经济数学基础之二

线性代数、概率论与数理统计学习与解题指导

主　编　程从沈　李艳娟　金光成
副主编　曹士信　赵春昶　孟立红

中国人民大学出版社

经济数学基础之二

线性代数、概率论与数理统计
学习与解题指导

主　编　程从沈　李艳娟　金光成
副主编　曹士信　赵春昶　孟立红

中国人民大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数、概率论与数理统计学习与解题指导/程从沈主编．
北京：中国人民大学出版社，2002
（经济数学基础）

ISBN 7-300-04331-3/O·54

Ⅰ．线…
Ⅱ．程…
Ⅲ．①线性代数－高等学校－教学参考资料
　②概率论－高等学校－教学参考资料
　③数理统计－高等学校－教学参考资料
Ⅳ．①O151.2②O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 066962 号

经济数学基础之二
线性代数、概率论与数理统计
学习与解题指导
主　编　程从沈　李艳娟　金光成
副主编　曹士信　赵春昶　孟立红

出版发行：中国人民大学出版社
　　　　（北京中关村大街 31 号　邮编 100080）
　　　　邮购部．62515[redacted]　[redacted]
　　　　总编室·62511[redacted]　出版部：[redacted]
　　　　本社网址　www[redacted]
　　　　人大教研网．www.[redacted]）
经　　销：新华书店
印　　刷：北京密兴印刷厂

开本：890×1240 毫米 1/32　印张　11 125
2002 年 9 月第 1 版　2002 年12月第 2 次印刷
字数：314 000

定价：18.00 元
（图书出现印装问题，本社负责调换）

前　言

经济数学基础是教育部指定的财经类本科专业的核心课程之一，包括“微积分”、“线性代数”、“概率论与数理统计”三门课程。在多年的教学实践中，我们体会到，财经类的同学普遍感到做数学题比较吃力。特别是线性代数习题比较抽象，证明题较多；概率论与数理统计又是同学们初次接触关于随机现象研究的课程，学习难度明显增加，往往对一些问题不知如何下手。不做习题又想学好数学只能是异想天开。同时，现在的大学生课程多、时间紧，还要应付各种过级考试，没有更多的精力大量演算习题。因此，我们编写了这套学习与解题指导，旨在帮助学生通过选做较少的有典型意义的习题，使解题能力迅速提高，并且很好地掌握基本概念、基本理论及基本运算技能，从而收到较好的学习效果。从已出版的《微积分学习与解题指导》来看，确实达到了上述目的，受到了同学的普遍欢迎。

本书内容分为两篇，每篇包含若干章。每章均包含基本要求及学习重点、主要内容的理解与剖析、典型例题解析、习题及解答四部分。作为一本辅助教材，指明要点、强化练习是本书的特点。本书可以与国家教育部指定的优秀教材，如中国人民大学出版社出版的《线性代数》、《概率论与数理统计》配合使用，也可以作为其他各类社会办学的本科层次学生的学习用书或参考书。

本书的编写是在集体讨论的基础上完成的。具体编写分工如下：第一章，刘玉蓉；第二章，李艳娟；第三章，孟立红；第四章、第五章，金光成；第六章，曹士信；第七章，赵春昶；第八章，张良；第九章，李艳娟、张良；第十章，张毅；第十一章，张毅、马丽萍；第十二章，马丽萍；第十三章、第十四章，程从沈；第十五章、第十六章，蔡生。

本书的编写得到了尹绍平教授、赵宝凌副教授的支持与帮助。在出版过程中，陈林先生始终给予热情的帮助和支持，全体编者在此向他们表示深深的谢意。另外向为本书付出辛勤工作的中国人民大

学出版社的编辑表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，书中的缺点和错误一定不少，欢迎读者批评指正。

编者

2002 年 6 月

目　　录

第一篇　线性代数

第二篇　概率论与数理统计

第一篇
线 性 代 数

第一章　行列式

一、基本要求及学习重点

(一) 基本要求

1. 正确理解 n 阶行列式的定义,能够熟练地计算二阶行列式、三阶行列式和三角行列式的值.

2. 熟知行列式的性质,并能够熟练地运用.

3. 正确理解余子式和代数余子式的概念,掌握行列式按行(列)展开定理,并能灵活运用行列式的性质与行列式按行(列)展开定理计算行列式的值或证明等式.

4. 掌握克莱姆(Cramer)法则,能熟练应用克莱姆求解简单的线性方程组.

(二) 学习重点

1. 行列式的定义.

2. 行列式的性质.

3. 利用行列式的性质和按行列展开定理计算行列式的值.

二、主要内容的理解与剖析

(一) 排列与逆序

1. 排列

由 n 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 级排列.

例如,235461 是一个 6 级排列.

2. 逆序

在一个 n 级排列中,若较大的数排在较小的数前面,而且这种大小颠倒位置的情况共出现了 k 次,则称这个排列的逆序数为 k.

排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序数通常记作$N(i_1 i_2 \cdots i_n)$. 逆序数为奇数的排列称为奇排列;逆序数为偶数的排列称为偶排列. 计算逆序数的方法为:若比 1 大而排在 1 前面的数有 k_1 个,比 2 大而排在 2 前面的数有 k_2 个,比 3 大而排在 3 前面的数有 k_3 个等等,则这个排列的逆序数就等于 $k_1 + k_2 + k_3 + \cdots$. 例如,$N(54213) = 3 + 2 + 2 + 1 = 8$.

3. 对换

将一个排列中的任意两个数互换位置,其他的数不变,这种对排列的变换称为对换.

例如,排列 54321 经过 5 和 2 互换位置,这种对换变成了排列 24351.

定理 1.1 任意一个排列经过一次对换后排列的奇偶性改变.

定理 1.2 n 级排列共有 $n!$ 个,并且当 $n > 1$ 时,在 $n!$ 个不同的 n 级排列中,奇排列和偶排列各占一半.

(二)n 阶行列式的定义

1. n^2 个元素 $a_{ij}(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 组成的符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

表示所有可能的取自不同行和不同列的 n 个元素乘积的代数和,各项的符号是:当这一项中 n 个元素的行标按自然数的顺序排列后,若对应的列标构成的排列为偶排列,则取正号;若是奇排列,则取负号,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

称为 n 阶行列式.

n 阶行列式中横排为行,纵排为列. 以 $a_{ij}(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 为元素的 n 阶行列式简记为 $|a_{ij}|$. 由于 n 级排列共 $n!$ 个,而且当

$n>1$时，奇偶排列各占一半，所以行列式的展开式一共有 $n!$ 项．当 $n>1$ 时，$n!$ 项中一半前面取正号，另一半前面取负号.

2．几种特殊的行列式

$n=1$ 时，一阶行列式

$$|a_{11}|=a_{11}$$

$n=2$ 时，二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

$n=3$ 时，三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

下三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

上三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

对角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(三) 行列式的性质

性质 1　行列式 D 与其转置行列式 D^T 相等,即 $D = D^T$.

由此性质可知,行列式的行与列具有对称的地位,因此在行列式的性质中,凡是对行成立的对列也同样成立,反之亦然.

性质 2　交换行列式的两行(列),行列式的值变号．即若令

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则　　$D_1 = - D$

推论　若行列式有两行(列) 完全相同,则此行列式为零.

性质 3　用数 k 乘以行列式某一行(列) 的所有元素等于用 k 乘以此行列式．即若令

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{r1} & ka_{r2} & \cdots & ka_{rn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则　　$D_1 = kD$

推论 1　行列式某行(列) 所有元素的公因子可以提到行列式外面.

推论 2　若行列式某行(列) 的所有元素都是零,则其值为零.

性质 4　若行列式有两行(列)元素成比例,则其值为零．即若令

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{r1} & ka_{r2} & \cdots & ka_{rn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则　$D=0$

性质 5　行列式具有分行(列)相加性．即若令

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1}+a'_{r1} & a_{r2}+a'_{r2} & \cdots & a_{rn}+a'_{rn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{r1} & a'_{r2} & \cdots & a'_{rn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则　$D=D_1+D_2$

性质 6　将行列式某一行(列)的所有元素同乘以数 k 后加到另一行(列)对应位置的元素上,行列式值不变．即若令

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1}+ka_{r1} & a_{s2}+ka_{r2} & \cdots & a_{sn}++ka_{rn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则 $D=D_1$

(四) 行列式按行(列)展开

1. 余子式和代数余子式

在 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中,把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去,剩下的元素按其原来的相对位置所构成的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式,记作 M_{ij}. 即

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

若记

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

则称 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式.

2. 行列式按行按列展开

n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

等于它的任意一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和．即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}, 1 \leqslant i \leqslant n$$

或 $$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}, 1 \leqslant j \leqslant n$$

n 阶行列式 D 的任意一行(列)的各元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积之和等于零．

即 $$a_{i1}A_{s1} + a_{i2}A_{s2} + \cdots + a_{in}A_{sn} = 0, i \neq s$$

或 $$a_{1j}A_{1t} + a_{2j}A_{2t} + \cdots + a_{nj}A_{nt} = 0, j \neq t$$

3．克莱姆法则

非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

则方程组有惟一解：

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}$$

其中 $D_j(j = 1,2,\cdots,n)$ 为 D 中的第 j 列元素用线性方程组的常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 替换而得到的行列式.

齐次线性方程组