132

微 积 分

（下册）

四川大学数学学院

杨志和　　主编

编　者（按姓氏笔划排序）

于正端　伍炯宇　何祖林

杨志和　徐小湛

高等教育出版社

HIGHER EDUCATION PRESS

图书在版编目(CIP)数据

微积分(下册)/四川大学数学学院 杨志和 主编. —北京:高等教育出版社,2002.2

非数学专业本科生、金融管理专业本科生教材

ISBN 7-04-010609-4

Ⅰ.微… Ⅱ.杨… Ⅲ.微积分-高等学校-教材 Ⅳ.0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 098202 号

责任编辑:徐 可 **封面设计**:王凌波
版式设计:杨 明 **责任印制**:陈伟光

微积分(下册)
四川大学数学学院 杨志和 主编

出版发行	高等教育出版社		
社　　址	北京市东城区沙滩后街 55 号	**邮政编码**	100009
电　　话	010-64054588	**传　　真**	010-64014048
网　　址	http://www.hep.edu.cn http://www.hep.com.cn		
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	北京民族印刷厂		
开　　本	787×960 1/16	**版　　次**	2002 年 2 月第 1 版
印　　张	28.5	**印　　次**	2002 年 2 月第 1 次印刷
字　　数	560 000	**定　　价**	29.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

目　　录

第五章　空间解析几何与矢量代数

“几何学”是数学的重要分支,是现代科技工作者必需掌握的数学知识.“空间解析几何”是“几何学”的重要部分,是学习多元函数微积分、线性代数以及其他数学课程必不可少的基础.同时,也是学习物理、力学以及其它工程技术学科所必需具备的数学知识.

本章首先认识几何空间矢量(或称向量),掌握其运算法则,并运用矢量建立空间平面与直线方程.同时,也介绍了空间曲面与曲线,以及二次曲面的标准型等基本内容.

第一节　矢量及矢量的运算

矢量来源于力学、物理学.本节从物理、力学上引入矢量运算的定义,并给出其运算规律以及矢量平行、垂直的重要定理.学习空间解析几何,首先要熟练掌握矢量的基本概念及其运算.

1.1　矢量、矢量的模、单位矢量

在物理、力学中,如速度、加速度、力、位移等既有大小又有方向的量称为**矢量**(**或称向量**).用有向线段$\overrightarrow{AB}$表示大小为AB线段的长度,沿AB直线从点A到点B方向的矢量,点A称为矢量$\overrightarrow{AB}$的**始端**,点B称为矢量的**终端**.如图5.1,为书写简便又用$\vec{a}$,$\vec{b}$,$\vec{c}$表示矢量,也可用黑体字母$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$表示.符号$|\overrightarrow{AB}|$表示矢量$\overrightarrow{AB}$的大小,称为矢量$\overrightarrow{AB}$的**模**,同样$|\vec{a}|$表示矢量$\vec{a}$的模.$|\boldsymbol{a}|$表示矢量$\boldsymbol{a}$的模.

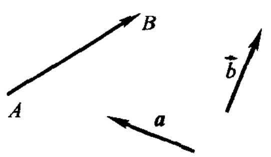

图5.1

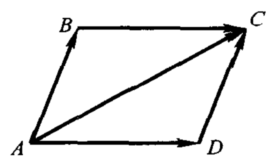

图5.2

定义1.1　若两个矢量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的方向相同、大小相等(模相等),则称两矢量**相等**,记为$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$,亦即一个平行移动后的矢量与原矢量相等,这样的矢量又称为**自由矢量**.

如图5.2所示的平行四边形$ABCD$,矢量$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$,$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.

定义 1.2 若两个矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的大小(模)相等,方向相反($\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 互为逆向矢量),则称 $\boldsymbol{b}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 的**负矢量**,或称 $\boldsymbol{a}$ 为 $\boldsymbol{b}$ 的负矢量.记为 $\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{a}$.

如图 5.2 中,$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$,$\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$.

定义 1.3 长度为零的矢量(**模**等于零),称为**零矢量**,记为$\vec{0}$,在不致于混淆的情况下也写为"**0**".零矢量又称为**点矢量**,无一定方向,所以可以是任意方向的矢量.

定义 1.4 长度为一个单位(**模**等于 1)的矢量称为**单位矢量**.一个矢量 $\boldsymbol{a}$ 的单位矢量为与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同,长度(**模**)为一个单位的矢量,记为 $\boldsymbol{a}^0$.

任何一个矢量都可用其单位矢量乘以它的**模**来表示,如 $\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0$.以点 O 为始端的所有单位矢量的终端构成以点 O 为球心、半径为一个单位的球面.

1.2 矢量的加法

在物理力学中,两个力的合力用"平行四边形法则"确定,如图 5.3(a),矢量 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 表示两个力,以 OA、OB 为邻边作平行四边形 $OACB$,对角线为 OC,则矢量 $\overrightarrow{OC}$ 是 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的合力,记为 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$,这便是矢量加法的"平行四边形法则".

"平行四边形法则"可简化为"三角形法则".如图 5.3(b),(c).用简便符号,$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC} = \boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AC} = \boldsymbol{b}$.

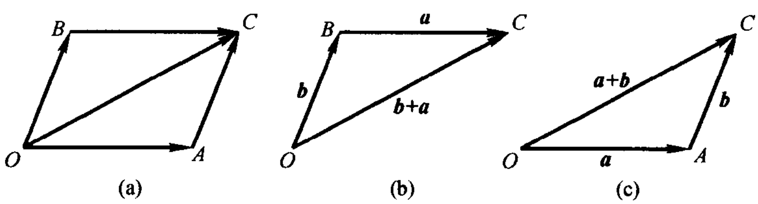

图 5.3

定义 1.5 两矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的加法.若 $\boldsymbol{a}$ 的终端与 $\boldsymbol{b}$ 的始端相连,则从 $\boldsymbol{a}$ 的始端到 $\boldsymbol{b}$ 终端的矢量为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**和**,记为 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$,称为"$\boldsymbol{a}$ 加 $\boldsymbol{b}$".若 $\boldsymbol{b}$ 的终端与 $\boldsymbol{a}$ 的始端相连,则从 $\boldsymbol{b}$ 的始端到 $\boldsymbol{a}$ 的终端的矢量为 $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$,称为"$\boldsymbol{b}$ 加 $\boldsymbol{a}$".

因为矢量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ 构成一个三角形,所以又称为"三角形法则",显然矢量的加法满足交换律 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$.

从两个矢量相加的"三角形法则",不难推广到多个矢量相加的"封闭多边形法则".如图 5.4,设矢量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$,$\boldsymbol{d}$,作加法 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}$.则只要把矢量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$,$\boldsymbol{d}$ 依次序首(始端)尾(终端)相连,那么从矢量 $\boldsymbol{a}$ 的始端到矢量 $\boldsymbol{d}$ 的终端的矢量为 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}$.

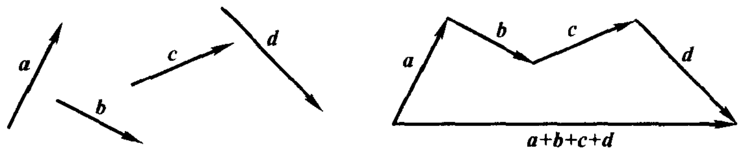

图 5.4

"代数"中引入负数后，加法的逆运算减法，已当作代数和，减一个数相当于加该数的相反数．矢量运算同样如此，矢量 $\boldsymbol{a}$ 减矢量 $\boldsymbol{b}$ 相当于加"$-\boldsymbol{b}$"．即 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$，如图 5.5.

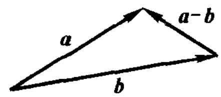

图 5.5

设 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$.

矢量的加法与数的加法类似，满足以下规律：

(1) 若 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$；

(2) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$；

(3) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$　（交换律）；

(4) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$　（结合律）；

(5) 若 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$　（消去律）.

1.3　数乘矢量

定义 1.6　实数 k 与矢量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积称为**数乘矢量**．记为 $k\boldsymbol{a}$，它的模 $|k\boldsymbol{a}|=|k||\boldsymbol{a}|$．其方向为，当 $k>0$ 时，$k\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向；当 $k<0$ 时，$k\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向；当 $k=0$ 时，$0\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$；当 $k=1$ 时，$1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$；$k=-1$ 时，$(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$.

数乘矢量满足下列规律：

(1) $k\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}k$　（交换律）；

(2) $k(l\boldsymbol{a})=(kl)\boldsymbol{a}$，$k$，$l$ 为实数　（结合律）；

(3) $(k+l)\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{a}$，$k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=k\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$　（分配律）；

(4) 若 $k\neq 0$，$k\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，
　若 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，$k\boldsymbol{a}=l\boldsymbol{a}$，则 $k=l$　（消去律）.

例如矢量 $\boldsymbol{a}$ 为非零矢量，即 $|\boldsymbol{a}|\neq 0$．则因为 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0$，所以 $\boldsymbol{a}^0=\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$.

矢量加法与数乘矢量统称矢量的**线性运算**．设任意二实数 k、l，与两个矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的运算 $k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{b}$ 称为矢量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的线性运算.

显然，当 $k=l=1$ 时，为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$；当 $l=0$ 时为 $k\boldsymbol{a}$．所以矢量的线性运算包含矢量加法与数乘矢量.

线性运算又称为**线性组合**，即 $k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{b}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的线性组合．若矢量 $\boldsymbol{c}=k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{b}$，

又称矢量 c 可被 a 与 b 线性表示,….这些都是线性代数课程中讨论的重要概念.其几何意义在于矢量共线与共面的问题.

对于自由矢量来说,互相平行的矢量称为**共线矢量**,平行于同一平面的矢量称为**共面矢量**.关于矢量共线与共面有以下常用到的结论:

结论 1 零矢量与任何矢量共线(零矢量平行于任何矢量).

结论 2 若矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 有等式 $\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{b}$ 成立.则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线(数乘矢量与原矢量平行).

结论 3 矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线的充分必要条件是存在不全为零的数 k_1,k_2,使得 $k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

证 必要性.若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线,则当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 时,有 $1\boldsymbol{a}+0\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$,这时 $k_1=1$,$k_2=0$; 当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 时,有 $0\boldsymbol{a}+1\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$,这时 $k_1=0,k_2=1$;当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 均为非零矢量时,因为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行,所以 $\boldsymbol{a}$ 为 $\boldsymbol{b}$ 的数乘,即存在实数 l,使得 $\boldsymbol{a}=l\boldsymbol{b}$(当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时 $l>0$;反向时 $l<0$).有

$$\boldsymbol{a}-l\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0},\quad 即\quad k_1=1,k_2=-l;$$

所以必存在不全为零的数 k_1,k_2,使得 $k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 成立.

充分性.若存在不全为零的数 k_1,k_2,使得 $k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$,则当 $k_1\neq 0$ 时,$\boldsymbol{a}=-\dfrac{k_2}{k_1}\boldsymbol{b}$;当 $k_2\neq 0$ 时,$\boldsymbol{b}=-\dfrac{k_1}{k_2}\boldsymbol{a}$.所以由结论 2 知 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线.

结论 4 若矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足关系 $\boldsymbol{c}=k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}$($k_1,k_2$ 为实数),则 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 三矢量共面(由矢量加法可证).

结论 5 三个矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面的充分必要条件是存在不全为零的实数 k_1,k_2,k_3,使得 $k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}+k_3\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ 成立(作为练习证明).

1.4 矢量的数量积(内积)

从物理学中知道在力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下使物体作直线运动而产生位移 $\boldsymbol{s}$ 时所做的功(见图 5.6)为

$$W=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\theta.$$

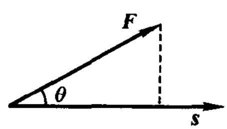

图 5.6

定义 1.7 两矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**数量积**(内积),等于两矢量的模与两矢量夹角的余弦的乘积.记为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta. \tag{1.1}$$

注.$\theta=\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.即平移两矢量使始端重合为角的顶点,以两矢量为边所成的角,规定 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$.

数量积满足以下规律:

(1)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$ (交换律);

(2)$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$ (分配律);

(3)$(k\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(k\boldsymbol{b})=k(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$;

(4) $\boldsymbol{a}^2 = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2$.

这里要注意：三个矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的积，$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$ 之间未必相等，特别要注意 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$ 是无意义的.

由数量积的定义可推得两个重要公式，设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为非零矢量，则有：

$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角的余弦

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}; \tag{1.2}$$

$\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|} \quad \text{或记为} \quad a_b = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}; \tag{1.3}$$

$\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|} \quad \text{或记为} \quad b_a = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}. \tag{1.4}$$

定理 1.1　两个矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0$.

证　必要性. 若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\theta = \frac{\pi}{2}$，所以

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

充分性. 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0$，则 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta = 0$，当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 至少有一个为零矢量时，则零矢量与任何矢量都垂直. 当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 均为非零矢量时，即 $|\boldsymbol{a}|\neq 0$，$|\boldsymbol{b}|\neq 0$ 时，有 $\cos\theta = 0$；即 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\theta = \frac{\pi}{2}$，两矢量垂直.

1.5　矢量积

回忆物理学中**矩**的概念. 如图 5.7 所示，悬臂长为 S，悬臂端作用力为 $\boldsymbol{F}$，则 $\boldsymbol{F}$ 与力臂 $\boldsymbol{S}$ 产生的矩的大小等于 $|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{S}|\sin\theta$，方向规定为右手定则.

图 5.7

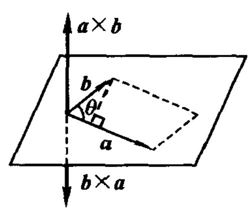

图 5.8

定义 1.8　两矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**矢量积**为一个矢量，记为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，它的模等于两矢量的模与两矢量夹角 $\theta = \langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 的正弦 $\sin\theta$ 的积，即

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta; \tag{1.5}$$

方向垂直于 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 所在平面，按右手定则指定的方向. 如图 5.8.

显然 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$.所以矢量积交换律不成立,这是值得注意的.又因为 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$,所以 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的模等于以 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 为邻边所构成平行四边形的面积.

矢量积满足下列规律:

(1)$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$;

(2)$(k\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(k\boldsymbol{b})=k(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$($k$ 为实数);

(3) $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$;

$(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$　(分配律).

可以看出矢量积只有分配律成立,交换律与结合律都不成立,即$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$ 未必等于 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$.所以连乘积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$ 同样无意义.

定理 1.2　两矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

证　必要性.若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\theta=0$ 或 $\theta=\pi$,故

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta=0,$$

所以 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

充分性.若 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.则 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta=0$,当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 至少有一个为零矢量时,因零矢量与任何矢量平行,所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行.当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 均为非零矢量时,则 $|\boldsymbol{a}|\neq 0$,$|\boldsymbol{b}|\neq 0$,因此 $\theta=0$ 或 $\theta=\pi$.所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行.

*1.6　混合积

定义 1.9　三个矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的积 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 称为**混合积**,记为 $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$.

设矢量 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角为 t,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ,则

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}&=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos t\\&=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}\boldsymbol{c}.\end{aligned}\qquad(1.6)$$

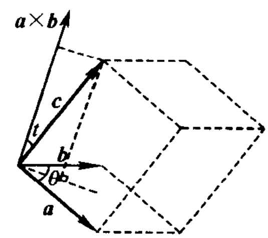

图 5.9

由图 5.9 知混合积的绝对值 $|[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]|$ 等于以 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ 三矢量为棱所构成平行六面体的体积.

混合积具有下列性质:

(1)$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}]=[\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$　(轮换性);

(2)$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=-[\boldsymbol{b},\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}]=-[\boldsymbol{c},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}]=-[\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}]$　(对换变号);

(3)$[k\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=[\boldsymbol{a},k\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},k\boldsymbol{c}]=k[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$;

(4)$[\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]+[\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$.

以上性质在下一节建立坐标系后,用向量的坐标及混合积的行列式表达式,再根据行列式的性质很容易给出证明.

定理 1.3　三个矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面的充分必要条件是 $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=0$.

证　必要性.若矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面,则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 垂直.所以

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos\frac{\pi}{2}=0.$$

充分性.若 $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=0$,即 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos t=0$,则

$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=0$　或　$|\boldsymbol{c}|=0$　或　$\cos t=0$ (t 为 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的夹角),

若 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=0$,则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行,所以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面;若 $|\boldsymbol{c}|=0$,则 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$,零矢量与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共面;若 $\cos t=0$,则 $t=\frac{\pi}{2}$,$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 垂直,所以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面.综上所述 $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=0$ 时,$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面.

1.7　矢量代数的应用举例

例 1.1　证明三角形两边中点的连线平行于第三边且等于第三边的一半.

证　作任意三角形,如图 5.10 所示 ΔABC,D,E 分别为 AB,AC 边的中点,连接 DE.则

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DE}&=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\\&=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC},\end{aligned}$$

所以 $DE\,/\!/\,BC$,且 $DE=\frac{1}{2}BC$.

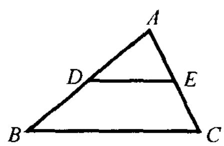

图 5.10

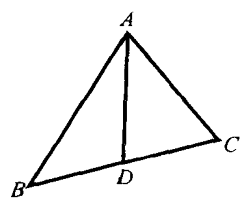

图 5.11

例 1.2　如图 5.11 所示 ΔABC,D 为 BC 边的中点,试证

$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}).$$

证　因为 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$,又 $\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$,$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$,所以

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}).$$

例 1.3　证明下列等式:

(1) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=2(\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2)$;

(2) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2$.

证 (1) 左端 $= (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$

$$= \boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$$

$$= 2(\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2) = \text{右端};$$

(2) 左端 $= |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2$

$$= (|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle)^2+(|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle)^2$$

$$= |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 = \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2 = \text{右端}.$$

例 1.4 设有空间三点 A,B,C 及点 O,及 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{r}_1,\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{r}_2,\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{r}_3$.若 $\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3$ 满足等式 $\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3+\boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{0}$,试证 A,B,C 三点共线.

证 因为 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1,\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1$,所以

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)\times(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1)$$

$$=\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_3+\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_1$$

又因为 $\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{0},\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_1=-\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_3=-\boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{r}_1$,有

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3+\boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{0},$$

即 $AB\,/\!/\,AC$,所以 A,B,C 三点共线.

例 1.5 设 $\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})-\boldsymbol{b},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 均为非零矢量,且 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$.试证:

(1) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$;

(2) $\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的夹角 θ 满足 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$.

证 (1) 因为 $\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})-\boldsymbol{b}$,有 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$,所以 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 垂直 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 所在平面,即 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}$(且 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$).

(2) 因为 $\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=0$,有 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$.即 $\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0,\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=-|\boldsymbol{b}|^2$,又因为 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos\theta$,所以

$$\cos\theta=-\frac{|\boldsymbol{b}|^2}{|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|}<0,\quad \text{即}\quad \frac{\pi}{2}<\theta<\pi.$$

习题 5.1

(A)

1. 已知矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的模 $|\boldsymbol{a}|=3,|\boldsymbol{b}|=4$,夹角 $\theta=\frac{\pi}{3}$.求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b},|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|,|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|,|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

2. 已知矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的模 $|\boldsymbol{a}|=2\sqrt{2},|\boldsymbol{b}|=3$,夹角 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{4}$,求以矢量 $\boldsymbol{c}=5\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形对角线的长.

3. 已知平行四边形对角线矢量为 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n}$ 及 $\boldsymbol{d}=3\boldsymbol{m}-4\boldsymbol{n}$.其中 $|\boldsymbol{m}|=1$,

$|\boldsymbol{n}| = 2$,夹角$\langle \boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle = \frac{\pi}{6}$.求此平行四边形的面积.

4.判断下列等式何时成立:

(1)$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$;　(2)$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$;

(3)$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$;　(4)$\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a} = \frac{1}{|\boldsymbol{b}|}\boldsymbol{b}$.

5.下列运算是否正确,为什么?

(1)$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$;

(2)若$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$,则$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$;

(3)若$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$,且$\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{0}$,则$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$;

(4)若$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$,且$\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{0}$,则$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$.

6.用几何作图验证下列等式:

(1)$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) = 2\boldsymbol{a}$;

(2)$(\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

7.设平行四边形 $ABCD$ 的对角线矢量$\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{BD} = \boldsymbol{b}$,求$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{BC}$.

8.证明$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$成立的充分必要条件是$\boldsymbol{a}$垂直于$\boldsymbol{b}$.

9.设$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$,且$|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{c}|$,试证:$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

10.设$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$,证明:$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$.

(B)

1.设有平行四边形 $ABCD$,且$\overrightarrow{AD} = \boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{b}$.求垂直于 AD 边的高矢量.

2.若矢量$\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$垂直于矢量$7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$,矢量$\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$垂直于矢量$7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$,求矢量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角.

3.证明不等式$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$.

4.若$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$为非零矢量,且满足$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$,$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$,试证:

$$|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{c}| = 1.$$

5.证明:(1)若$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$,则$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$共面;

(2)若$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}$,$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d}$,则$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d}$与$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$共线.

6.试证(关于矢量共线与共面的结论5):三矢量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$共面的充分必要条件是存在不全为零的实数$k_1,k_2,k_3$,使得

$$k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}+k_3\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}.$$

第二节　坐标系、矢量的坐标

第一节介绍了矢量及其运算的定义.本节将建立空间直角坐标系,把矢量及