高等学校教学用书

高等代数习作课讲义

刘云英　张益敏
曹锡皞　李景斋　编

北京师范大学出版社

高等学校教学用书

高等代数习作课讲义

刘云英　张益敏
曹锡皞　李景斋　编

北京师范大学出版社

高等学校教学用书

高等代数习作课讲义

刘云英　张益敏
曹锡皞　李景斋　编

*

北京师范大学出版社出版
新华书店北京发行所发行
西安新华印刷厂印刷

*

开本：787×1092　1/32　印张：11.625　字数：243千
1987年7月第1版　　1987年7月第1次印刷
印数：1－18,500
统一书号：13243·82　　定价：1.85元

内 容 简 介

本书是高等院校数学系讲授高等代数（包括线性代数）时的辅助教材。全书共分九章，各章均详细按专题讲述了教材的重点、难点和对学生基本训练的要求，并备有例题及练习题，同时附有简单分析和解答。各章后附有张禾瑞、郝钢新教授所编《高等代数》的部分习题解答。

本书可作为教师讲课或习作课的参考，也可供学生自学高等代数时使用。

前　言

高等代数是数学专业的一门基础课，大部分内容均属基础理论和基本知识。这些理论和知识对学生今后学习代数的后继课或其它学科都是重要的基础，因此，一定要让学生学好这门课。但是，学生在学习这门课程时往往感到抽象，抓不住概念的实质。经常对某些习题不知从何入手，总结不出一般的思考方法，尽管教师在课堂讲授时注意到分析概念的来龙去脉以及定理的推导思路；逐步培养了学生严格的推理能力；初步体会教材讨论的中心问题及相互间的联系。但是，有些任务还是需要习作课来完成。特别是对低年级的学生来说，刚刚开始接触高等数学需要有个入门的过程。根据教学实践，我们认为习作课不是简单的习题课，即由教师讲解几个例题，而应该是课堂讲授的补充与深化；应该帮助学生加深对概念的理解；提高抽象的思维能力以及逻辑推理及运算技巧的能力。因此，习作课的内容是丰富多采的；方式是灵活多样的。我们常采取的方式有：（一）为了使学生正确理解和巩固概念，由教师在课堂上对学生提出一些恰当的问题，启发学生积极思考并组织他们共同讨论，我们称这种方式为课堂讨论。例如，讲多项式的整除性理论，向量的线性相关性等内容时，概念比较多，学生容易混淆不清或理解错误，习作课就可以采取课堂讨论的方式。教师在组织学生讨论时，提问题要目的明确，抓住学生中较带有普遍性的问题进行讨论，不必怕学生说错。教师要积极引导，最后总结

出正确的结论来。（二）为了使学生掌握严格的逻辑推理方法和计算技巧，在习作课上教师给出一些练习题让学生独立完成。在学生做题的过程中教师及时发现他们所做的典型做法（包括正确的和错误的），请学生讲解他们的做法，然后由教师讲评，总结归纳出思考问题的正确方法。我们称这种方式为课堂练习。在组织课堂练习时，首先要注意选题；其次要善于抓住典型的做题方法；最后的讲评既要指出学生的错误，又要分析清楚其产生错误的原因，并总结出正确的解题思路，逐步提高学生的解题能力。（三）为了分析某些习题的做法或解决个别难题，使学生逐步掌握一些解题技巧，教师可以选择适当的例题加以分析。（四）讲解习题，教师把学生中好的解题方法或一般容易犯的错误归纳总结进行讲评，切忌简单地给出习题解答。比如对待学生习题中的错误，不仅指出错在什么地方，而且要说明这个错误的出现反映学生学习上存在什么问题，有的可能是由于没有抓住概念的实质；有的可能是逻辑推理上的荒谬；有的可能是计算上的粗心等等。（五）为了加深学生对某些问题的理解，讲清教材前后内容的联系，教师可以引导学生学会做小结及阶段性总结。（六）为了充实教材内容，在习作课上可以补充一些必要的与讲授教材有联系的知识。例如，代数运算、等价关系与集合分类等。

当然每位教师通过教学实践对怎样上好习作课都有自己的宝贵经验。以上仅是我们在习作课上常采取的方式，未必恰当。提出来供大家讨论研究。

本书是我们在教学实践中积累的一些材料，很不完全。特别是有些内容很难写出。比如在课堂讨论中选择的题目应

针对所教授班级学生的实际情况而异，有些问题需要根据学生的回答提出，在这份资料里就不易写清楚；又如对某些例题的分析及学生习题的讲评都不是千篇一律的，要结合学生的实际情况讲述。因此，这里给出的仅是部分容易写出的材料，整理的很粗糙，只能起个抛砖引玉的作用。

为便于同志们参考，我们所选的材料较多。因此，不必在习作课上全部采用，而应根据实际需要从中选取一部分即可。

由于国内现行高等代数教材很不统一，所以，本书就不可能照顾到各种不同的版本。我们是选用张禾瑞、郝钠新教授编写的高等代数为主要教材的。我们在各章后附有“部分习题解答”，所选习题是上述教材中的习题。

在编写过程中，刘绍学教授一直给予鼓励和支持，并提出不少宝贵意见，我们在此表示衷心感谢。

编者 1984．1

目　　录

第一章 基本概念

本章主要内容是介绍高等代数中常用到的一些概念，包括集合的初步知识、映射及复数。对初学高等代数的学生来说，学习映射部分的满射、单射及映射合成时会感到有些困难。通过习作课帮助学生正确理解这些基本概念，抓住概念的实质，并初步领会怎样举例——包括正例和反例，以及按定义的条件进行验证的方法。

一、集合

集合可以作为不定义的概念来处理。有的教本在讨论开始时还是给它一个简单的刻划。这里先给出几个常用到的数的集合的符号，以后用到时就不再声明了。

Z：表示一切整数的集合。简称整数集。

Q：表示一切有理数的集合。简称有理数集。

R：表示一切实数的集合。简称实数集。

C：表示一切复数的集合。简称复数集。

关于集合，要求学生搞清以下几个问题：

1．确定一个集合A，就是要确定哪些是集合的元素，哪些不是集合的元素。我们说明一个集合包含哪些元素时，可采用下述方法来描述：例如，P表示一切自然数的集合，可以记作P：全体正整数；或记作P：全体自然数；或记作$P=\{x|x\in Z,\ x>0\}$。

前两种记法是列举出这个集合的全部元素；后一种记法

是给出这个集合所具有的特征性质．这种描述集合所含元素的特性的方法以前在中学不常用，可多给学生几个例子．

例 $A=\{$平面上的点$(x,\ y)\ \left|\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\right.\}$．

$E=\{x\,|\,x\in \mathbf{Z},\ x>0$ 并且$x=2y,\ y\in \mathbf{P}\}$．

事实上，E是一切正偶数作成的集合，也可以记作

$E=\{2n\,|\,n\in \mathbf{P}\}$．

2．不含任何元素的集合叫做空集，用符号$\varnothing$表示．约定空集是任何集合的子集．既然是约定就不必证明了，今后可以直接使用．若是承认形式逻辑推理的以下事实

(*) “任一命题只要前提不成立，那末，无论结论如何，整个命题被认为是成立的。”

那末可以证明

“对任意集合A，均有$\varnothing\subseteq A$。”

为此，只需证明命题“$x\in\varnothing\Rightarrow x\in A$”成立．今证此命题．因为，$\varnothing$不含任何元素，所以，$x\in\varnothing$不成立．由(*)则有“$x\in\varnothing\Rightarrow x\in A$”成立．当然，这种证明完全是为了逻辑推理上的严谨．对初学者来说，采取“约定空集是任何集合的子集”的处理办法较易接受．

以上两个问题可由教师提出问题让学生回答，然后总结出正确结论来．

3．中学代数大部分的内容是计算．因此，学生开始遇到证明题时往往不知从何入手．在高等代数的学习中，从一开始就要注意培养学生的推理能力．在这里通过证明“集合相等”来加强这方面的训练．

练习1 证明，若$A\subseteq C$，则$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap C$．

证　$x\in A\cup(B\cap C)\Rightarrow x\in A$或$x\in B\cap C$；

$x\in A\Rightarrow x\in A\cup B$，又由$A\sqsubseteq C$知$x\in C\Rightarrow x\in(A\cup B)\cap C$；

$x\in B\cap C\Rightarrow x\in B$且$x\in C\Rightarrow x\in A\cup B$且$x\in C$
$\Rightarrow x\in(A\cup B)\cap C$。

所以，无论是哪种情形均有$x\in(A\cup B)\cap C$。

因而有　$A\cup(B\cap C)\sqsubseteq(A\cup B)\cap C$。

反过来，$x\in(A\cup B)\cap C\Rightarrow x\in A\cup B$且$x\in C\Rightarrow x\in A$且$x\in C$或$x\in B$且$x\in C$；

$x\in A\Rightarrow x\in A\cup(B\cap C)$；

$x\in B$且$x\in C\Rightarrow x\in B\cap C\Rightarrow x\in A\cup(B\cap C)$。

所以，无论是哪种情形均有$x\in A\cup(B\cap C)$。

因而有　$A\cup(B\cap C)\sqsupseteq(A\cup B)\cap C$。

故得　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap C$。

这个题可留给学生在课堂上做为练习。教师总结时要讲清证明"集合相等"时只要证明两个集合互为子集即可，也就是证明：

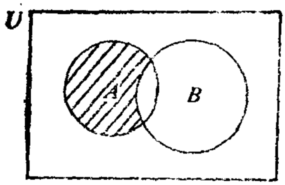
$(A=B)\Longleftrightarrow$（对一切x：$x\in A\Longleftrightarrow x\in B$）。

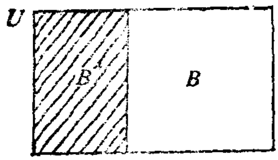
4．为了使学生所学知识稍宽广些，在习作课上可以向学生讲解一下补集、幂集及加氏积等概念，这些都是常见到的且很有用的集合。

设A，B是集合U的子集，一切属于A但不属于B的元素作成的集合叫做B在A中的补集，记作$A\setminus B$；特别B在U中的补集简称B的补集，记作B'。给出图示（见第4页图）以帮助理解这个概念：

练习2　证明，$(A\cap B)'=A'\cup B'$；

$(A\cup B)'=A'\cap B'$。





阴影部分为$A\setminus B$　　　　　　阴影部分为B'

设A是给定的一个集合，A的所有子集作成的集合叫做A的幂集，用符号2^A表示。

例1　$A=\{1, 2, 3\}$。

$2^A=\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, A\}$。

由此可见，如果A含有n个不同的元素，那么2^A含有2^n个不同的元素。这里要注意，2^A的元素是A的子集。$\{1\}\in 2^A$，不能写成$\{1\}\subset 2^A$；也不能写成$1\in 2^A$；而对A来说，要写成$\{1\}\subset A$，及$1\in A$，而不能写成$\{1\}\in A$。

设A，B是任意两个集合，可以利用A，B构造一个新集合，命

$A\times B=\{(a, b)\mid a\in A, b\in B\}$，这个集合叫做$A$，$B$的加氏积。

特别，当$A=B$时，$A\times A$是一切由A的元素组成的有序对(a_1, a_2)作成的集合。当$a_1\neq a_2$时，(a_1, a_2)与(a_2, a_1)是$A\times A$的两个不同的元素。这正如坐标平面上(x, y)与(y, x)表示两个不同的点一样，而$\mathbf{R}\times\mathbf{R}$恰好是坐标平面，也叫做加氏平面。

例2　$A=B=\mathbb{Z}$。

$$A\times B=A\times A=\{\text{整数对 }(a,\ b)\}.$$

二、映射

映射是近代数学中的一个基本概念。学习这部分内容时要求学生会按定义验证一个给定法则是不是映射，并能分辨一个映射是不是满射或是不是单射。从学习一开始就应该注意训练学生语言叙述准确、清楚、有条理。

1．关于映射概念要求学生掌握两点：（1）映射可以看做是函数概念的推广；（2）抓住映射的基本要点。可以让学生做以下练习。

练习3 设$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}=B$.

$$f:\ A\longrightarrow B;\ n\longmapsto n-1,\ \forall n\in A.$$

法则f规定A中每一个元n的象是$n-1$，很明显A中1的象应该是0，但是$0\notin B$。因此，f不是A到B的映射。

重新规定

$$\varphi:\ A\longrightarrow B;\ n\longmapsto n-1,\ n=2,\ 3,\ 4,\ 5;$$

$$1\longmapsto 1.$$

这样一来，通过法则φ，对于A中每一个元，在B中都有唯一确定的元与之对应，因此，φ是A到B的一个映射。

注意，映射概念的要点是：映射是一个对应法则；这个法则对A中每一个元都规定唯一确定的象；并且象是B中元素。这几点缺一不可。

例3 设$A=B=\mathbf{Z}$.

$$f:\ \mathbf{Z}\longrightarrow\mathbf{Z};\ n\longmapsto|n|,\ \forall n\in A;$$

$$1\longmapsto 0.$$

法则f规定1的象既是1又是0，虽然1和0都在$\mathbf{Z}$中，

但是 1 的象不唯一确定。因此，f不是$\mathbf{Z}$到$\mathbf{Z}$的映射。

例4 任意一个定义在实数集$\mathbf{R}$上的函数

$$y = f(x)$$

都是实数集$\mathbf{R}$到自身的一个映射。即实变函数可以认为是映射的一种特殊情况。由此可见，映射概念是实变函数的推广，只是定义域和值域不再限制为实数集或它的子集了。

2．满射

满射是加了条件的映射。即 A 到 B 的一个满射f，首先是A到B的一个映射，其次，满足$f(A)=B$。通常我们验证A到B的一个映射是不是A到B的一个满射，可以使用下面的等价命题：

A到B的一个映射f是满射$\Longleftrightarrow$对B中任一个元素 y，都有A中元素x使得$f(x)=y$。

（应向学生讲清这是满射概念的另一提法，用起来较方便。）

练习4 设$A=B=\mathbf{Z}$

$$f: \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z};\ n \longmapsto n+1 \quad \forall n \in \mathbf{Z}.$$

首先，f是$\mathbf{Z}$到$\mathbf{Z}$的一个映射。其次，对$\mathbf{Z}$中任一元素y都有$\mathbf{Z}$中元素$x=y-1$使得$f(x)=x+1=(y-1)+1=y$。所以，f是$\mathbf{Z}$到$\mathbf{Z}$的一个满射。

为了帮助学生学会验证一个映射是不是满射，应讲清以下两点：

（1）要证明A到B的一个映射f是满射，即希望证明，任取$y\in B$，一定存在$x\in A$使$f(x)=y$。可先假定x是存在的，且有$f(x)=y$，然后，讨论x应该是什么？如果得出的$x\in A$，再反过去叙述。以练习 4 为例。

任取 $y\in\mathbf{Z}$，且有 $f(x)=y$，即由 $x+1=y$ 可推出 $x=y-1$，且 $y-1\in\mathbf{Z}$。这样，可叙述为：对 B 中任一元素 y，都有 A 中元素 $x=y-1$ 使得 $f(x)=y$。

（2）学生常犯这样的错误：例如设 $A=B=\mathbf{Z}$，$f(n)=3n$，问 f 是不是 A 到 B 的一个满射？显然 f 是 A 到 B 的一个映射。然后，学生常叙述为：对 B 中任一元素 $3n$ 都有 A 中元素 n 使 $f(n)=3n$。所以，f 是 A 到 B 的一个满射。这种形式地叙述是错误的。因为，B 中任一元素不一定可以表成 $3n(n\in\mathbf{Z})$ 的形式。比如，$2\in\mathbf{Z}$，2 就不能表成 $3n$ 的形式。事实上，只需按照（1）中的方法去分析，立即可得出 f 不是 A 到 B 的满射。因为，任取 $m\in\mathbf{Z}$，且有 $f(x)=m$，即 $3x=m$，求 $x=?$ 显然，此方程在 $\mathbf{Z}$ 中未必有解。更简单的证法是：只要指出 $2\in\mathbf{Z}$，但不存在 $n\in\mathbf{Z}$ 使 $3n=2$。

由于映射是多种多样的，因此，在验证一个映射是不是满射时可以灵活运用定义。

为了加深学生对满射概念的理解以及如何正确验证一个映射是不是满射，可以再做几个练习。

练习5 设 $A=\mathbf{R}$，$B=\{x|x\in\mathbf{R},\ x>0\}$。（以后我们把集合 B 记作 $\mathbf{R}^+$，它是由一切正实数作成的集合）.

$$f:\ A\longrightarrow B;\ x\longmapsto e^x,\ \forall x\in\mathbf{R}.$$

首先，通过法则 f，对 A 中每一个元 x 都有 $\mathbf{R}^+$ 中唯一确定的 e^x 与之对应，所以，f 是 A 到 B 的一个映射；

其次，任取 $y\in\mathbf{R}^+$，令 $y=e^x$，则 $x=\ln y\in\mathbf{R}$，且有

$$f(x)=e^{\ln y}=y$$

所以，f 是 A 到 B 的一个满射。

练习6