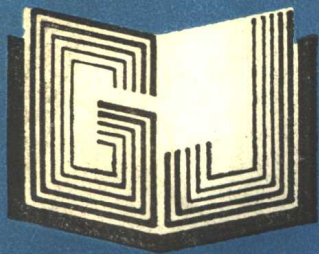


971868



TH302.3
1031

高等学校教材

泵系统过渡过程分析与计算

武汉水利电力学院 于必录
江苏农学院 刘超 合编
陕西机械学院 杨晓东



2.3



971868

TH302.3
1031

TH302.3

高等学校教材



泵系统过渡过程分析与计算

武汉水利电力学院 于必录
江苏农学院 刘超 合编
陕西机械学院 杨晓东

水利电力出版社

(京)新登字115号

高等学校教材

泵系统过渡过程分析与计算

武汉水利电力学院 于必录

江苏农学院 刘超 合编

陕西机械学院 杨晓东

*

水利电力出版社出版

(北京三里河路6号)

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

北京樱花印刷厂印刷

*

787×1092毫米 16开本 10.25印张 227千字

1993年10月第一版 1993年10月北京第一次印刷

印数0001—1770册

ISBN 7-120-01794-2/TV·642

定价4.80元

内 容 提 要

本书包括泵系统过渡过程分析与计算的基本理论、计算方法以及实际工程中遇到的如液柱分离和低扬程大流量泵系统的启动等技术问题。内容较全面、新颖，在编写中注意贯彻由浅入深、理论联系实际的原则，汇集了国内外有关科研成果及经验，部分内容还取材于作者近年来的研究成果。

本书除作为机电排灌、农田水利等专业的大学生和研究生的选修教材外，亦可供同专业的科技人员学习参考。

前 言

在泵站管道系统中，由于闸阀的启闭或水泵的启动与停机，造成管道中流速的突然变化，继而引起压力的急剧升高或降低，并以波的形式沿管道不停地往返传播和反射。此时，水泵的流量、扬程、转速和转矩等工作参数亦随之发生瞬时的变化。这种瞬时变化现象称为水泵的水力过渡过程。显然，在这个过程中，整个系统处于非稳定状态，即从某一稳定状态过渡到另一稳定状态的过程。

水力过渡过程主要是由于水流的动量急剧变化而引起的，所以它必将产生冲量的变化，而单位时间内动量变化越大，则造成水流的冲击力也越大。冲击力作用在水泵部件或管壁上，有如锤击，故又称水锤，往往使过流部件损坏、管道破裂，甚至酿成事故而危及泵站的安全运行。因此，水泵水力过渡过程的分析与计算，对泵站管道系统的设计，以及确保泵系统运行的安全等方面都具有十分重要的意义。

水力过渡过程的研究理论，可归纳为刚性理论和弹性理论等两种。前者假定管道是刚体，在外力作用下不变形，并且认为管道中液体是不可压缩的，这样使计算大为简化，由于其假定条件与实际情况不相符合，计算精度较差，但是实践表明，刚性理论应用于解决短管路、低扬程泵系统的水力过渡过程问题时，其计算结果还是比较接近实际的。弹性理论同时考虑了管道和液体的弹性变化，并且认为水锤的作用是压力波传播及反射的结果。这样，该理论更符合于实际情况，提高了计算精度。目前，弹性理论已经广泛应用于各种水力过渡过程问题的分析与计算。

在水泵水力过渡过程的计算方法中，常用的有图解法和数值计算法等两种。图解法概念清晰，能直观反映水力过渡过程变化的全貌，方法简便，易于掌握。但是，对于复杂的或者是摩阻占相当大比重的管道系统，不仅作图繁琐费时，而且难以处理复杂的边界条件，其使用范围受多方面因素制约，计算精度难以保证。数值计算法又简称数解法，却恰好弥补了图解法的不足。尤其是自60年代以来，随着电子计算机的应用与普及，使数解法具有计算速度快、计算精度高的优点，所以有逐渐取代图解法的趋势。在数值计算方法中，由于特征线法应用的格外普遍，所以本书对特征线法作了较为详尽的介绍。

液柱分离是当泵系统的瞬态压力降低到汽化压力时，发生在管道系统中一种局部的空化现象，它涉及到诸如气体释放、液体汽化、水锤压力波速变化以及气、液相间质量与动量交换等复杂的物理现象，使单相的纯液体流动转变为气液两相流的瞬变流过程。液柱分离后再弥合所形成的水流冲击力，比常见的水力过渡过程现象要严重得多，其结果大大危及泵系统的安全。因为局部位置上的液柱分离现象和管道系统其它部位的空穴流态有着密切的联系，所以，单纯和孤立地研究液柱分离是没有实际意义的，因此伴有空穴流的液柱分离问题的研究有其重要的应用价值，本书为此给予较全面的阐述。

随着机电排灌事业的发展，低扬程大流量的轴流泵站日益增多，大型轴流泵启动的水

CA/90/06

力过渡过程问题是值得重视和研究的课题。因为在无阀空管情况下启动,当遇到管道内空气不能及时或难以排出时,加剧了管道系统的流速和压力的瞬时变化过程,轻则产生机组振动和噪音等不利影响,重则使机组不能顺利启动。因此,合理确定启动方法和预见启动过程,对于泵站的设计和安全运行等方面都具有重要的意义。关于这方面的问题,本书也作了专门的讨论。

本书由武汉水利电力学院于必录(第一、四章),陕西机械学院杨晓东(第二、三章),江苏农学院刘超(第五章)等三人合编。全书由于必录统稿,陕西机械学院栾鸿儒主审。

书中难免存在缺点和错误,恳请读者们批评、指正。

编 者

1991年7月

目 录

前言

第一章 基本理论	1
第一节 水锤压力波传播规律	1
第二节 直接水锤与间接水锤	3
第三节 水锤波速表达式	4
第四节 水锤基本方程式	8
第五节 水锤波动方程及其通解	11
第六节 水锤共振方程	14
第二章 图解法	18
第一节 水池(库)管路系统	18
第二节 水泵管路系统	27
第三章 特征线法	40
第一节 基本原理及方法	40
第二节 简单管路系统	44
第三节 复杂管路系统	50
第四节 泵管路系统	55
附录	83
第四章 伴有空穴流和液柱分离的过渡过程	93
第一节 概述	93
第二节 流态及特征	93
第三节 数学模型	95
第四节 计算方法与步骤	120
第五章 低扬程泵系统启动过渡过程	125
第一节 泵系统启动物理过程	125
第二节 泵系统启动特性	128
第三节 泵系统启动过渡过程计算	139
第四节 泵系统启动过渡过程的现场试验	149
参考文献	155

力，则水流以 $+v_0$ 向下游流动，压力又恢复到 H_0 ，升压波传播情况相应于 $t=7L/2a$ ， $t=4L/a$ ，如图1-1(h)和图1-1(i)所示。事实上 $t=4L/a$ 时刻和初始稳态情况完全相同，此刻管中压力、水流密度及管壁状态又恢复正常。

如果不计管道摩阻，并假定水流流入水池时也没有能量损失，则前述压力波传播规律即升压—复原—降压—复原—升压的过程是周而原始的，其周期为 $4L/a$ 。实际上，闸阀不可能瞬时完全关闭，而水流的粘滞性及管道摩阻必将使水锤压力波的传播过程逐步减弱直至最终消失。

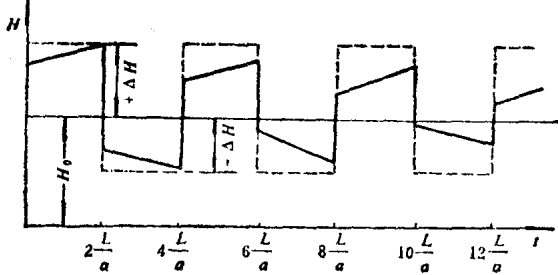


图 1-2 末端闸阀瞬时关闭，闸阀处压力变化

如图1-2所示为瞬时关闭闸阀时，闸阀处的压力变化过程。图中虚线为理想的压力变化过程；实线为实际的压力变化过程，比较两者不难看出：由于摩阻使压力波的波幅减小，但对其传播规律并无显著影响。

可以想象，如果闸阀从全闭状态而瞬时完全开启时，所产生水锤压力波的传播过程和前述类似，所不同的是在闸阀处首先出现降压。

二、事故停泵

事故停泵系指正常运行的水泵突然失去动力的情况，此时所产生的水锤压力变化过程（或称水力过渡过程）与机组转动惯量、管道水流惯性以及水泵的全特性等因素有关，所以比关阀水锤情况要复杂的多。为了叙述方便，假设管道无逆止阀并允许水倒流，其水力过渡过程可分为下述三个阶段，如图1-3(a)所示。

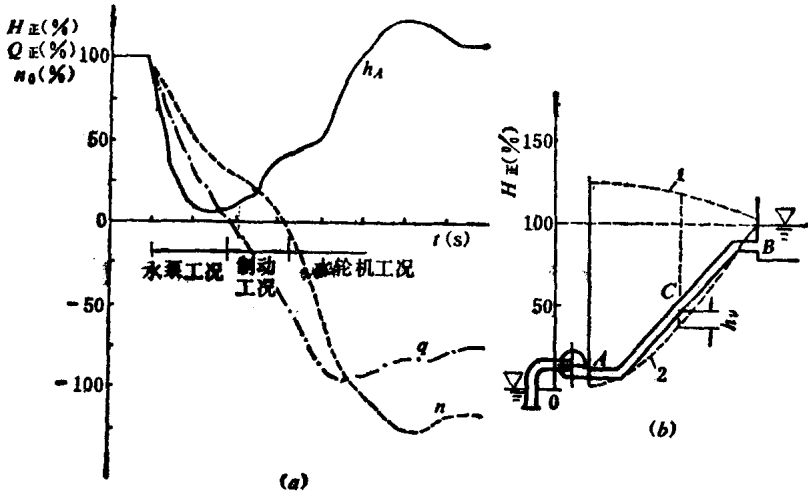


图 1-3 无逆止阀时水力过渡过程

(a)水泵出口处水力过渡过程；(b)管道沿程最高最低压力分布曲线
1—最高压力线；2—最低压力线

第一阶段：正转正流水泵工况。

事故停泵后，水泵和管道中水流因惯性仍继续沿原来方向运动，但是水泵出口的流量

和压力由于水泵减速而逐渐减小，一直到管内流速等于零为止，从停泵至水流静止，这个阶段称水泵工况。通常，水泵转动惯量较大，在此阶段中水泵继续减速、正转。

第二阶段：正转倒流制动工况。

管道中水流一旦静止，由于受重力或静水头作用而开始倒流，倒泄水流对仍继续正转的水泵叶轮起制动作用，使水泵转速继续降低，直至使转速等于零。这一阶段称制动工况。由于水流受正转叶轮的阻碍，管道内压力开始回升。

第三阶段：倒转倒流水轮机工况。

随着倒泄水流的加大，瞬态静止的水泵开始反转并逐渐加速，水泵出口压力不断升高，倒泄流量很快达到最大值，倒转转速也随之迅速上升，当其倒转转速达到最大值时，泵内压力上升也达到最大值。但是随着叶轮倒转转速的升高，增加了作用于水流的离心力，它阻止水流下泄而使倒泄流量有所降低，因此叶轮倒转转速略有下降，最后水泵在稳定的静水头作用下，以不变的转速和流量而稳定运转。这时由于水泵受倒泄水流的冲击，在无任何负载的情况下空转，这一稳定转速称飞逸转速，水泵相应的输出转矩为零。从水泵开始反转至达到飞逸转速的阶段称水轮机工况。

图1-3(b)表示无逆止阀时，管道最高、最低压力分布情况，图中C点因负压较大，有可能发生液柱分离现象，有关该内容详见第四章介绍。

第二节 直接水锤与间接水锤

从突然关阀而造成的水力过渡过程可以看出，由于流速突然改变导致压力的升高，升压波以波速 a 向上游传播，如图1-4(a)，这是一种不稳定状态，波速 a 应理解为某观察者相对于静止的管道系统的移动速度，而不是相对于水流的速度。我们可以借助于坐标系的平移将不稳定状态转变为稳定状态，即如图1-4(b)所示，采用一维的冲量—动量定理计算压力升高 ΔH 值。

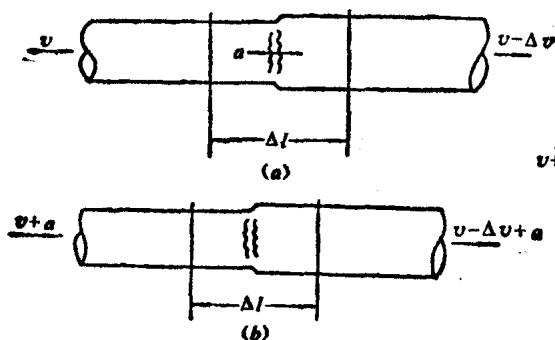


图 1-4 不稳定状态向稳定状态的变换
(a)不稳定状态；(b)稳定状态

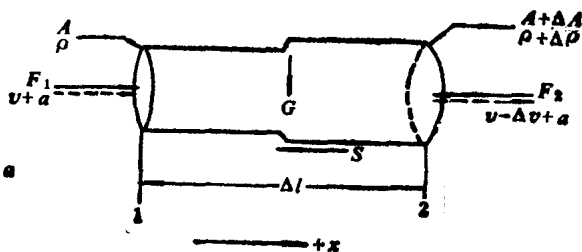


图 1-5 升(降)压 ΔH 值计算

如图1-5，取一微小管段 Δl ，令水流流入及流出断面分别以 1、2 表示，因 Δl 非常短，由管壁产生的摩阻力 S 可忽略不计，重力 G 又与流向垂直，取管段中心线的坐标轴 x 与流向相同为正，可直接列出下述关系式，即

$$F_1 - F_2 = Q\rho[(v - \Delta v) + a - (v + a)] = (v + a)A\rho(-\Delta v) \quad (1-1)$$

式中 Q ——流量;

ρ ——被抽送液体的密度;

A ——面积;

F_1 ——断面 1 作用外力;

F_2 ——断面 2 作用外力。

由于压力增高, 水被压缩而管壁膨胀, 若断面 1 平均压强及面积分别为 p 及 A , 则断面 2 相应变化为 $p + \Delta p$ 及 $A + \Delta A$, 所以

$$pA - (p + \Delta p)(A + \Delta A) = (v + a)A\rho(-\Delta v) \quad (1-2)$$

因 $\Delta p = \rho g \Delta H$, 而 ΔA 相对于 ΔH 、 A 及 ρ 等值均很小可忽略, 所以前式变为

$$-\rho g \Delta H A = (v + a)A\rho(-\Delta v)$$

即

$$\Delta H = \frac{a \Delta v}{g} \left(1 + \frac{v}{a} \right) \quad (1-3)$$

通常 $v \ll a$, 所以 $\frac{v}{a} \ll 1$, 则

$$\Delta H = \frac{a \Delta v}{g} \quad (1-4)$$

式 (1-4) 表明流速减小与压力升高的关系式, 它同样适用于流速增加而导致管道中压力降低的情况。

如果闸阀位于出流末端, 那末按式 (1-4) 计算, 由于突然关阀而得到的压力升高值是很大的, 因经过一个相长即 $2L/a$ 后, 减压波才返回闸阀处, 压力才开始降低。所以关阀时间若小于或等于 $2L/a$, 闸阀处压力升高值即为最大值。这种水力过渡过程称直接水锤。前面叙述的现象是假定闸阀瞬时全部关闭所产生的结果, 事实上, 瞬时全部关闭是难以实现的, 它总会有个瞬时逐渐关闭的过程。我们可将整个关闭阶段划分为许多瞬时微小时段, 相应于每一微小时段的压力增值仍可按式 (1-4) 计算, 最后予以叠加, 即得到总的升值。如果最末一个关闭时段是在第一个降压波反射前完成, 那么, 其总的升值和瞬时全部关闭的升值恰好相等, 这样仍可视为直接水锤, 只是压力波的波形有所变化而已。可见, 只要是关闭时间 $\leq 2L/a$, 就会产生直接水锤。

如果关闭时间大于 $2L/a$, 即第一个反射波返回时, 闸阀仍处于继续关闭阶段, 这时闸阀处的升压将受到反射波的影响, 即等于升、降压波的叠加, 其结果使闸阀处的升压值不可能叠加到最大值, 最大水锤压力将随之减小, 这种水力过渡过程称为间接水锤。

第三节 水锤波速表达式

水锤波速是表征管壁弹性及液体可压缩性的重要参数, 其大小又和管道型式、材料及支承等因素有关。现以薄壁均质圆管为例, 采用质量守恒原理推导水锤波速表达式。

从管道中取出长为 dx 的微分管段 $ABCD$ ，如图1-6，并规定 x 轴和流速正方向一致。

根据质量守恒原理，在 dt 时间内进、出微分管段的液体质量的差值，应等于该微分管段内质量的增量。在 dt 时间内，流进 AB 断面的质量为 $\rho Av dt$ ，从 CD 断面流出的质量为 $\left[\rho Av + \frac{\partial(\rho Av)}{\partial x} dx \right] dt$ ，微分管段内质量增量为 $\frac{d}{dt}(\rho A dx) dt$ ，因此

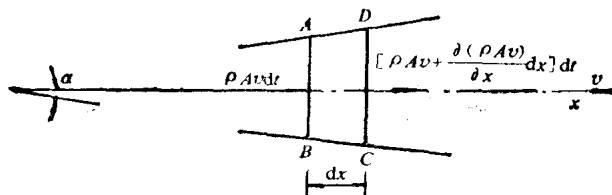


图 1-6 微分管段的水流连续性

$$-\frac{\partial}{\partial x} (\rho Av) dx dt = \frac{d}{dt} (\rho A dx) dt \quad (1-5)$$

即

$$-\left(A\rho \frac{\partial v}{\partial x} + Av \frac{\partial \rho}{\partial x} + v\rho \frac{\partial A}{\partial x} \right) = \rho \frac{dA}{dt} + A \frac{d\rho}{dt} \quad (1-6)$$

考虑到密度 ρ 和过水断面 A 沿 x 的变化率均比流速的变化率小得多，式(1-6)左边括号内第二、三两项均可略而不计，则

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{A} \frac{dA}{dt} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{dt} = 0 \quad (1-7)$$

或

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dp} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{dp} \right) \frac{dp}{dt} = 0 \quad (1-8)$$

式(1-8)左边括号中两项都有一定的物理意义， $\frac{1}{A} \cdot \frac{dA}{dp}$ 表示当压强变化时，过水断面面积变化率的相对值；而 $\frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{dp}$ 则表示当压强变化时，液体密度变化率的相对值。当流体介质、管道材料及结构尺寸一定时，该两项的变化均很小，可近似视为常量，通常令

$$\frac{1}{a^2 \rho} = \frac{1}{A} \frac{dA}{dp} + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp} \quad (1-9)$$

或

$$a = \sqrt{\frac{1}{\rho \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dp} + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp} \right)}} \quad (1-10)$$

式(1-10)即为水锤波速的一般表达式，为了计算，必须找出分母中括号内两项的关系。

(一) 求 $\frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{dp}$

考虑液体可压缩性, 现引入一参数 K , 它表征压强增量与液体密度 (或体积 W) 增量间的关系, 因

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp} = \frac{d\rho}{\rho} \cdot \frac{1}{dp} = \frac{1}{\left(\frac{dp}{\frac{d\rho}{\rho}}\right)} = \frac{1}{K} \quad (1-11)$$

而

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dW}{W}$$

则

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp} = -\frac{dW}{W} \cdot \frac{1}{dp} = -\frac{1}{\left(\frac{dp}{\frac{dW}{W}}\right)} = \frac{1}{K} \quad (1-12)$$

前述两式中, K 称为液体的体积弹性模量。对于水, 当压力等于一个大气压力, 温度为 20°C 时, $K = 2.1 \times 10^9 \text{N/m}^2 = 2.1 \times 10^9 \text{Pa} = 2.1 \text{GPa}$ 。

(二) 求 $\frac{1}{A} \cdot \frac{dA}{dp}$

假定在水力过渡过程中, 管壁变形在弹性范围内, 因此可以利用弹性力学理论建立压强 p 与过水断面面积 A 之间关系。

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dp} = \frac{1}{dp} \cdot \frac{d\left(\frac{1}{4}\pi D^2\right)}{\frac{1}{4}\pi D^2} = \frac{2}{dp} \cdot \frac{d(\pi D)}{\pi D} = \frac{2}{dp} \cdot d\varepsilon \quad (1-13)$$

因为 πD 是圆管的周长, 所以式 (1-13) 中 $d\varepsilon$ 可以理解为管壁的环向应变。若由轴向应力 $d\sigma_1$ 产生的环向应变为 $d\varepsilon_1$; 由环向应力 $d\sigma_2$ 产生的环向应变为 $d\varepsilon_2$, 那么总的环向应变 $d\varepsilon$ 应等于 $d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2$, 现分别说明于后

1. $d\varepsilon_1$

$$d\varepsilon_1 = -\mu d\varepsilon' = -\mu \frac{d\sigma_1}{E} \quad (1-14)$$

式中 μ ——泊桑比;

$d\varepsilon'$ ——轴向应力 $d\sigma_1$ 产生的轴向应变;

E ——管壁弹性模量。

2. $d\varepsilon_2$

$$d\varepsilon_2 = \frac{d\sigma_2}{E} \quad (1-15)$$

根据 dp 所形成的水压力和管壁环向应力 $d\sigma_2$ 相平衡的关系, 可直接写出下式, 即

$$Ddp = 2\delta \cdot d\sigma_2$$

则

$$d\sigma_2 = \frac{Ddp}{2\delta} \quad (1-16)$$

式中 δ ——管壁厚度。

所以

$$d\varepsilon_1 = \frac{1}{E} \cdot \frac{D}{2\delta} dp \quad (1-17)$$

因此总的环向应变为

$$d\varepsilon = d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2 = \frac{1}{2E} \left(\frac{D}{\delta} - \mu \frac{2d\sigma_1}{dp} \right) dp \quad (1-18)$$

式(1-18)中, 轴向应力 $d\sigma_1$ 的表达式随管道的支承方式不同而异。

(1) 管道装有伸缩节, 可自由伸缩, 这时 $d\sigma_1 = 0$, 代入式(1-18), 则

$$d\varepsilon = \frac{dp}{2E} \cdot \frac{D}{\delta} \quad (1-19)$$

代入式(1-13), 则

$$\frac{1}{A} \cdot \frac{dA}{dp} = \frac{D}{E\delta} \quad (1-20)$$

(2) 两端固定, 管道无轴向变形, 即 $d\varepsilon' = 0$, 而 $d\sigma_1 = \mu d\sigma_2$, 则

$$d\sigma_1 = \mu \cdot \frac{D}{2\delta} dp \quad (1-21)$$

代入式(1-18), 则

$$d\varepsilon = \frac{1}{2E} \left(\frac{D}{\delta} - \mu^2 \cdot \frac{D}{\delta} \right) dp \quad (1-22)$$

代入式(1-13), 则

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dp} = \frac{D}{E\delta} (1 - \mu^2) \quad (1-23)$$

(3) 上端固定, 但管道可以沿轴向移动, 这时 $d\sigma_1$ 等于作用在封闭端上总水压力除以管壁断面积, 即

$$d\sigma_1 = \frac{Adp}{\pi D\delta} = \frac{Ddp}{4\delta} \quad (1-24)$$

因此

$$d\varepsilon = \frac{1}{2E} \left(\frac{D}{\delta} - \mu \frac{D}{2\delta} \right) dp = \frac{D}{2E\delta} \left(1 - \frac{\mu}{2} \right) dp \quad (1-25)$$

将式(1-25)代入式(1-13), 则

$$\frac{1}{A} \cdot \frac{dA}{dp} = \frac{D}{E\delta} \left(1 - \frac{\mu}{2} \right) \quad (1-26)$$

若以 C_1 表示管道约束系数, 则式(1-20)、(1-23)及式(1-26)等三式可综合表达为下式, 即

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dp} = \frac{D}{E\delta} C_1 \quad (1-27)$$

式中 当管道可自由伸缩时, $C_1 = 1$

当管道两端固定时, $C_1 = 1 - \mu^2$

当管道一端固定时, $C_1 = 1 - \mu/2$

将式(1-11)或式(1-12)及式(1-27)代入式(1-10), 则可以得出薄壁圆管的水锤波速公式, 即

$$a = \sqrt{\frac{\frac{K}{\rho}}{1 + \frac{KD}{E\delta} C_1}} \quad (1-28)$$

应该指出: 美国垦务局工程师帕马金首先考虑了轴向应力对环向应变的影响, 而过去一般都近似取 $C_1 = 1$ 。

若以常温下清水的密度为 1000 kg/m^3 , $K = 2.1 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, 并取 $C_1 = 1$ 代入式(1-28), 可得输水管道中水锤波传播速度的计算式为

$$a = \frac{1425}{\sqrt{1 + \frac{KD}{E\delta}}} \quad (1-29)$$

从物理学得知 1425 m/s 即为声音在清水中传播的速度。

式(1-28)实际上是根据水流减速、管段升压及液体压缩、管壁膨胀等条件而推导的, 它适用于以增压开始的关阀水锤。如果计算以减压开始的开阀水锤, 因减压波使液体膨胀, 管壁收缩, 则式(1-28)中分母的第二项应改为负值。

从式(1-28)可以看出, 输水管道中水锤传播速度与管道直径、壁厚及管壁弹性模量等因素有关, 该式适用于计算普通均值钢管、钢筋混凝土管等水锤波速值。通常对于钢管, $a \approx 800 \sim 1200 \text{ m/s}$; 对于钢筋混凝土管 $a \approx 900 \sim 1000 \text{ m/s}$ 。如果管道弹性变形很小, 则 E 可视为无穷大, 则从式(1-29)可知水锤波速等于清水中音速值。实践证明, 如果清水中含有气体时, 则会大大降低水锤压力波的传播速度。有关这部分内容, 详见第四章。

对于 $D/\delta < 25$ 的厚壁圆管, 计算管壁应力需计入其不均匀分布的影响, 此时虽仍可按式(1-28)计算水锤波速, 但是 C_1 值应按下列各式计算

$$\text{当管道可自由伸缩时, } C_1 = \frac{2\delta}{D}(1+\mu) + \frac{D}{D+\delta}$$

$$\text{当管道两端固定时, } C_1 = \frac{2\delta}{D}(1+\mu) + \frac{D(1-\mu^2)}{D+\delta}$$

$$\text{当管道一端固定时, } C_1 = \frac{2\delta}{D}(1+\mu) + \frac{D}{D+\delta} \left(1 - \frac{\mu}{2}\right)$$

从上述公式可以看出, 管道约束形式对厚壁管中水锤波速影响不如薄壁管那么明显, 而且当 D 愈大, δ 愈小, 以上诸式愈接近于薄壁管的 C_1 值。

第四节 水锤基本方程式

水锤基本方程式是水力过渡过程分析和计算的基础。它包含以微分方程式表示的运动

方程和连续方程，反映了在水力过渡过程中不稳定水流的流速和水头的变化规律。此外，还必须已知水锤波速的计算公式。

在推导水锤基本方程式时作了如下假定：对管道系统中水流均作一维分析，所以表征水流的各有关参数均采用断面平均值；管道中各过水断面的水流为渐变流，压强在断面上呈直线分布，断面平均压强等于断面中心的压强。

一、运动方程

从管道系统中取出长为 dx 微分段 $ABCD$ ，如图1-7所示，设水流流速 v 方向和 x 轴正方向相同，其微分管段上所受外力为

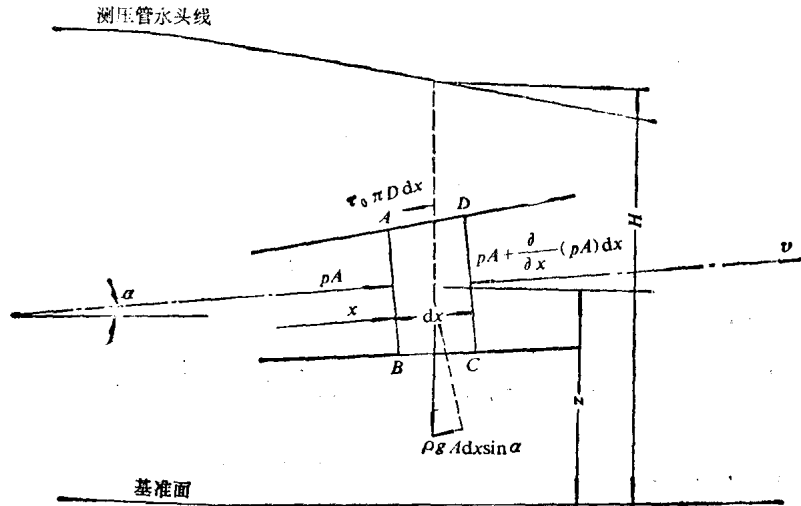


图 1-7 管道中微分段水体受力图

作用在 AB 面上水压力 $F_1 = pA$

作用在 CD 面上水压力 $F_2 = pA + \frac{\partial}{\partial x}(pA)dx$

微分段重力在 X 方向分力 $G_x = \rho g A dx \sin \alpha = \rho g A dx \frac{\partial z}{\partial x}$

管壁对水流的摩阻力 $S = \tau_0 \pi D dx$

上四式中 p ——水的压强；

A ——断面面积；

ρ ——水的密度；

g ——重力加速度；

α ——管道中心线与水平线夹角；

z ——管道中心线离基准面高度；

τ_0 ——管壁作用于水体周边的切应力；

D ——管径。

根据牛顿第二定律，微分管段上所受外力的合力，使该水体质量造成速度变化，即产生加速度，则得

$$pA - \left[pA + \frac{\partial}{\partial x}(pA)dx \right] - \tau_0 \pi D dx - \rho g A dx \sin \alpha = \rho A dx \cdot \frac{dv}{dt}$$

上式展开并忽略 $p \frac{\partial A}{\partial x}$ 项, 则

$$A \frac{\partial p}{\partial x} + \tau_0 \pi D + \rho g A \sin \alpha + \rho A \frac{dv}{dt} = 0 \quad (1-30)$$

现借用稳定流切应力公式, 近似计算非稳定流的切应力, 即

$$\tau_0 = \frac{\rho f v |v|}{8} \quad (1-31)$$

式中 ρ —— 水流密度;

f —— 摩阻损失系数;

v —— 水流流速, 所加绝对值符号保证切应力方向与流速方向相反。

因非稳定流流速是时间 t 和管轴线 x 坐标的函数, 所以加速度为

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \quad (1-32)$$

将式 (1-31)、(1-32) 代入式 (1-30) 得

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + g \sin \alpha + \frac{f v |v|}{2D} = 0 \quad (1-33)$$

在实际运用中, 我们常以测压管水头 H 取代压强 p , 因

$$p = \rho g (H - Z) \quad (1-34)$$

则

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \sin \alpha \right) \quad (1-35)$$

式 (1-34) 中 $\sin \alpha = \partial z / \partial x$, 将式 (1-35) 代入式 (1-33), 则

$$g \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{f v |v|}{2D} = 0 \quad (1-36)$$

式 (1-36) 即为运动方程, 因流速与水锤波速相比其值甚小, 故方程式左边第三项可忽略不计, 即

$$g \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{f v |v|}{2D} = 0 \quad (1-37)$$

如以流量 Q 代替流速 v , 则运动方程又可写成

$$g A \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{f Q |Q|}{2DA} = 0 \quad (1-38)$$

二、连续方程

和推导水锤波速表达式方法相同, 应用质量守恒原理推导连续方程。现重写式 (1-8) 如下

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dp} + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp} \right) \frac{dp}{dt} = 0 \quad (1-8)$$

将式中全导数 dp/dt 作如下变换, 即

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1-39)$$

现以 H 取代式(1-39)中右边两项中 p , 则

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \rho g v \frac{\partial H}{\partial x} - \rho g v \sin \alpha \quad (1-40)$$

将式(1-9)、(1-40)代入式(1-8)得

$$\frac{\partial H}{\partial t} + v \frac{\partial H}{\partial x} - v \sin \alpha + \frac{a^2}{g} \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (1-41)$$

式(1-41)即为连续方程, 同理可忽略式(1-41)左边第二、三两项, 即

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (1-42)$$

或

$$gA \frac{\partial H}{\partial t} + a^2 \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (1-43)$$

第五节 水锤波动方程及其通解

前面推导的表征水流在水力过渡过程中流速和水头变化规律的运动方程和连续方程, 它们是拟线性双曲型偏微分方程组, 无法直接求出其解析解。在电子计算机技术应用前, 为了计算的简化, 忽略非线性项如运动方程中的摩阻项, 将水锤基本方程转化为波动方程, 而采用数学方法求其通解, 最后得到两个波函数, 再根据初始和边界条件进行求解。

略去运动方程中摩阻项后, 水锤基本方程式可简化为

$$\frac{\partial v}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \quad (1-44)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{g}{a^2} \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (1-45)$$

为了求解上述方程组, 将式(1-44)对 t 进行微分, 式(1-45)对 x 进行微分, 即

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + g \frac{\partial^2 H}{\partial t \cdot \partial x} = 0 \quad (1-46)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{g}{a^2} \frac{\partial^2 H}{\partial x \cdot \partial t} = 0 \quad (1-47)$$

可见

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (1-48)$$

式(1-48)表明管轴线 x 坐标点流速变化和时间的关系式。