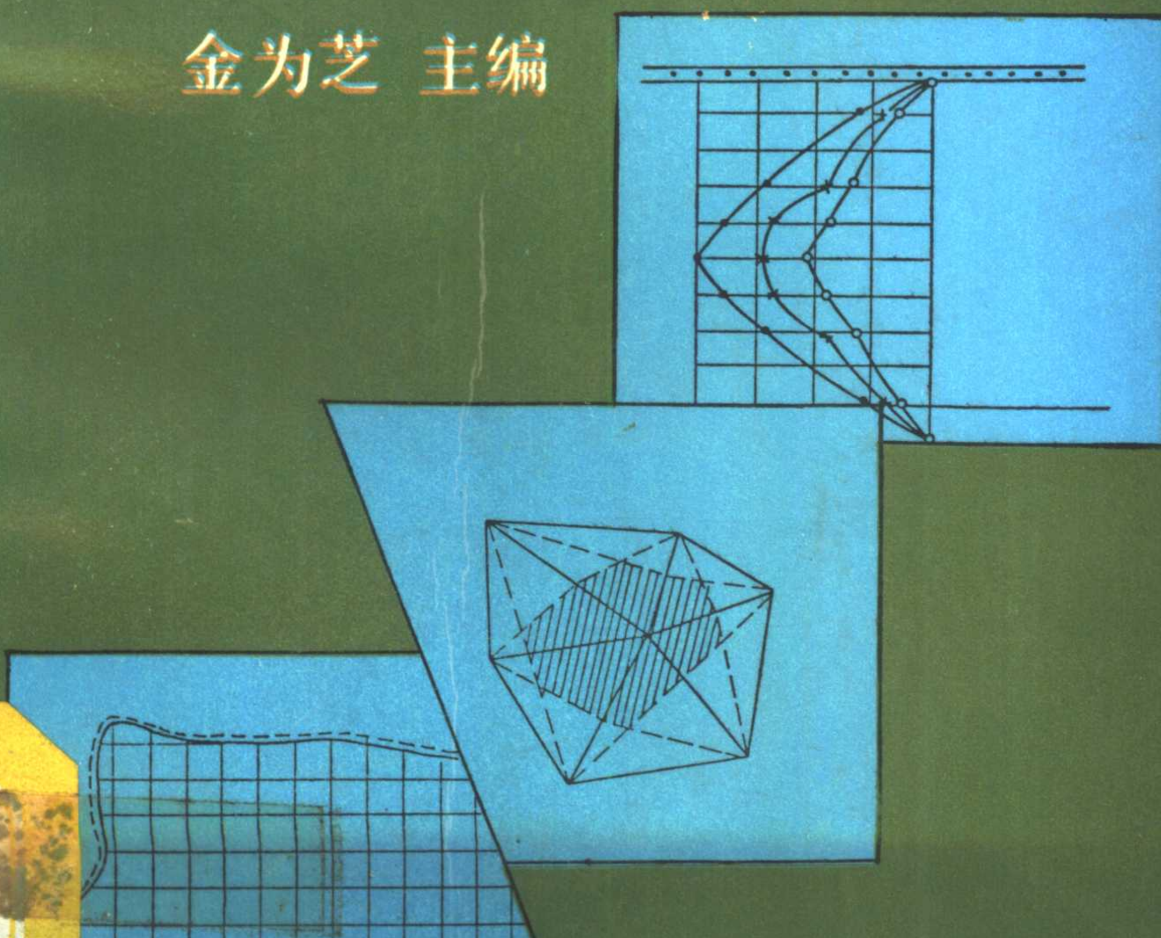
水文地质 工程地质 数值法

金为芝 主编



同济大学出版社

水文地质工程地质数值法

金为芝 主编

同济大学出版社

（沪）新登字 204 号

内 容 提 要

全书由两部分组成，第一部分是水文地质数值法，介绍了规则网络有限差分法、里茨有限单元法、伽略金有限单元法及水均衡数值法；第二部分是工程地质数值法，重点讨论了太沙基固结理论的有限差分法及弹性力学有限单元法，其中包括方程的建立、工程算例、算例计算结果分析等。

为了帮助读者加深对内容的理解，在各章节中穿插了较多的实例并介绍了几种行之有效的实用程序。每章都配有适量的习题。

本书是水文地质工程地质专业课的教材，也可作为从事水文地质工程地质的工程技术人员的参考书。

责任编辑　李炳钊
封面设计　陈益平

水文地质工程地质数值法
金为之　主编
同济大学出版社出版
（上海四平路 1239 号）
新华书店上海发行所发行
青浦任屯印刷厂印刷
开本：850×1168　1/32　印张10.25 字数：295千字
1992年12月第1版　1992年12月第1次印刷
印数：1—1500　定价：3.50 元
ISBN 7-5608-1040-3/P.5

前　言

《水文地质工程地质数值法》是水文地质及工程地质专业的一门专业课。学生在学习本课程前应具有线性代数、水文地质学基础、地下水动力学、土力学基础等知识。由于目前在国际、国内水文地质与工程地质数值法实践中主要应用有限差分法与有限单元法，所以本教材主要对这两种计算方法作较详细的阐述。对有限单元法所需的泛函与变分法概念也在第一篇中作了简明的介绍。

本教材是作者在他们多年教学、科研及参与生产实践的基础上编写的，为使学生通过对本课程的学习，可以独立建立一般的地下水渗流场或工程地基土的数值法模拟模型，并进行计算，作者力图对理论叙述做到精炼、明确；同时通过实例让学生对方法的实质有较好的理解。

本教材由水文地质数值法（第一篇）及工程地质数值法（第二篇）两大部分组成。第一篇由金为芝编写；第二篇的绪论及第二章的§1、§2、§3三节由李华编写；第二篇的第一章与第二章的§4由邱正祥编写。金为芝负责主编。感谢孔宪立教授对本教材第二篇提出了宝贵意见。

由于作者水平有限、书中如有不妥与错误之处敬希读者予以指正！

金为芝 1991.10

目　录

第一篇　水文地质数值法

第二篇 工程地质数值法

第　一　篇

水文地质数值法

水文地质数值法概述

水文地质数值法又叫地下水渗流数值法，是解地下水渗流数学模型的一种计算方法。

地下水的渗流规律可以用数学模型描述，它包括地下水渗流基本微分方程式及实际问题的定解条件。求解数学模型的主要数学方法有解析法与数值法两大类。

解析解是指在一定假设条件下，经过严格的数学推导获得微分方程式解的表达式。在地下水动力学中介绍的各种计算公式如裘布依公式、泰斯公式、汗突斯-雅可比公式、博尔顿公式等都是解析解。这些公式反映了在抽水井抽水时含水层内井附近任一点某任一时刻(对于非稳定运动)的水位值。当假设条件符合实际条件时，由公式求得的解是精确的，因此解析解又叫做精确解。但是，由于受到目前数学手段的局限，用解析法求解微分方程式时，只能处理比较单一的条件，例如：天然地下水水力坡度值应等于零；含水层均质、等厚；在无限远边界处水位不变等。这些构成了解析解必要的假设条件。因而解析法的应用是受这些假设条件的约束限制的。实际上，自然界的水文地质条件往往比较复杂，含水层的厚度、透水性，在大多数情况下是不均匀的；边界的几何形状是任意的，并常常是几种类型边界的组合；不同边界位置的补给来源与补给量不一致，同时各边界的补给量还随着时间发生变化等等。在这种情况下若用解析法进行计算，其实际条件将与假设条件相差甚远，由此带来的误差也就会很大。因此在水文地质条件比较复杂，而对地下水开采资源评价精度要求相对较高的地区，一般不宜采用解析法进行计算。

但是解析法的计算方法比较简便，若计算的时间跨度不大，突

然刺激因素(如抽水、注水等)对含水层的影响范围相对较小，远远影响不到含水层边界，在这些情况下，仍可利用解析法进行计算。例如，我们可以利用各种解析方法公式整理抽水试验资料，以求得局部的水文地质参数值。

数值法是解数学模型的一种近似方法。它须将随机性质的计算区和连续的时间作离散化处理，因此它的解是近似的。由于数值法计算可以将性质不均匀的计算区离散成许多性质均一的小区，计算时可以顾及随时间和空间变化的种种复杂水文地质因素。因此它能更切合客观条件，适合于解决实际生产问题。这就是目前数值法得以迅速普及与发展的重要原因。

数值方法的计算过程相对比较复杂，且多是重复性计算。因此需借助计算机进行。

地下水渗流数值法目前主要用于进行地下水资源评价（预测各种开采方案地下水位变化情况)；矿坑涌水量的预测；地下水水质运移与弥散；地下水开采资源优化管理等方面。

地下水渗流数值法是60年代后期才发展起来的。起初是将石油工业中的渗流计算方法应用到地下水渗流的计算中，以后便得到了广泛的普及。水文地质数值法为水文地质计算的发展开辟了新的途径。

回顾一下渗流数值法的产生与发展过程，我们不难发现，它是水文地质计算发展的必然，它适应了生产发展的需要。

虽然我国在1000多年以前就已开始利用地下水资源，西方利用地下水也有500多年的历史，但是水文地质计算却起步很晚，直到19世纪初，有关这方面的报导还很少。一方面是由于当时的生产力还不很发达，对地下水的需求量远小于含水层的水资源量，甚至人们误以为地下水是取之不尽的；另一方面，水质点在岩石中运动的机理太复杂，当时对地下水的运动规律还不能充分认识。

1856年达西通过实验提出了水在多孔介质中渗透的定律——达西定律，并建立了渗透流速的概念。它使人们有可能不必详细

研究水质点的运动，而将水在岩石空隙中的运动看作是一种理想化液体的运动。达西定律的问世为研究地下水运动规律打下了基础。此后不久，裘布依提出了地下水流向井的稳定运动公式——裘布依公式。从此开始了对地下水流的定量计算。当时生产力发展水平仍不很高，对地下水的需求量相对较小，裘布依公式已能满足那个时期的井水开采量的计算，因而裘布依公式的应用持续了近100年。

到了本世纪30年代，经济发展加速，欧美各国对地下水的开采规模加大，裘布依公式已不能满足对地下水定量评价的需要，同时人们也认识到地下水运动的非稳定流性质。1904年布西涅斯克提出了地下水非稳定流偏微分方程式，它与热传导方程十分接近。1935年泰斯将热传导方程的求解技术应用到地下水运动领域，使水文地质计算科学开始向地下水非稳定运动的应用方面发展。尔后，博尔顿、汉突斯、纽曼等进了行不同条件下地下水非稳定运动的研究，并推导出了各种条件下的地下水非稳定流运动计算公式。

上述各种公式都是解析法公式，虽然解析解本身是精确解，且公式的使用条件逐渐扩大，但是正如前面所指出的：微分方程的解析法求解是有条件的，这些条件限制了公式的使用范围。随着生产的不断发展，人们对地下水的需求量急剧增加，对地下水开发预报的要求也提高了。用解析解处理实际问题带来的误差太大，越来越不能适应新的要求。

为了模拟各种复杂的定解条件及模型的不规则性问题，50年代曾流行过物理模拟方法，如水电比模拟、电阻网络模拟、电阻—电容网络模拟等等。但这些方法比较繁琐，对电子元器件精度要求较高，而且模型的修改工作量比较大。

随着电子计算机技术的发展，数值计算越来越显示出了它的优越性。到了60年代末、70年代初，数值计算方法便开始应用于地下水运动计算的实践中，如今随着计算机功能的加强、内存的

扩大、速度的加快，地下水渗流数值法在水文地质计算中已占有重要的位置。

目前人们正在研究将地下水运动数值计算与其它计算方法联合，解决更高一层次的问题。如用水文地质有限元与各种优化方法联合解决地下水开采优化管理问题，或地表水、地下水联合优化调度问题等。

数值法计算要求事先知道具体的、比较确切的水文地质条件及水文地质参数，而目前水文地质勘探与试验方法几乎仍停留在50、60年代水平。水文地质勘察资料的准确性不高，在有些水文地质条件复杂的地区，虽经过多年勘察，却仍不能搞清楚其水文地质条件。在这种情况下建立地下水运动数值法模型所必须的许多已知参数误差太大。有人企图利用数值法作为反求模型的工具而代替勘察工作，这种做法常使模型严重失真，若用这样的模型去进行水资源量的计算，其结果也就不可信了。虽然以上这些问题都不是数值法计算本身的问题，然而落后的勘测手段与先进的计算方法之间的矛盾已构成了计算事业发展的阻力。在这方面，水文地质界正在进行大量探讨。

最后还必须指明：水文地质数值法计算只是水文地质计算的一部分内容，是以水文地质学及地下水动力学为基础的一种计算方法，它不能代替地下水运动基本理论，只有深刻掌握了水文地质知识及地下水运动基本规律，才能恰当地、灵活地正确运用数值计算方法。此外，水文地质数值法也不是水文地质计算中唯一最好的方法。许多新路还有待我们进一步探寻。

本篇主要介绍有限差分法、有限单元法与均衡数值法(又叫做不规则网络有限差分法)。这些方法在我国有广泛的应用，同学们均应掌握。

有限差分法是将一个含有一阶导数或二阶导数的微分方程式，用差商近似地代替导数，从而将微分方程式化作差分方程式求解。

有限单元法是将计算区离散成一定数量的单元体，利用变分原理或基函数方法，将微分方程化作各单元节点的线性代数方程式，进行方程组联立求解。

均衡数值法是对离散的单元体划分出毗邻的许多小均衡区，建立每个均衡区的地下水均衡方程式，联立方程求解。

以上几种计算方法各有一定的优缺点，往往人们根据自己的习惯选用某种方法进行计算，因此我们常见到用各种计算方法进行计算的文献，为使学生今后参阅文献资料方便，我们对几种方法均作了介绍，本书因考虑到有限单元法在国内相对使用较多，因此对有限单元法(尤其是里茨有限单元法)作了较详细的讲解。

此外，数值法还包括边界有限单元法、等参有限单元法等，本课程将不涉及这些内容。

渗流数值法是一门实践性很强的课程，学生为了掌握其计算方法，应首先掌握计算原理。只有这样才能灵活应用数值法去解决实际问题。自然界的水文地质条件千变万化，掌握了计算原理就有可能根据实际条件确定数学模型，使数学模型适应具体水文地质条件，再根据数学模型求得相应的数值计算线性代数方程式，据此修改已掌握的渗流数值法程序。若能做到这一点，本课程的学习目的也就达到了。

本书的每一章都配有习题，可供学生课后复习参考。

习题 1-0

1．什么叫做渗流数值法？有什么用途？

2．渗流数值法与解析法有哪些异同？在哪些情况下宜使用渗流数值法？

3．渗流数值法与解析法哪个计算结果为精确解，哪个是近似解？在什么情况下解析解精度高？在什么情况下数值解反而精度高？为什么？

4．渗流数值法在目前的应用中存在哪些问题？

第一章　地下水运动的模拟与数学模型

所谓模型通常是指一个实际现象或过程（如某含水层中地下水的运动），用另一种结构系统去复制与再现，以便研究其规律性，这种复制的系统便叫做模型。而模型对于某种现象或过程的再现过程便是模拟，模拟是一种方法，但有时人们也将模拟某个过程的模型简单称为模拟，模拟方法包括物理模拟与数学模拟两大类。

物理模拟是利用某种物理模型（如沙槽、水电比模拟、电网络模拟等）与被模拟的实体系统（如某含水层的地下水渗流）之间的物理相似性，进行实体物理现象的再现。物理模拟的优点是直观、易于理解。但缺点是模型的制作费力、费时；测量的精度亦不高。因此，在目前的实际应用中，已有被计算机代替的趋势。

数学模拟是利用一组数学表达式描述实体现象或过程，这一组数学表达式便是实体的数学模型。

根据模型中变量的确定性可以将数学模型分为随机模型与决定型模型两类。如果模型中的变量全部取确定的值时，叫做决定型模型；如果模型中的变量属随机变量，也就是说，只知道某些变量取值的概率，这种模型称为随机型模型。在水文地质数值法研究中，一般均使用决定型模型，但有时数值模型可以与随机模型联合应用。

根据模型变量与空间坐标的关系；数学模型又可分为集中参数模型与分布参数模型两类。集中参数模型的各变量与空间无关，如总降雨量与区域总补给量之间的关系式、总补给量与泉流量之间的关系等；分布参数模型是指模型中的变量是空间坐标的函数。我们的数值计算模拟均属于后者，其地下水位、地下水侧向补

给量、含水层的水文地质参数等等，均是空间坐标 x、y(及 z)的函数。

对于一个决定型的分布参数 模型一般包括两个内容：1.偏微分方程式——描述地下水的运动规律。2.定解条件——反映含水层的边界条件及初始条件(对于非稳定运动)。

以下分别讨论承压水与潜水的偏微分方程式及其定解条件。

§1 承压含水层偏微分方程式

我们首先研究二维流运动空间，即地下水呈平面流运动。换句话说，不考虑地下水在 Z 方向的运动流速，须推导平面二维流地下水运动微分方程式。

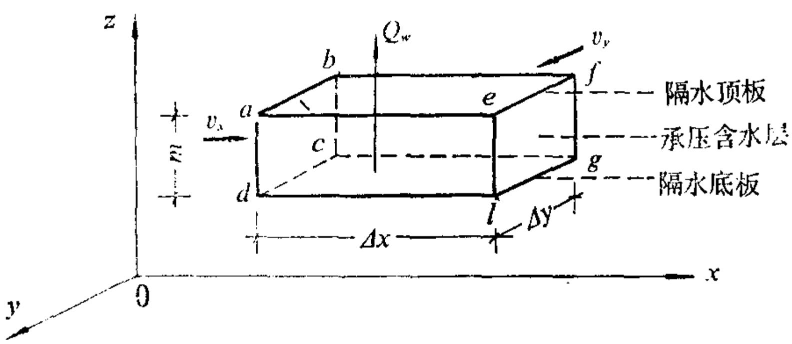


图 1.1.1

在二维流水平运动的承压含水层中，截取一个面积为 $\Delta x\Delta y$ 的平行六面体，其含水层厚度为 m 见图(1.1.1)。则这个柱体的体积即为：

$$\Delta A = m\Delta x\Delta y \tag{1.1.1}$$

为便于推导方程式，我们作以下假设：①在地下水运动过程中，平行六面体的体积 ΔA 不变；② ΔA 体积相对于渗流场可看作无限小；③地下水运动符合达西定律；④地下水流是连续的。换句话说，地下水位对坐标与时间的导数在小区内任意一点都是存在的；⑤只考虑地下水渗流的机械运动，不考虑其对周围岩石介质的物

理-化学作用；⑥ 将地下水看作不可压缩的均质液体。地下水密度 ρ 为常量。

由以上假设可利用小平行六面体的水均衡原理研究渗流水量在平行六面体中的水均衡关系：

1. 设沿 x、y 轴方向的渗透流速分量为 v_x、v_y。则经过 Δt 时间，通过断面 $abcd$（断面积为 $m\Delta y$）流向六面体内的渗透流入量为：

$$v_x m\Delta y\Delta t \tag{1.1.2}$$

由平行于 $abcd$ 的断面 $efgl$（断面积为 $m\Delta y$）流出六面体的渗流量应为：

$$\left(v_x+\frac{\partial v_x}{\partial x}\Delta x\right)m\Delta y\Delta t \tag{1.1.3}$$

由此沿 x 方向流入与流出六面体的渗流量之差为 (1.1.2) 式与 (1.1.3)式之差值：

$$v_x m\Delta y\Delta t-\left(v_x+\frac{\partial v_x}{\partial x}\Delta x\right)m\Delta y\Delta t=-\frac{\partial v_x}{\partial x}\Delta x\Delta y m\Delta t \tag{1.1.4}$$

同理，经过 Δt 时间沿 y 方向流入与流出六面体的渗流量之差为：

$$v_y m\Delta x\Delta t-\left(v_y-\frac{\partial v_y}{\partial y}\Delta y\right)m\Delta x\Delta t=-\frac{\partial v_y}{\partial y}\Delta x\Delta y m\Delta t \tag{1.1.5}$$

即在 Δt 时间内，流入和流出平行六面体的总渗流量之差可写作：

$$-\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\Delta x\Delta y m\Delta t \tag{1.1.6}$$

根据假设③——地下水运动符合达西定理：

$$v_x=-K_x\frac{\partial h}{\partial x},\ v_y=-K_y\frac{\partial h}{\partial y},$$

代入(1.1.6)式得

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(K_x\frac{\partial h}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K_y\frac{\partial h}{\partial y}\right)\right]\Delta x\Delta y m\Delta t \tag{1.1.7}$$

渗透系数与含水层厚度之乘积叫做导水系数，以 T 表示：

$$T_x = K_x m \qquad T_y = K_y m$$

(1.1.7)式可写作：

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(T_x \frac{\partial h}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(T_y \frac{\partial h}{\partial y}\right)\right]\Delta x \Delta y \Delta t \qquad (1.1.8)$$

2. 如若在六面体的 $abfe$ 水平面上有一个无穷小的点 $\omega(x_\omega$、$y_\omega)$，有一个集中排水量为 Q_ω，在这个点以外的排水量为零，那么在 Δt 时间内六面体的水量增量应为 $-Q_\omega \cdot \Delta t$、但为表明这是一个集中的量，为推导微分方程式方便，可利用奇异函数 δ 表达，即将这个集中量表达为：

$$-Q_w \delta(x - x_w,\ y - y_w)\Delta x \Delta y \Delta t \qquad (1.1.9)$$

若有 n 个集中量时，则(1.1.9)式可表示为

$$-\sum_{\omega=1}^{n} Q_\omega \delta(x - x_\omega,\ y - y_\omega)\Delta x \Delta y \Delta t \qquad (1.1.10)$$

其中 δ 函数又叫做脉冲函数，由于 δ 函数的存在，可将 Q_ω 看作是均匀分布在全部面积 $abef$ 上的连续函数，从而可解决建立偏微分方程式的问题。δ 函数有以下特性：

δ 函数是物理学中描述自然现象中某集中量的一种函数。如对于点热源、点电源等。在实际问题中，常遇到很大的物理量作用于近似一个点上，这种现象叫做脉冲现象，表达这种现象的函数便叫做脉冲函数(即 δ 函数)。δ 函数是一种奇异函数。

δ 函数有以下特点：

(1) $\delta(x)$ 函数在原点上为无限大，离开原点即为零：

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \infty & x = 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases} \qquad (1.1.11)$$

(2) δ 函数的广义积分为 1：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\mathrm{d}x = 1$$

(3) δ 函数与任一连续函数的卷积等于连续函数在原点上的