

微 积 分

(下册)

四川大学数学学院

杨志和 主编

编 者(按姓氏笔划排序)

于正端 伍炯宇 何祖林
杨志和 徐小湛



高等教育出版社

HIGHER EDUCATION PRESS

图书在版编目(CIP)数据

微积分(下册)/四川大学数学学院 杨志和 主编. —北京:高等教育出版社, 2002.2

非数学专业本科生、金融管理专业本科生教材

ISBN 7-04-010609-4

I. 微… II. 杨… III. 微积分—高等学校—教材 IV. 0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 098202 号

责任编辑:徐可 封面设计:王凌波
版式设计:杨明 责任印制:陈伟光

微积分(下册)
四川大学数学学院 杨志和 主编

出版发行 高等教育出版社

社 址 北京市东城区沙滩后街 55 号

邮政编码 100009

电 话 010-64054588

传 真 010-64014048

网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>

经 销 新华书店北京发行所

印 刷 北京民族印刷厂

开 本 787×960 1/16

版 次 2002 年 2 月第 1 版

印 张 28.5

印 次 2002 年 2 月第 1 次印刷

字 数 560 000

定 价 29.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

目 录

第五章 空间解析几何与矢量代数	1
第一节 矢量及矢量的运算	1
1.1 矢量、矢量的模、单位矢量	1
1.2 矢量的加法	2
1.3 数乘矢量	3
1.4 矢量的数量积(内积)	4
1.5 矢量积	5
* 1.6 混合积	6
1.7 矢量代数的应用举例	7
习题 5.1	8
第二节 坐标系、矢量的坐标	9
2.1 坐标系	10
2.2 空间仿射坐标系与空间直角坐标系	10
2.3 矢量运算的坐标表达式	14
习题 5.2	17
第三节 平面与直线	18
3.1 平面方程	19
3.2 直线方程	20
3.3 点到平面与点到直线的距离	22
3.4 两平面、两直线及平面与直线的关系	23
习题 5.3	26
第四节 曲面与曲线	28
4.1 曲面方程	28
4.2 曲线方程	32
4.3 投影曲线	35
习题 5.4	38
第五节 二次曲面的标准型	39
习题 5.5	47

小 结	48
总习题	49
第六章 多元函数微分学	52
第一节 多元函数的概念	52
1.1 点集的基本知识	52
1.2 多元函数的定义	55
1.3 多元函数的极限	58
1.4 多元函数的连续性	62
习题 6.1	63
第二节 偏导数与全微分	64
2.1 偏导数	64
2.2 全微分	69
2.3 全微分在近似计算中的应用	72
2.4 高阶偏导数	73
习题 6.2	76
第三节 复合函数的微分法	78
习题 6.3	86
第四节 隐函数的微分法	87
4.1 由一个方程确定的隐函数	88
* 4.2 由方程组所确定的隐函数	93
习题 6.4	103
第五节 微分法在几何上的应用	104
5.1 空间曲线的切线与法平面	104
5.2 空间曲面的切平面与法线	108
习题 6.5	110
第六节 多元函数的极值	111
6.1 多元函数的极值	111
6.2 最大值与最小值	116
6.3 条件极值	119
习题 6.6	122
* 第七节 多元函数泰勒公式简介	123
7.1 多元函数的泰勒公式	123
7.2 极值存在的必要条件(定理 6.1)的证明	126
7.3 极值存在的充分条件(定理 6.2)的证明	127

习题 6.7	128
第八节 矢量分析	128
8.1 矢量函数	128
8.2 矢量函数的极限和连续性	129
8.3 矢量函数的导数和积分	130
8.4 方向导数与梯度	132
8.5 矢量场	139
习题 6.8	141
小 结	142
总习题	143
第七章 重积分	146
第一节 二重积分的概念与性质	146
1.1 曲顶柱体的体积	146
1.2 平面薄片的质量	148
1.3 二重积分的定义	148
1.4 二重积分的性质	150
习题 7.1	151
第二节 二重积分的计算	152
2.1 在直角坐标下计算二重积分	152
习题 7.2(1)	158
2.2 在极坐标系下计算二重积分	161
2.3 二重积分的变量替换	167
习题 7.2(2)	169
第三节 二重积分的应用	172
3.1 二重积分的微元法	172
3.2 曲面的面积	173
3.3 平面薄片的重心	175
3.4 平面薄片的转动惯量	177
习题 7.3	178
第四节 三重积分	179
4.1 三重积分的概念与性质	179
4.2 三重积分的计算	180
习题 7.4(1)	184
4.3 三重积分的应用	191

4.4 三重积分的变量替换	192
习题 7.4(2)	194
小 结	196
总习题	197
第八章 曲线积分和曲面积分	199
第一节 第一型曲线积分	199
1.1 第一型曲线积分的概念与性质	199
1.2 第一型曲线积分的计算	201
1.3 第一型曲线积分的应用	203
习题 8.1	205
第二节 第二型曲线积分	206
2.1 第二型曲线积分的概念与性质	206
2.2 第二型曲线积分的计算	209
2.3 两类曲线积分的联系	212
习题 8.2	213
第三节 格林公式及曲线积分与路径无关的条件	214
3.1 格林公式	214
3.2 曲线积分与路径无关的条件	219
习题 8.3	227
第四节 第一型曲面积分	229
4.1 第一型曲面积分的概念	229
4.2 第一型曲面积分的计算	231
习题 8.4	232
第五节 第二型曲面积分	234
5.1 第二型曲面积分的概念	234
5.2 第二型曲面积分的计算	236
习题 8.5	239
第六节 高斯公式与散度	240
6.1 高斯公式	240
6.2 散度	243
习题 8.6	244
第七节 斯托克斯公式与旋度	246
7.1 斯托克斯公式	246
7.2 旋度	249

习题 8.7	251
小 结	252
总习题	253
第九章 无穷级数	255
第一节 常数项级数	255
1.1 常数项级数的概念及基本性质	255
1.2 正项级数的审敛法	260
1.3 变号级数的审敛法	265
习题 9.1	269
第二节 函数项级数	273
2.1 函数项级数的收敛域与和函数	273
* 2.2 函数项级数的一致收敛性	275
* 2.3 一致收敛级数的基本性质	278
习题 9.2	281
第三节 幂级数	282
3.1 幂级数及其收敛性	283
3.2 幂级数的运算	287
3.3 函数展开成幂级数	290
3.4 幂级数的应用举例	297
习题 9.3	301
第四节 傅里叶级数	304
4.1 三角级数、三角函数系的正交性	304
4.2 周期函数的傅里叶展开式	306
4.3 定义在 $[0, l]$ 上函数的傅里叶展开式	314
4.4 傅里叶级数的复数形式	316
* 4.5 平方平均逼近	318
习题 9.4	320
小 结	323
总习题	326
第十章 广义积分和含参积分	329
第一节 广义积分	329
1.1 无穷积分及其审敛法	329
1.2 无界函数的积分(瑕积分)及其审敛法	335

1.3 Γ -函数与 B-函数	338
习题 10.1	340
* 第二节 含参变量的积分	342
2.1 含参变量的积分及其分析性质	342
2.2 含参变量的广义积分	346
习题 10.2	349
第十一章 常微分方程	351
第一节 微分方程的基本概念	351
习题 11.1	354
第二节 一阶微分方程的初等解法	354
2.1 变量可分离的方程	355
2.2 齐次方程	356
2.3 一阶线性方程	358
2.4 全微分方程	361
2.5 应用举例	364
习题 11.2	368
第三节 可降阶的高阶微分方程	371
3.1 $y^{(n)} = f(x)$ 的微分方程	371
3.2 $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程	372
3.3 $y'' = f(y, y')$ 型的微分方程	374
习题 11.3	375
第四节 高阶线性微分方程	376
4.1 线性微分方程解的结构	376
4.2 常系数齐次线性微分方程	382
4.3 常系数非齐次线性微分方程	385
4.4 欧拉方程	393
习题 11.4	395
第五节 微分方程的幂级数解法与常系数线性微分方程组	399
5.1 线性微分方程的幂级数解法	399
5.2 常系数线性微分方程组	402
习题 11.5	405
小 结	406
总习题	408
习题答案或提示	411
参考文献	446

第五章 空间解析几何与矢量代数

“几何学”是数学的重要分支,是现代科技工作者必需掌握的数学知识.“空间解析几何”是“几何学”的重要部分,是学习多元函数微积分、线性代数以及其他数学课程必不可少的基础.同时,也是学习物理、力学以及其它工程技术学科所必需具备的数学知识.

本章首先认识几何空间矢量(或称向量),掌握其运算法则,并运用矢量建立空间平面与直线方程.同时,也介绍了空间曲面与曲线,以及二次曲面的标准型等基本内容.

第一节 矢量及矢量的运算

矢量来源于力学、物理学.本节从物理、力学上引入矢量运算的定义,并给出其运算规律以及矢量平行、垂直的重要定理.学习空间解析几何,首先要熟练掌握矢量的基本概念及其运算.

1.1 矢量、矢量的模、单位矢量

在物理、力学中,如速度、加速度、力、位移等既有大小又有方向的量称为**矢量**(或称**向量**).用有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 表示大小为 AB 线段的长度,沿 AB 直线从点 A 到点 B 方向的矢量,点 A 称为矢量 $\overrightarrow{AB}$ 的**始端**,点 B 称为矢量的**终端**.如图5.1,为书写简便又用 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 表示矢量,也可用黑体字母 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ 表示.符号 $|\overrightarrow{AB}|$ 表示矢量 $\overrightarrow{AB}$ 的大小,称为矢量 $\overrightarrow{AB}$ 的**模**,同样 $|\vec{a}|$ 表示矢量 $\vec{a}$ 的模. $|\mathbf{a}|$ 表示矢量 $\mathbf{a}$ 的模.

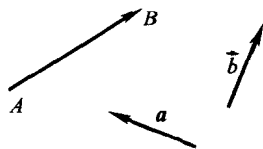


图 5.1

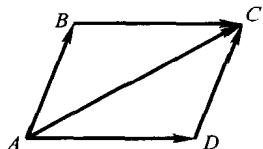


图 5.2

定义 1.1 若两个矢量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的方向相同、大小相等(模相等),则称两矢量相等,记为 $\mathbf{a} = \mathbf{b}$,亦即一个平行移动后的矢量与原矢量相等,这样的矢量又称为**自由矢量**.

如图5.2所示的平行四边形 $ABCD$,矢量 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

定义 1.2 若两个矢量 a 与 b 的大小(模)相等,方向相反(a 与 b 互为逆向矢量),则称 b 为 a 的**负矢量**,或称 a 为 b 的**负矢量**.记为 $a = -b$ 或 $b = -a$.

如图 5.2 中, $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$.

定义 1.3 长度为零的矢量(模等于零),称为**零矢量**,记为 $\vec{0}$,在不致于混淆的情况下也写为“0”.零矢量又称为**点矢量**,无一定方向,所以可以是任意方向的矢量.

定义 1.4 长度为一个单位(模等于 1)的矢量称为**单位矢量**.一个矢量 a 的单位矢量为与 a 方向相同,长度(模)为一个单位的矢量,记为 a^0 .

任何一个矢量都可用其单位矢量乘以它的模来表示,如 $a = |a|a^0$.以点 O 为始端的所有单位矢量的终端构成以点 O 为球心、半径为一个单位的球面.

1.2 矢量的加法

在物理力学中,两个力的合力用“平行四边形法则”确定,如图 5.3(a),矢量 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 表示两个力,以 OA 、 OB 为邻边作平行四边形 $OACB$,对角线为 OC ,则矢量 $\overrightarrow{OC}$ 是 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的合力,记为 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$,这便是矢量加法的“平行四边形法则”.

“平行四边形法则”可简化为“三角形法则”.如图 5.3(b), (c).用简便符号, $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC} = a$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AC} = b$.

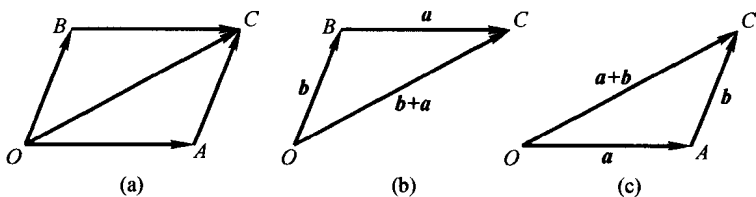


图 5.3

定义 1.5 两矢量 a 与 b 的加法.若 a 的终端与 b 的始端相连,则从 a 的始端到 b 终端的矢量为 a 与 b 的和,记为 $a + b$,称为“ a 加 b ”.若 b 的终端与 a 的始端相连,则从 b 的始端到 a 的终端的矢量为 $b + a$,称为“ b 加 a ”.

因为矢量 a , b 与 $a + b$ 构成一个三角形,所以又称为“三角形法则”,显然矢量的加法满足交换律 $a + b = b + a$.

从两个矢量相加的“三角形法则”,不难推广到多个矢量相加的“封闭多边形法则”.如图 5.4,设矢量 a, b, c, d ,作加法 $a + b + c + d$.则只要把矢量 a, b, c, d 依次序首(始端)尾(终端)相连,那么从矢量 a 的始端到矢量 d 的终端的矢量为 $a + b + c + d$.

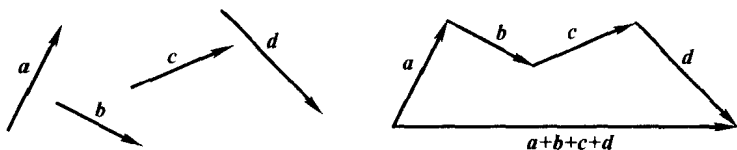


图 5.4

“代数”中引入负数后,加法的逆运算减法,已当作代数和,减一个数相当于加该数的相反数.矢量运算同样如此,矢量 a 减矢量 b 相当于加“ $-b$ ”.即 $a - b = a + (-b)$,如图 5.5.

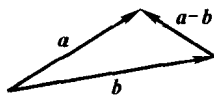


图 5.5

设 $a + b = c$,则 $c - a = b$, $c - b = a$.

矢量的加法与数的加法类似,满足以下规律:

- (1) 若 $a + b = 0$,则 $b = -a$, $a = -b$;
- (2) $a + 0 = a$;
- (3) $a + b = b + a$ (交换律);
- (4) $(a + b) + c = a + (b + c)$ (结合律);
- (5) 若 $a + b = a + c$,则 $b = c$ (消去律).

1.3 数乘矢量

定义 1.6 实数 k 与矢量 a 的乘积称为**数乘矢量**.记为 ka ,它的模 $|ka| = |k| |a|$.其方向为,当 $k > 0$ 时, ka 与 a 同向;当 $k < 0$ 时, ka 与 a 反向;当 $k = 0$ 时, $0a = 0$;当 $k = 1$ 时, $1 \cdot a = a$; $k = -1$ 时, $(-1)a = -a$.

数乘矢量满足下列规律:

- (1) $ka = ak$ (交换律);
- (2) $k(la) = (kl)a$, k, l 为实数 (结合律);
- (3) $(k + l)a = ka + la$, $k(a + b) = ka + kb$ (分配律);
- (4) 若 $k \neq 0$, $ka = kb$,则 $a = b$,

若 $a \neq 0$, $ka = la$,则 $k = l$ (消去律).

例如矢量 a 为非零矢量,即 $|a| \neq 0$.则因为 $a = |a|a^0$,所以 $a^0 = \frac{1}{|a|}a$.

矢量加法与数乘矢量统称矢量的**线性运算**.设任意二实数 k, l ,与两个矢量 a, b 的运算 $ka + lb$ 称为矢量 a, b 的线性运算.

显然,当 $k = l = 1$ 时,为 $a + b$;当 $l = 0$ 时为 ka .所以矢量的线性运算包含矢量加法与数乘矢量.

线性运算又称为**线性组合**,即 $ka + lb$ 为 a 与 b 的线性组合.若矢量 $c = ka + lb$,

又称矢量 c 可被 a 与 b 线性表示, …, 这些都是线性代数课程中讨论的重要概念. 其几何意义在于矢量共线与共面的问题.

对于自由矢量来说, 互相平行的矢量称为**共线矢量**, 平行于同一平面的矢量称为**共面矢量**. 关于矢量共线与共面有以下常用到的结论:

结论 1 零矢量与任何矢量共线(零矢量平行于任何矢量).

结论 2 若矢量 a 与 b 有等式 $a = kb$ 成立, 则 a 与 b 共线(数乘矢量与原矢量平行).

结论 3 矢量 a 与 b 共线的充分必要条件是存在不全为零的数 k_1, k_2 , 使得 $k_1a + k_2b = 0$.

证 必要性. 若 a 与 b 共线, 则当 $a = 0$ 时, 有 $1a + 0b = 0$, 这时 $k_1 = 1, k_2 = 0$; 当 $b = 0$ 时, 有 $0a + 1b = 0$, 这时 $k_1 = 0, k_2 = 1$; 当 a, b 均为非零矢量时, 因为 a 与 b 平行, 所以 a 为 b 的数乘, 即存在实数 l , 使得 $a = lb$ (当 a 与 b 同向时 $l > 0$; 反向时 $l < 0$). 有

$$a - lb = 0, \quad \text{即} \quad k_1 = 1, k_2 = -l;$$

所以必存在不全为零的数 k_1, k_2 , 使得 $k_1a + k_2b = 0$ 成立.

充分性. 若存在不全为零的数 k_1, k_2 , 使得 $k_1a + k_2b = 0$, 则当 $k_1 \neq 0$ 时, $a = -\frac{k_2}{k_1}b$; 当 $k_2 \neq 0$ 时, $b = -\frac{k_1}{k_2}a$. 所以由结论 2 知 a 与 b 共线.

结论 4 若矢量 a, b, c 满足关系 $c = k_1a + k_2b$ (k_1, k_2 为实数), 则 a, b, c 三矢量共面(由矢量加法可证).

结论 5 三个矢量 a, b, c 共面的充分必要条件是存在不全为零的实数 k_1, k_2, k_3 , 使得 $k_1a + k_2b + k_3c = 0$ 成立(作为练习证明).

1.4 矢量的数量积(内积)

从物理学中知道在力 F 的作用下使物体作直线运动而产生位移 s 时所做的功(见图 5.6)为

$$W = |F| |s| \cos \theta.$$

定义 1.7 两矢量 a 与 b 的**数量积(内积)**, 等于两矢量的模与两矢量夹角的余弦的乘积. 记为

$$a \cdot b = |a| |b| \cos \theta. \quad (1.1)$$

注. $\theta = \langle a, b \rangle$ 为 a 与 b 的夹角. 即平移两矢量使始端重合为角的顶点, 以两矢量为边所成的角, 规定 $0 \leq \theta \leq \pi$.

数量积满足以下规律:

- (1) $a \cdot b = b \cdot a$ (交换律);
- (2) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (分配律);
- (3) $(ka) \cdot b = a \cdot (kb) = k(a \cdot b)$;

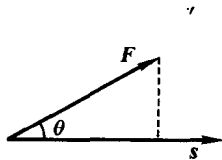


图 5.6

$$(4) a^2 = a \cdot a = |a|^2.$$

这里要注意:三个矢量 a, b, c 的积, $(a \cdot b)c$ 与 $a(b \cdot c)$ 之间未必相等, 特别要注意 $a \cdot b \cdot c$ 是无意义的.

由数量积的定义可推得两个重要公式, 设 a 与 b 为非零矢量, 则有:

a 与 b 的夹角的余弦

$$\cos \theta = \frac{a \cdot b}{|a||b|}; \quad (1.2)$$

a 在 b 上的投影

$$\text{Prj}_b a = \frac{a \cdot b}{|b|} \quad \text{或记为} \quad a_b = \frac{a \cdot b}{|b|}; \quad (1.3)$$

b 在 a 上的投影

$$\text{Prj}_a b = \frac{a \cdot b}{|a|} \quad \text{或记为} \quad b_a = \frac{a \cdot b}{|a|}. \quad (1.4)$$

定理 1.1 两个矢量 a 与 b 垂直的充分必要条件是 $a \cdot b = 0$.

证 必要性. 若 a 与 b 垂直, 则 a 与 b 的夹角 $\theta = \frac{\pi}{2}$, 所以

$$a \cdot b = |a||b|\cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

充分性. 若 $a \cdot b = 0$, 则 $|a||b|\cos \theta = 0$, 当 a 与 b 至少有一个为零矢量时, 则零矢量与任何矢量都垂直. 当 a 与 b 均为非零矢量时, 即 $|a| \neq 0, |b| \neq 0$ 时, 有 $\cos \theta = 0$; 即 a 与 b 的夹角 $\theta = \frac{\pi}{2}$, 两矢量垂直.

1.5 矢量积

回忆物理学中矩的概念. 如图 5.7 所示, 悬臂长为 S , 悬臂端作用力为 F , 则 F 与力臂 S 产生的矩的大小等于 $|F||S|\sin \theta$, 方向规定为右手定则.

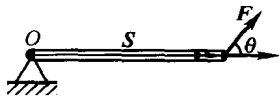


图 5.7

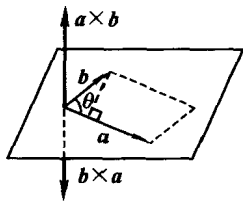


图 5.8

定义 1.8 两矢量 a 与 b 的矢量积为一个矢量, 记为 $a \times b$, 它的模等于两矢量的模与两矢量夹角 $\theta = \langle a, b \rangle$ 的正弦 $\sin \theta$ 的积, 即

$$|a \times b| = |a||b|\sin \theta; \quad (1.5)$$

方向垂直于 a, b 所在平面, 按右手定则指定的方向. 如图 5.8.

显然 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$. 所以矢量积交换律不成立, 这是值得注意的. 又因为 $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta$, 所以 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 的模等于以 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 为邻边所构成平行四边形的面积.

矢量积满足下列规律:

$$(1) \mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a};$$

$$(2) (k\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (k\mathbf{b}) = k(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad (k \text{ 为实数});$$

$$(3) \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c};$$

$$(\mathbf{b} + \mathbf{c}) \times \mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{a} + \mathbf{c} \times \mathbf{a} \quad (\text{分配律}).$$

可以看出矢量积只有分配律成立, 交换律与结合律都不成立, 即 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ 未必等于 $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$. 所以连乘积 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ 与 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ 同样无意义.

定理 1.2 两矢量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 平行的充分必要条件是 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

证 必要性. 若 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 平行, 则 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角 $\theta = 0$ 或 $\theta = \pi$, 故

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta = 0,$$

所以 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

充分性. 若 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$. 则 $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta = 0$, 当 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 至少有一个为零矢量时, 因零矢量与任何矢量平行, 所以 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 平行. 当 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 均为非零矢量时, 则 $|\mathbf{a}| \neq 0, |\mathbf{b}| \neq 0$, 因此 $\theta = 0$ 或 $\theta = \pi$. 所以 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 平行.

* 1.6 混合积

定义 1.9 三个矢量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 的积 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ 称为混合积, 记为 $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$.

设矢量 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 与 $\mathbf{c}$ 的夹角为 t , $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角为 θ , 则

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} &= |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| |\mathbf{c}| \cos t \\ &= |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \text{Prj}_{\mathbf{a} \times \mathbf{b}} \mathbf{c}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

由图 5.9 知混合积的绝对值 $|[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]|$ 等于以 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 三矢量为棱所构成平行六面体的体积.

混合积具有下列性质:

$$(1) [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}] = [\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}] \quad (\text{轮换性});$$

$$(2) [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}] = -[\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}] = -[\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}] \quad (\text{对换变号});$$

$$(3) [k\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{a}, k\mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{a}, \mathbf{b}, k\mathbf{c}] = k[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}];$$

$$(4) [\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{c}] + [\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c}].$$

以上性质在下一节建立坐标系后, 用向量的坐标及混合积的行列式表达式, 再根据行列式的性质很容易给出证明.

定理 1.3 三个矢量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 共面的充分必要条件是 $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = 0$.

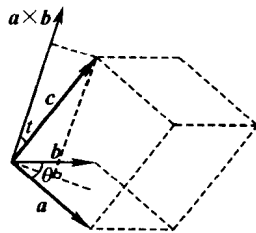


图 5.9

证 必要性. 若向量 a, b, c 共面, 则 $a \times b$ 与 c 垂直. 所以

$$[a, b, c] = (a \times b) \cdot c = |a \times b| |c| \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

充分性. 若 $[a, b, c] = 0$, 即 $|a \times b| |c| \cos t = 0$, 则

$$|a \times b| = 0 \quad \text{或} \quad |c| = 0 \quad \text{或} \quad \cos t = 0 \quad (t \text{ 为 } c \text{ 与 } a \times b \text{ 的夹角}),$$

若 $|a \times b| = 0$, 则 $a \times b = 0$, a 与 b 平行, 所以 a, b, c 共面; 若 $|c| = 0$, 则 $c = 0$, 零向量与 a, b 共面; 若 $\cos t = 0$, 则 $t = \frac{\pi}{2}$, $a \times b$ 与 c 垂直, 所以 a, b, c 共面. 综上所述 $[a, b, c] = 0$ 时, a, b, c 共面.

1.7 向量代数的应用举例

例 1.1 证明三角形两边中点的连线平行于第三边且等于第三边的一半.

证 作任意三角形, 如图 5.10 所示 $\triangle ABC$, D, E 分别为 AB, AC 边的中点, 连接 DE . 则

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DE} &= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \\ &= \frac{1}{2} (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}, \end{aligned}$$

所以 $DE \parallel BC$, 且 $DE = \frac{1}{2} BC$.

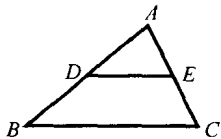


图 5.10

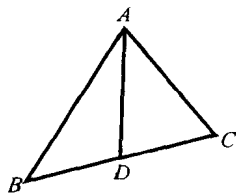


图 5.11

例 1.2 如图 5.11 所示 $\triangle ABC$, D 为 BC 边的中点, 试证

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).$$

证 因为 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$, 又 $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2} \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$, 所以

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).$$

例 1.3 证明下列等式:

$$(1) (a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2);$$

$$(2) (a \times b)^2 + (a \cdot b)^2 = a^2 b^2.$$

证 (1) 左端 = $(a+b) \cdot (a+b) + (a-b) \cdot (a-b)$
 $= a^2 + 2a \cdot b + b^2 + a^2 - 2a \cdot b + b^2$
 $= 2(a^2 + b^2) = \text{右端};$

(2) 左端 = $|a \times b|^2 + (a \cdot b)^2$
 $= (|a| |b| \sin \langle a, b \rangle)^2 + (|a| |b| \cos \langle a, b \rangle)^2$
 $= |a|^2 |b|^2 = a^2 b^2 = \text{右端}.$

例 1.4 设有空间三点 A, B, C 及点 O , 及 $\overrightarrow{OA} = r_1, \overrightarrow{OB} = r_2, \overrightarrow{OC} = r_3$. 若 r_1, r_2, r_3 满足等式 $r_1 \times r_2 + r_2 \times r_3 + r_3 \times r_1 = 0$, 试证 A, B, C 三点共线.

证 因为 $\overrightarrow{AB} = r_2 - r_1, \overrightarrow{AC} = r_3 - r_1$, 所以

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= (r_2 - r_1) \times (r_3 - r_1) \\ &= r_2 \times r_3 - r_2 \times r_1 - r_1 \times r_3 + r_1 \times r_1\end{aligned}$$

又因为 $r_1 \times r_1 = 0, r_2 \times r_1 = -r_1 \times r_2, r_1 \times r_3 = -r_3 \times r_1$, 有

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = r_1 \times r_2 + r_2 \times r_3 + r_3 \times r_1 = 0,$$

即 $AB \parallel AC$, 所以 A, B, C 三点共线.

例 1.5 设 $c = (b \times a) - b, a, b$ 均为非零矢量, 且 $a \times b \neq 0$. 试证:

(1) $a \perp b + c$;

(2) b, c 的夹角 θ 满足 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$.

证 (1) 因为 $c = (b \times a) - b$, 有 $b + c = b \times a$, 所以 $b + c$ 垂直 a, b 所在平面, 即 $b + c \perp a$ (且 $b + c \perp b$).

(2) 因为 $b \cdot (b + c) = 0$, 有 $b \cdot b + b \cdot c = 0$. 即 $b^2 + b \cdot c = 0, b \cdot c = -|b|^2$, 又因为 $b \cdot c = |b| |c| \cos \theta$, 所以

$$\cos \theta = -\frac{|b|^2}{|b| |c|} < 0, \quad \text{即} \quad \frac{\pi}{2} < \theta < \pi.$$

习题 5.1

(A)

1. 已知矢量 a, b 的模 $|a| = 3, |b| = 4$, 夹角 $\theta = \frac{\pi}{3}$. 求 $a \cdot b, |a \times b|, |a + b|, |a - b|$.

2. 已知矢量 a, b 的模 $|a| = 2\sqrt{2}, |b| = 3$, 夹角 $\langle a, b \rangle = \frac{\pi}{4}$, 求以矢量 $c = 5a + 2b$ 和 $d = a - 3b$ 为边的平行四边形对角线的长.

3. 已知平行四边形对角线矢量为 $c = m + 2n$ 及 $d = 3m - 4n$. 其中 $|m| = 1$,

$|n| = 2$, 夹角 $\langle m, n \rangle = \frac{\pi}{6}$. 求此平行四边形的面积.

4. 判断下列等式何时成立:

$$(1) |a + b| = |a - b|; \quad (2) |a + b| = |a| + |b|;$$

$$(3) |a + b| = |a| - |b|; \quad (4) \frac{1}{|a|}a = \frac{1}{|b|}b.$$

5. 下列运算是否正确, 为什么?

$$(1) (a + b) \times (a - b) = a \times a - b \times b = 0;$$

$$(2) \text{若 } a + c = b + c, \text{ 则 } a = b;$$

$$(3) \text{若 } a \cdot c = b \cdot c, \text{ 且 } c \neq 0, \text{ 则 } a = b;$$

$$(4) \text{若 } a \times c = b \times c, \text{ 且 } c \neq 0, \text{ 则 } a = b.$$

6. 用几何作图验证下列等式:

$$(1) (a + b) + (a - b) = 2a;$$

$$(2) (a + \frac{1}{2}b) - (b + \frac{1}{2}a) = \frac{1}{2}(a - b).$$

7. 设平行四边形 $ABCD$ 的对角线矢量 $\overrightarrow{AC} = a, \overrightarrow{BD} = b$, 求 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$.

8. 证明 $|a + b| = |a - b|$ 成立的充分必要条件是 a 垂直于 b .

9. 设 $a + b + c = 0$, 且 $|a| = |b| = |c|$, 试证: $a \cdot b = b \cdot c = c \cdot a$.

10. 设 $a + b + c = 0$, 证明: $a \times b = b \times c = c \times a$.

(B)

1. 设有平行四边形 $ABCD$, 且 $\overrightarrow{AD} = a, \overrightarrow{AB} = b$. 求垂直于 AD 边的高矢量.

2. 若矢量 $a + 3b$ 垂直于矢量 $7a - 5b$, 矢量 $a - 4b$ 垂直于矢量 $7a - 2b$, 求矢量 a 与 b 的夹角.

3. 证明不等式 $|a \cdot b| \leq |a| |b|$.

4. 若 a, b, c 为非零矢量, 且满足 $a = b \times c, b = c \times a, c = a \times b$, 试证:

$$|a| = |b| = |c| = 1.$$

5. 证明: (1) 若 $a \times b + b \times c + c \times a = 0$, 则 a, b, c 共面;

(2) 若 $a \times b = c \times d, a \times c = b \times d$, 则 $a - d$ 与 $b - c$ 共线.

6. 试证(关于矢量共线与共面的结论 5): 三矢量 a, b, c 共面的充分必要条件是存在不全为零的实数 k_1, k_2, k_3 , 使得

$$k_1 a + k_2 b + k_3 c = 0.$$

第二节 坐标系、矢量的坐标

第一节介绍了矢量及其运算的定义. 本节将建立空间直角坐标系, 把矢量及