0 001—2 050
定价:18.50 元

责任编辑　胡乃冏
封面设计　李卫青
责任绘图　黄建英
版式设计　胡乃冏
责任校对　胡乃冏
责任印制　宋克学

献给当代几何大师

陈省身　教授

序　言

我国数学界已经逐渐形成一种共识，应当加强几何学的教学．数学科学虽有众多的分支，却是有机的统一．几何的、代数的、分析的方法相辅相成，使现代数学成为人类认识世界、改造世界的锐利武器．几何学的对象比较直观，比较接近人们的生活经验，所以更能激发开创性思维．数学历史上许多划时代的新思想，如无理数的发现，公理化方法的起源，坐标方法的提出，非欧几何的诞生，空间观念的演变，对整体性质和行为的关注，非线性数学的兴起等等，都首先发生在几何学的沃土上．然而从 50 年代到 70 年代我国大学的几次教学改革中，几何课程曾被一再削弱．当时吴光磊先生就一语双关地批评这种现象为“得意忘形”，历史的发展证明他是有远见的．今天，数学科学发展的大趋势是走向综合，几何学的观点、方法、语言正在大规模地向其他数学分支渗透．而在高新技术发展的过程中，几何学的原理又得到了空前的应用．无论是在计算机图形学、CT 扫描或核磁共振成像、视觉信息处理，还是在机器人、虚拟现实、数字仿真技术，都广泛采用了传统的和现代的几何学理论．当前，在面向 21 世纪的教学改革中，既要拓宽基础，又要削减课时，课程设置面临很大的压力．我们应该记取过去走过这段弯路的教训，千万不要忘记几何素养是数学素养的非常重要的方面．

微分流形是描述无数自然现象的一种空间形式，是 20 世纪数学的有代表性的基本观念．就象欧氏空间与古典分析的关系一样，微分流形为当代非线性分析的蓬勃发展提供了舞台和语言，它本身就集几何、代数、分析于一体．从 80 年代以来，不少学校在不同学科不同层次的专门课程中都要讲一点微分流形，从而产生了单独设课的要求．陈维桓教授的《微分流形初步》就是为这样的需要而写的教材，经过多年教学实践的锤炼已经比较成熟．入门的书比专门的书难写．这本书不是单为研究几何学的人，而是为一般的学数学的本科生和研究生写的，所以它的出版对加强几何的教学会起很好的作用．希望同学们一定要在老师的帮助下，在学习抽象概念的同时掌握具体的例子，从简练的公式背后看出丰富的图形，逻辑的理解与形象的认识并重．能够举一反三，才算真正学好．

姜伯驹

1998 年 2 月

前　记

在数学的发展过程中，综合与分析的方法始终是一对矛盾的两个方面.当前，在数学的各个分支学科已经分得很细的状况下，数学发展的势头看来是朝着在更高层次的综合方向发展.最有希望的是交叉学科、边缘学科，在这里，几何学起着基本的作用.数学界普遍认为在数学系本科的教学计划中应充实和加强几何学内容.几何学不仅广泛地用于复分析、非线性分析、偏微分方程、拓扑学、微分拓扑学、概率论、随机过程、数学物理和力学等分支学科，反过来这些分支学科也大大地促进了几何学本身的发展.黎曼几何自1854年问世以来，已经历了差不多150年，它在广义相对论中有成功的应用.特别是20世纪30年代以后，大范围微分几何登上了舞台，其里程碑就是陈省身关于黎曼流形上Gauss-Bonnet定理的内在证明.自此以后，微分流形、纤维丛理论成为数学工作者应该具备的知识.陈省身教授1953年在芝加哥大学开设的课程和讲义《微分流形》(见参考文献[21])在相当长时间内成为学习微分几何的蓝本，好几代几何学家就是在陈省身教授的课程和讲义的影响下成长起来的.他在1978年在北京大学开设的“微分几何”课以及随后出版的《微分几何讲义》(见参考文献[2])在我国培养新一代数学工作者的过程中起着同样重要的作用.

北京大学数学科学学院有很多专门方向都以微分流形的知识为基础，因此很多专门方向的课程在开头部分都要单独讲一段“微分流形”.1990年北京大学数学系在修订教学计划时把“微分流形”列为数学系各个专业本科生的选修课，目的是把这部分内容作为各个专门方向的公共基础，一方面避免了不必要的重复，使得各个专门方向的课程可以提高它们的起点，另一方面把这部分内容从研究生课程下放到本科，普及了微分流形的理论，加强了数学系本科的几何学教学.我们对于这门课的设想是介绍微分流形的基本概念和例子，使学生熟悉微分流形上光滑切向量场、外微分式的性质和运算，并初步了解微分纤维丛等概念.用一句不很贴切的话来说，这是关于微分流形上的微积分的一门课，是数学分析、高等代数、解析几何等基础课程的必要的延伸和补充.学习的重点是如何处理在微分流形上大范围定义的对象.

经过多年的实践，我们觉得把陈省身、陈维桓著的《微分几何讲义》(即[2])一书中的一、二、三、六等章作为本课程的教学内容是适当的.目前这本教材就是以此为基础结合多年的教学实践写成的.考虑到这门课是为本科高年级学生开设的，也应该供研究生一年级选修，我们尽可能把概念表述得比较具体，比较直观，更多地与欧氏空间中已经熟悉的概念联系起来.例如，在本书我们把光滑流形上的光滑切向量场定义为在光滑流形上每一点都指定了一个切向量，并且当它在局部上用自然标架线性表示时，其分量是局部坐标的光滑函数.这样的概念与我们平常对于光滑切向量场的了解是一致的.然后，在此基础上把光滑切向量场看成作用在光滑函数上而获得光滑函数的映射.后者是现在所流行的关于光滑切向量场的不用坐标的定义.当然，后一种说法有很多应用；但是，前一种讲法更加直观，更贴近我们已有的知识.我们的目标之一是建立这两者之间的联系.在当前的文献中，无坐标的处理似乎成为一种时尚.但是我们认为，至少是在基础课上，采用局部坐标的讲法有助于学生理解抽象概念的实质，也有利于

提高学生的计算能力．我们在本书采用两者相结合的办法，重点是强调局部坐标的功用．

“微分流形”课作为周学时为3(或4)的一学期课程，要讲完本书的全部内容显得有些困难；况且我们在有些章节的最后时常会提到一些有关的重要概念和结论，没有作详细的解说，目的是帮助读者了解这个课程的应用及后续发展，供读者自学．因此，我们建议“微分流形”课的内容由以下章节的主要部分组成：

第一章，

第二章　§1—§4，§6，

第三章　§1—§4，

第四章　§1—§3，§5，

第五章　§1—§2，§5，

第六章　§1．

其余部分可以作为自学和参考的材料．

陈省身教授在“微分几何的过去与未来”一文(见[2])中指出：

“要研究整个流形，流形论的基础便成为必要．流形内的坐标是局部的，本身没有意义；流形研究的主要目的是经过坐标卡变换而保持不变的性质(如切矢量，微分式等)．这是与一般数学不同的地方．这些观念经过几十年的演变，渐成定型．将来数学研究的对象，必然是流形；传统的实数或复数空间只是局部的情形(虽然在许多情形下它会是最重要的情形)．”

本书在实质上是[2]的一、二、三、六章的扩充．我们力图使本书能够比较好地贯彻陈省身教授的上述观点．我们期望本书符合数学课程内容改革的方向，对数学系学生有用，同时也对想初步了解微分流形的非数学系学生有用；不仅可以供数学系本科高年级学生使用，更应该是数学研究生的必备读物．

本书的写作是在首届国家教委数学与力学教学指导委员会几何、拓扑教材编审组的推动下完成的．全书的纲要及第一章——第四章的初稿曾分别经过几何、拓扑教材组的讨论．作者在此对几何、拓扑组组长胡和生院士及全体成员表示衷心的感谢．在本课程的设计和形成的过程中得到姜伯驹院士和北京大学数学科学学院钱敏教授，郭懋正教授，张筑生教授的关心、支持和建议；另外，文兰教授，刘张矩教授也分别讲过该课程，提供了不少宝贵的意见和经验，作者对他们表示深切的感谢．莫小欢博士也仔细地阅读过本书第一章——第四章的初稿，并且提出了一些改进意见，作者在此表示感谢．在本书交稿之后，复旦大学数学系潘养廉教授对全稿作了仔细审阅；责任编辑胡乃冏对全书的编辑付出了辛勤的劳动，作者对他们表示感谢．最后，在本书写作过程中作者一直得到国家自然科学基金会的支持，在印成讲义时得到北京大学教材建设委员会的支持，使得本书的写作和讲义印刷能顺利地进行，在此对他们一并表示感谢．

尽管本书的内容在北京大学数学系讲过多次，而且在作为讲义使用之后已经过认真的订正和修改，但是限于作者的水平，本书中需要改进之处、不妥当之处、甚至于错误都可能是存在的．作者诚恳地希望读者能不吝指正．

陈维桓

1997年2月于北京大学

目 录

第一章　预 备 知 识

粗略地说，几何学的发展史就是空间观念的发展史. 例如，非欧几何的产生说明欧几里得的平行公设不是空间本身所固有的特性，而是加在空间上的先验性假定. 这样，空间的观念有了革命性的突破. 如果用一种新的平行公设代替欧几里得的平行公设，我们便有一个新的空间，产生一种新的几何学. 再如，笛卡儿坐标的引进，使得代数方法进入了几何学，为几何学的分析研究铺平了道路.

“空间”的重要性在于它是数学演出的舞台；随着一种新空间观念的出现和成熟，新的数学就会在这个空间中展开和发展. “微分流形”的概念首先是黎曼提出来的，他把 n 个变量看作 n 维空间中动点的坐标. 此时，坐标本身不再具有特别的几何含义，人们关心的是那些能够用坐标表达、然而与坐标系的选择无关的量. 因而我们可以考虑这样的空间，它没有适用于整个空间的坐标系，而在每一点的邻域内存在局部适用的坐标系，但是我们仍然能够研究在空间中大范围定义的量，即与局部坐标系选择无关的量. 微分流形概念的产生和精确化是当代数学的一大成就，“微分流形”是大范围分析和整体微分几何演出的舞台，同时微分流形的拓扑是重要的研究课题.

n 维欧氏空间是 n 维微分流形最简单的例子和模型. 微分流形的概念和构造是从欧氏空间的概念和有关构造脱胎而来的. 此外，根据 Whitney 的定理，任意一个 n 维微分流形都可以看作维数充分高(例如，$2n+1$ 维)的欧氏空间的子流形. 因此，了解 n 维欧氏空间是十分必要的，我们首先要介绍 n 维欧氏空间及有关的概念.

在解析几何课中，我们已经熟悉了我们所处的现实空间，并且在其中建立了笛卡儿坐标系. 然而 n 维欧氏空间不能用直观的方式去建立，我们通过公理化的方式将它建立在 n 维向量空间及 n 维欧氏向量空间的基础上. 在本章，我们侧重于从几何上去了解 n 维欧氏空间，其次，我们要在欧氏空间中建立曲纹坐标的概念，并且把向量和方向导数等同起来. 这一切都是为微分流形一般概念的建立作必要的准备. 另外，在线性代数中我们已经学习过张量及外代数的理论，但是在那里更多的注意力放在它们的代数结构上. 在本章，我们要复习张量和外代数理论，并且强调它们的几何应用. 张量代数及外代数是研究高维空间的几何的有力的代数工具.

§1　n 维欧氏空间

17 世纪中叶，笛卡儿(和费马)引进了空间直角坐标系，建立了空间中的点与有序实数组之间的对应，这应该说是近代数学的起点. 笛卡儿所建立的空间直角坐标系如下：在空间中取定一点 O，并且取经过该点的三条互相垂直的有向直线 OX, OY, OZ，在每条直线上取定单位长度. 点 O 称为坐标原点，OX, OY, OZ 称为坐标轴，它们两两张成的平面叫做坐标平面. 根据欧氏几何的公理，经过空间中任意一点 P，可以作唯一的一个平面与 OXY 平面平行，它与 OZ

轴的交点记为 P_z，同理，经过点 P 有唯一的平面与 OYZ 平面平行，有唯一的平面与 OXZ 平面平行，它们与 OX 轴，OY 轴的交点分别记为 P_x, P_y. 把点 P_x, P_y, P_z 在它们所在的数轴上对应的实数分别记为 x, y, z，于是点 P 唯一地决定了一组有序的实数 (x, y, z)，称为点 P 在上述笛卡儿直角坐标系下的坐标. 反过来，在已知的笛卡儿直角坐标系下有序数组 (x, y, z) 在空间中唯一地确定了一点 P 以该数组作为它的坐标. 要指出的是，在建立坐标系时已经先验地假定我们所处的空间是欧氏空间，即欧几里得的平行公设是成立的.

若在欧氏空间中任意给定两个不同点 P_1, P_2，则有唯一的一条直线段把它们连结起来. 我们把连结 P_1, P_2 的有向直线段称为以 P_1 为起点、以 P_2 为终点的向量，记作 $\overrightarrow{P_1P_2}$. 向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 在空间中可以平行移动到任意一点 Q_1，得到长度和方向都与 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 一致的向量 $\overrightarrow{Q_1Q_2}$，记为 $\overrightarrow{Q_1Q_2} = \overrightarrow{P_1P_2}$. 实际上，根据欧几里得平行公设，经过点 Q_1 有唯一的一条直线平行于 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 所在的直线，然后在该直线上可取点 Q_2，使得 $P_1P_2Q_2Q_1$ 成为平行四边形. 因此，$\overrightarrow{P_1P_2}$ 作为自由向量(即起点可以是空间中任意一点的向量)也唯一地对应于一组有序实数，称为向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的坐标，它们是终点 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 和起点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 的坐标之差：

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

两个向量相等的条件就是它们的坐标相等.

要强调指出的是，坐标系是附加在空间上以便用代数手段表示和研究几何对象的一种构造，几何对象的性质应该与所选取的坐标系是无关的. 例如，在解析几何学中二次曲线和二次曲面的形状和分类，就是用与坐标变换无关的不变量来刻画的.

高于 3 维的欧氏空间没有这种直观的描述，它们的概念的建立借助于向量空间和适当的公理系统.

所谓数域 F 上的**向量空间**是指一个交换群 V，其元素称为向量，群的运算记为加法，并且定义了数 $\lambda \in F$ 与向量 $v \in V$ 的乘法 λv，满足以下条件：

(1) $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$;

(2) $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$;

(3) $\lambda(v_1 + v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2$;

(4) $1v = v$,

其中 $\lambda, \mu \in F, v, v_1, v_2 \in V$.

如果在 V 中存在 n 个元素 $\delta_1, \cdots, \delta_n$，使得 V 中任意一个元素 v 都能够表示成 $\delta_1, \cdots, \delta_n$ 的线性组合

$$v = \lambda^1\delta_1 + \cdots + \lambda^n\delta_n = \sum_{i=1}^{n}\lambda^i\delta_i, \quad \lambda^i \in F, \tag{1.1}$$

并且这样的表达式是唯一的，则称 $\{\delta_i\}$ 为空间 V 的一个**基底**(或**基**). 基底 $\{\delta_i\}$ 中元素的个数 n 与基底的选择无关，称为域 F 上的向量空间 V 的维数.

今后我们着重讨论的是实向量空间，即 $F = \mathbf{R}$. 因此，当我们不特别指明所讨论的数域时都是指实数域.

设 V 是 n 维向量空间，$\{\delta_i\}$ 是它的一个基底，则由(1.1)式，每一个向量 $v \in V$ 唯一地对应着一组有序的实数 $(\lambda^1, \cdots, \lambda^n)$，称为向量 v 在基底 $\{\delta_i\}$ 下的坐标. 如果另有一个向量 w 以 $(\mu^1, \cdots, \mu^n)$ 为坐标，则向量 $v + w$ 的坐标是 $(\lambda^1 + \mu^1, \cdots, \lambda^n + \mu^n)$，且 $rv (r \in \mathbf{R})$ 的坐标是 $(r\lambda^1, \cdots, r\lambda^n)$. 很明显，如果将全体 n 元数组的集合记作 $\mathbf{R}^n$，并在 $\mathbf{R}^n$ 中规定如下的加法和数乘法：

$$(\lambda^1,\cdots,\lambda^n)+(\mu^1,\cdots,\mu^n)=(\lambda^1+\mu^1,\cdots,\lambda^n+\mu^n),$$
$$r(\lambda^1,\cdots,\lambda^n)=(r\lambda^1,\cdots,r\lambda^n),$$

则$\mathbf{R}^n$便成为一个n维向量空间. 由此可见,n维向量空间V在取定基底$\{\delta_i\}$之后,等同于向量空间$\mathbf{R}^n$.

假定V是n维向量空间. 若在V上给定一个对称的、正定的双线性函数$\langle\ ,\ \rangle: V\times V\to\mathbf{R}$,即它满足下列条件:

(1)$\langle v_1+v_2,v\rangle=\langle v_1,v\rangle+\langle v_2,v\rangle$;

(2)$\langle \lambda v_1,v_2\rangle=\lambda\langle v_1,v_2\rangle$;

(3)$\langle v_1,v_2\rangle=\langle v_2,v_1\rangle$;

(4)$\langle v,v\rangle\geqslant 0$且等号只在$v=0$时成立,

其中$\lambda\in\mathbf{R},v_1,v_2,v\in V$,则称$(V,\langle\ ,\ \rangle)$为$n$维**欧氏向量空间**. 满足上述条件的双线性函数$\langle\ ,\ \rangle$称为**欧氏内积**,通常记成

$$v_1\cdot v_2=\langle v_1,v_2\rangle. \tag{1.2}$$

设$(V,\langle\ ,\ \rangle)$为n维欧氏向量空间,则在V上能够取基底$\{\delta_i\}$,使得

$$\langle\delta_i,\delta_j\rangle=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases} \tag{1.3}$$

这样的基底称为V中的**单位正交基底**. 若在V中取定一个单位正交基底$\{\delta_i\}$,则向量v和w的内积成为

$$\langle v,w\rangle=\sum_{i=1}^n\lambda^i\mu^i, \tag{1.4}$$

其中

$$v=\sum_{i=1}^n\lambda^i\delta_i,\quad w=\sum_{i=1}^n\mu^i\delta_i. \tag{1.5}$$

若在V中有另一单位正交基底$\{\delta_{i'}\}$,且设

$$\delta_{i'}=\sum_{i=1}^n a_{i'}^i\delta_i, \tag{1.6}$$

则基底变换的过渡矩阵$(a_{i'}^i)$是正交矩阵. 实际上,根据单位正交基底的条件(1.3),我们有

$$\sum_{k=1}^n a_{i'}^k a_{j'}^k=\delta_{i'j'}. \tag{1.7}$$

对照(1.5)式和(1.7)式,它们都是和式. 但是在(1.5)式中,求和指标i出现两次,一次作为上指标,一次作为下指标;在(1.7)式中,求和指标k也出现两次,但是都是作为上指标出现的. 为简便起见,对于(1.5)式给出的和式,去掉和号不写,记成

$$v=\lambda^i\delta_i,\quad w=\mu^i\delta_i,$$

其意义仍然是关于指标i的和式,i的取值范围是从1到n. 这种规定称为Einstein **和式约定**,它为多重和号的表达式提供了简便的记法. 例如,(1.6)式可记成$\delta_{i'}=a_{i'}^i\delta_i$. 在本章§4之后,我们将广泛使用这种约定. 有时为了强调起见,我们也把和号写出来.

在n元数组的集合$\mathbf{R}^n$中,规定内积如下:

设

$$u=(\lambda^1,\cdots,\lambda^n),$$

$$v=(\mu^1,\cdots,\mu^n),$$

令

$$\langle u,v\rangle=u\cdot v^t=\sum_{i=1}^{n}\lambda^i\mu^i,\tag{1.4$'$}$$

则 $\mathbf{R}^n$ 便成为一个 n 维欧氏向量空间. 如前所述,在任意一个 n 维欧氏向量空间 $(V,\langle\ ,\ \rangle)$ 中取定一个单位正交基底 $\{\delta_i\}$,则 $(V,\langle\ ,\ \rangle)$ 和有标准内积(1.4)$'$ 的 $\mathbf{R}^n$ 是等同的. 以后我们在说到 $\mathbf{R}^n$ 是 n 维欧氏向量空间时,就是指它具有标准内积(1.4)$'$. 下面我们叙述仿射空间和欧氏空间的概念.

定义 1.1　设 V 是 n 维向量空间,A 是一个非空集合,A 中的元素称为点. 如果存在一个映射 $\rightarrow: A\times A\rightarrow V$,它把 A 中任意一对有序的点 P,Q 映为 V 中一个向量 $\overrightarrow{PQ}\in V$,且满足以下条件:

(1) $\overrightarrow{PP}=0,\forall\ P\in A$;

(2) $\forall\ P\in A,\forall\ v\in V$,存在唯一的一点 $Q\in A$,使得 $\overrightarrow{PQ}=v$;

(3) $\forall\ P,Q,S\in A$,成立恒等式 $\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QS}=\overrightarrow{PS}$,

则称 A 是 n 维**仿射空间**,且称 V 是与仿射空间 A **伴随的向量空间**.

在直观上,向量 $\overrightarrow{PQ}$ 就是空间 A 中从点 P 指向点 Q 的**有向线段**.

若在 n 维仿射空间 A 中取定一点 O,则从定义 1.1 可知,空间 A 中的点与伴随向量空间 V 中的向量是一一对应的:

$$P\in A\leftrightarrow\overrightarrow{OP}\in V.$$

此时,我们称 O 为空间 A 的**原点**,向量 $\overrightarrow{OP}$ 称为点 P 的**向径**. 这些向径都是有固定起点 O 的向量.

定义 1.1 的条件(2)还表明,每一个向量 $v\in V$ 给出空间 A 到自身的一个变换,它把任意一点 $P\in A$ 映为点 $Q\in A$,使得 $\overrightarrow{PQ}=v$. 该变换称为向量 v 在空间 A 中决定的**平行移动**,或空间 A 沿向量 v 的平行移动.

给定点 $P\in A$ 及非零向量 $v\in V$,点集

$$\{Q\in A:\overrightarrow{PQ}=\lambda v,\forall\ \lambda\in\mathbf{R}\}$$

称为空间 A 中经过点 P、以 v 为方向的直线. 方向向量彼此线性相关的两条直线称为互相平行的. 这样,条件(2)还表明:经过直线 L 外任意一点 P,可以作且只能作一条直线 L' 与 L 平行. 这正好是 3 维欧氏空间中的平行公设,是建立笛卡儿坐标系的基础.

定义 1.2　设 A 是 n 维仿射空间,V 是伴随的向量空间. 任取 A 中一点 P 及 V 中一个基底 $\{v_i\}$,则称图形 $\{P;v_i\}$ 为仿射空间 A 中的一个**标架**.

在仿射空间 A 中取定一个标架 $\{O;\delta_i\}$ 就相当于在 A 中建立了一个(仿射)坐标系. 此时,点 $P\in A$ 与 n 元实数组 $(\lambda^1,\cdots,\lambda^n)$ 建立了一一对应关系:

$$P\quad\leftrightarrow\quad\overrightarrow{OP}=\sum_{i=1}^{n}\lambda^i\delta_i\quad\leftrightarrow\quad(\lambda^1,\cdots,\lambda^n).$$

实数组 $(\lambda^1,\cdots,\lambda^n)$ 称为点 P 在标架 $\{O;\delta_i\}$ 下的坐标,或点 P 关于标架 $\{O;\delta_i\}$ 的坐标.

定义 1.3　设 $(V,\langle\ ,\ \rangle)$ 是 n 维欧氏向量空间,则以 V 为伴随向量空间的仿射空间称为 n 维**欧氏空间**,记为 E^n. 欧氏空间 E^n 中任意两点 P,Q 之间的距离定义为

$$d(P,Q)=\sqrt{\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PQ}}.\tag{1.8}$$

很明显，E^n 关于上面所定义的距离函数 d 成为度量空间.

若 $\{\delta_i\}$ 是向量空间 V 中的单位正交基，则 $\{O;\delta_i\}$ 称为 E^n 中的一个**单位正交标架**，相应的坐标系就称为 E^n 中的笛卡儿坐标系. 若在 E^n 中取定一个单位正交标架 $\{O;\delta_i\}$，设点 P 的坐标为 $(\lambda^1,\cdots,\lambda^n)$，点 Q 的坐标为 $(\mu^1,\cdots,\mu^n)$，即

$$\overrightarrow{OP} = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i \delta_i, \quad \overrightarrow{OQ} = \sum_{i=1}^{n} \mu^i \delta_i, \tag{1.9}$$

则

$$\overrightarrow{PQ} = \sum_{i=1}^{n} (\mu^i - \lambda^i)\delta_i, \tag{1.10}$$

故

$$d(P,Q) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\mu^i - \lambda^i)^2}. \tag{1.11}$$

在这里，我们强调仿射空间、欧氏空间是点的空间，而向量空间、欧氏向量空间是向量的空间. 向量之间有代数运算(如加法)，而点与点之间没有代数运算. 点与向量是通过定义 1.1 中的条件建立起联系的，并且仿射空间和它所伴随的向量空间作为集合而言是可以建立一一对应的.

例 1 n 维向量空间 V 可以看作一个 n 维仿射空间 A.

令 $A = V$. 对于任意的 $v_1, v_2 \in A$，令

$$\overrightarrow{v_1 v_2} = v_2 - v_1,$$

其中右端是 v_2, v_1 作为向量空间 V 的元素之差. 显然，当 $v_2 = v_1$ 时，

$$\overrightarrow{v_1 v_1} = 0.$$

对于 $v_1 \in A, v \in V$，令 $v_2 = v_1 + v$，则 $\overrightarrow{v_1 v_2} = v$，且这样的 v_2 是唯一确定的；对于 $v_1, v_2, v_3 \in A$，则

$$\overrightarrow{v_1 v_2} = v_2 - v_1, \quad \overrightarrow{v_2 v_3} = v_3 - v_2,$$

所以

$$\overrightarrow{v_1 v_3} = v_3 - v_1 = \overrightarrow{v_1 v_2} + \overrightarrow{v_2 v_3}.$$

因此，V 是 n 维仿射空间，它的伴随向量空间是 V 本身.

引进仿射空间的概念是为了使向量空间这种代数结构几何化. 同理，欧氏空间是欧氏向量空间的几何化. 当然，所有这些概念都是从现实的 3 维欧氏空间抽象出来的代数结构和几何结构.

从上面的叙述可以知道，n 元数组的集合 $\mathbf{R}^n$ 具有多重身份. 首先，它是一个 n 维向量空间；其次，$\mathbf{R}^n$ 又是一个 n 维欧氏向量空间，其标准内积是(1.4)′，即规定 $\mathbf{R}^n$ 的基底

$$\tilde{\delta}_i = (0,\cdots,\underset{(i)}{1},\cdots,0), \qquad 1 \leqslant i \leqslant n$$

是单位正交基.

我们还能把 $\mathbf{R}^n$ 看作点的集合，每一个 n 元数组 $(\lambda^1,\cdots,\lambda^n)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中一个点. 如例 1 所示，$\mathbf{R}^n$ 是一个 n 维仿射空间，此时一对有序的点 P,Q 所对应的向量 $\overrightarrow{PQ}$ 恰好是点 Q 和点 P 的分量之差所构成的 n 元数组，因而它的伴随向量空间就是 $\mathbf{R}^n$ 自身. 自然，$\{\tilde{O};\tilde{\delta}_i\}$ 是仿射空间 $\mathbf{R}^n$ 的一个标架，其中 $\tilde{O} = (0,\cdots,0)$. 当规定 $\{\tilde{\delta}_i\}$ 是单位正交基底时，则 $\mathbf{R}^n$ 便是一个以 $\{\tilde{O};\tilde{\delta}_i\}$ 为单位正交标架的 n 维欧氏空间.

按照我们现在的说法，设 E^n 是一个 n 维欧氏空间，如果在 E^n 中取定一个单位正交标架 $\{O;\delta_i\}$ 之后，也就是在 E^n 中建立了一个直角坐标系之后，E^n 便等同于 $\mathbf{R}^n$. 今后为简便起见，常常把 n 维欧氏空间记为 $\mathbf{R}^n$，其中距离函数由(1.11)式给出，其实这就是取定了一个单位正交标架 $\{O;\delta_i\}$ 的 n 维欧氏空间 E^n.

E^n 中全体单位正交标架的集合 $\mathscr{P}$ 是十分重要的几何对象. 设 $\{O;\delta_i\}$ 是在 E^n 中取定的一个单位正交标架，那么 $\mathscr{P}$ 中任意一个元素 $\{P;e_i\}$ 都可以唯一地表示成：

$$\overrightarrow{OP} = \sum_{i=1}^{n} a^i\delta_i,$$

$$e_i = \sum_{j=1}^{n} a_i^j\delta_j,$$

其中 (a_i^j) 是正交矩阵(参看(1.6)式). 因此集合 $\mathscr{P}$ 和 $\mathbf{R}^n \times \mathrm{O}(n)$ 能建立一一对应关系，其中 $\mathrm{O}(n)$ 表示实 n 阶正交矩阵的集合，它关于矩阵的乘法构成一个群.

集合 $\mathscr{P}$ 的重要性在于 $\mathscr{P}$ 的元素和 E^n 到自身的等距变换是一一对应的. 事实上，如果 $\sigma: E^n \to E^n$ 是等距变换，即对于任意两点 $P,Q \in E^n$ 有

$$d(\sigma(P),\sigma(Q)) = d(P,Q),$$

则容易证明：σ 把直线变为直线，把平行直线变为平行直线，把互相垂直的直线变为互相垂直的直线，因而它把单位正交标架 $\{O;\delta_i\}$ 变为另一个单位正交标架 $\{P;e_i\}$，即 $\sigma(O) = P$，$\sigma(\delta_i) = e_i$. 我们把 σ 对应于单位正交标架 $\{P;e_i\}$. 此时，不难写出等距变换 σ 的坐标表示公式. 假定

$$\begin{cases} \overrightarrow{OP} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a^i\delta_i, \\ e_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_i^j\delta_j, \end{cases} \tag{1.12}$$

其中 (a_i^j) 是正交矩阵. 设 Q 是 E^n 中任意一点，它关于标架 $\{O;\delta_i\}$ 的坐标设为 λ^i，$1 \leqslant i \leqslant n$. 令 $Q' = \sigma(Q)$ 是点 Q 在等距变换 σ 下的象点. 那么 Q' 点关于标架 $\{P;e_i\}$ 的坐标与 Q 点关于标架 $\{O;\delta_i\}$ 的坐标应该是相同的(见图 1，这里设 $n = 3$). 因此

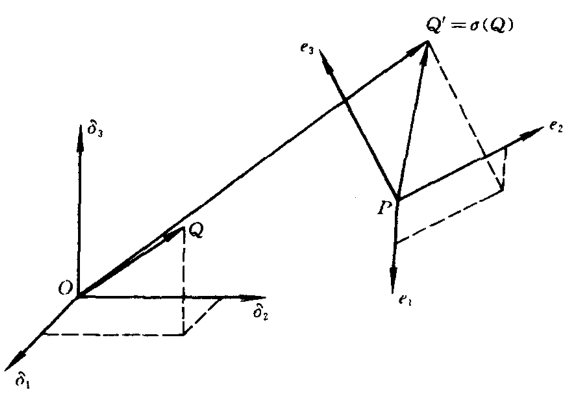

图　1

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ'} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ'} \\ &= \sum_{i=1}^{n} a^i \delta_i + \sum_{i=1}^{n} \lambda^i e_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} (a^i + \sum_{j=1}^{n} \lambda^j a_j^i) \delta_i,\end{aligned}$$

所以象点 $Q' = \sigma(Q)$ 关于标架 $\{O;\delta_i\}$ 的坐标是

$$\mu^i = a^i + \sum_{j=1}^{n} \lambda^j a_j^i. \tag{1.13}$$

反过来，若在 E^n 中任意给定一个标架 $\{P;e_i\}$，假定它由(1.12)式给出，则我们可以定义映射 $\sigma: E^n \to E^n$ 如下：设 $Q \in E^n$，它关于标架 $\{O;\delta_i\}$ 的坐标是 λ^i，$1 \leqslant i \leqslant n$，规定象点 $Q' = \sigma(Q)$ 关于 $\{P;e_i\}$ 的坐标也是 λ^i，于是 Q' 关于 $\{O;\delta_i\}$ 的坐标 μ^i 由(1.13)式给出. 很明显，σ 是一个等距变换，并且它把标架 $\{O;\delta_i\}$ 变为标架 $\{P;e_i\}$.

另一方面，集合 $\mathscr{P}$ 给出了空间 E^n 中的全体直角坐标系. 设单位正交标架 $\{P;e_i\}$ 由(1.12)式给出，用 $(\lambda^1,\cdots,\lambda^n)$ 表示点 Q 关于标架 $\{O;\delta_i\}$ 的坐标，用 $(\mu^1,\cdots,\mu^n)$ 表示点 Q 关于新标架 $\{P;e_i\}$ 的坐标，(见图 2，设 $n=3$) 那么

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= \sum_{i=1}^{n} \lambda^i \delta_i = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} \\ &= \sum_{i=1}^{n} (a^i + \sum_{j=1}^{n} \mu^j e_j^i) \delta_i,\end{aligned}$$

所以当坐标系从 $\{O;\delta_i\}$ 变到 $\{P;e_i\}$ 时，点 Q 的坐标便从 $(\lambda^1,\cdots,\lambda^n)$ 变到 $(\mu^1,\cdots,\mu^n)$，它们之间的关系是

$$\lambda^i = a^i + \sum_{j=1}^{n} \mu^j e_j^i. \tag{1.14}$$

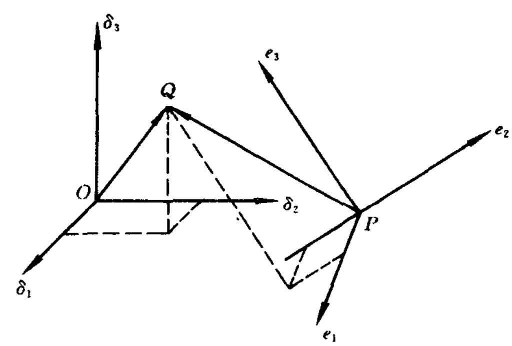

图 2

很明显，当 $\{P;e_i\}$ 代表空间 E^n 到自身的等距变换 σ 时，点 Q 的象点 Q' 关于 $\{P;e_i\}$ 的坐标等于点 Q 关于 $\{O;\delta_i\}$ 的坐标 $(\lambda^1,\cdots,\lambda^n)$. (1.13)式的意义是从点 Q 关于 $\{O;\delta_i\}$ 的坐标 $(\lambda^1,\cdots,\lambda^n)$ 计算出 Q 在上述等距变换 σ 下的象点 Q' 关于 $\{O;\delta_i\}$ 的坐标 $(\mu^1,\cdots,\mu^n)$. 所以(1.13)式也可